Un théorème de zéros dans les groupes algébriques commutatifs

d'après Amoroso & David

Résumé. Dans ces notes, on présente un nouveau théorème de zéros, qui généralise le résultat principal de [Phi96] et constitue une version avec multiplicités, dans le cadre élargi des groupes algébriques commutatifs, du lemme de zéros de [AD03]. Cet énoncé s'avère utile dans certaines approches diophantiennes du problème de Bogomolov effectif sur les variétés abeliennes (*cf.* [Gal08]).

Abstract. In these notes, we give a new zero theorem that generalises the main result of [Phi96]. This is a version with multiplicity, in the general setting of commutative algebraic groups, of the zero lemma proven in [AD03]. This new result turns out to be useful in a recent diophantine approach of the effective Bogomolov problem on abelian varieties (*cf.* [Gal08]).

1 Introduction

L'objet de ces notes est d'énoncer et de prouver un théorème de zéros dû à Amoroso et David, dont un cas particulier a déjà été démontré dans [AD03]. Ce théorème s'inscrit dans la lignée des lemmes de zéros classiques de Philippon, qu'il généralise (voir [Phi86], théorème 2.1 et [Phi96] théorèmes 1 et 2).

On fixe pour cet article un corps $\mathbf{k}$ algébriquement clos et un groupe algébrique commutatif $\mathbf{G}$ de dimension $g \geq 1$ défini sur $\mathbf{k}$. On sait qu'il existe un plongement (quasi-projectif), qu'on fixe maintenant, de $\mathbf{G}$ dans un espace projectif $\mathbb{P}^n$ sur $\mathbf{k}$. Soit V une sous-variété de $\mathbf{G}$. Un lemme de zéros permet classiquement de comparer le degré d'un polynôme homogène P non trivial, nul sur une réunion de translatés de V, au degré d'une "variété obstructrice" contenant un translaté de V. Le théorème principal de [Phi96] permet ainsi de minorer le degré d'un polynôme P nul sur le translaté de V par un ensemble de la forme $\Sigma_0 + \cdots + \Sigma_d$, où d est la codimension de V et les $(\Sigma_i)_{1 \leq i \leq d}$ sont des ensembles finis de points pondérés par des ordres d'annulation.

Sous l'hypothèse supplémentaire que les supports des Σ_i sont des réunions d'un nombre fini de sous-groupes $(H_{i,j})_{1 \leq j \leq s_i}$ de $\mathbf{G}$, on obtient ici une inégalité plus précise concernant le degré de sous-variétés obstructrices. De plus, en reprenant les idées développées par Philippon dans [Phi96] (notamment le formalisme des *dessous d'escalier*), on donne un énoncé assez précis en ce qui concerne la multiplicité. Suivant cette référence, la seconde partie de ce texte est constituée de préliminaires sur les dérivations, les dessous d'escalier et la multiplicité de Samuel. Dans la partie suivante, on énonce le théorème de zéros puis on le démontre, en considérant des suites de gros ensembles algébriques emboîtés obtenus en intersectant des translatés de l'hypersurface définie par P. On donne enfin une information supplémentaire sur les variétés obstructrices dont l'existence est donnée par le théorème de zéros.

Rappelons que ce raffinement dans les lemmes de zéros a été introduit par Amoroso et David pour démontrer une minoration fine du minimum essentiel des sous-variétés du tore multiplicatif. Un analogue partiel de leur minoration a été démontré dans le cadre des variétés abélienne en utilisant le résultat principal de cet article (voir [Gal08]).

2 Définitions et résultats préliminaires

Avant d'énoncer le théorème, il est utile de rappeler un certain nombre de définitions. On note $\mathfrak{g}$ l'idéal de définition (premier, homogène) de l'adhérence de Zariski $\overline{\mathbf{G}}$ de $\mathbf{G}$ dans $\mathbb{P}^n$ et :

$$\mathfrak{A} := \mathbf{k}[X_0, \ldots, X_n]/\mathfrak{g}.$$

On dira qu'une sous-variété V de $\mathbf{G}$ est *définie* dans $\mathbf{G}$ par un premier $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{A}$ si $V = \mathbf{G} \cap Z(\mathfrak{p})$. On dira aussi qu'elle est *incomplètement définie* dans $\mathbf{G}$ par des formes de degré au plus L si V est une composante irréductible d'un fermé $\mathbf{G} \cap Z(\mathfrak{I})$, où $\mathfrak{I}$ est un idéal de $\mathfrak{A}$ engendré par des polynômes de degré au plus L (voir [Phi86], définitions 3.5).

Soit $U := \sum_{i=1}^{k} [n_i] X_i$ et $V := \sum_{i=1}^{k} [m_i] X_i$ deux cycles algébriques sur $\mathbf{G}$ (quitte à rajouter des zéros, on peut supposer que la somme porte sur les mêmes composantes). On définit la *réunion* de U et de V, notée $U \cup V$, comme étant le cycle :

$$\sum_{i=1}^{k} [\max\{n_i, m_i\}] X_i.$$

Le *degré* du cycle $\sum_{i=1}^{k} [n_i] X_i$ est par définition : $\sum_{i=1}^{k} n_i \deg(X_i)$.

Soit $x \in \mathbf{G}$ défini par un idéal $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{A}$. On pose $\mathfrak{A}_\mathfrak{m}$ le localisé homogène de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{m}$ et $\widehat{\mathfrak{A}}_\mathfrak{m}$ son complété pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. On sait (*cf.* [Bou83], 8, §5) que $\widehat{\mathfrak{A}}_\mathfrak{m}$ est isomorphe à $\mathfrak{B} := \mathbf{k}[[T_1, \ldots, T_g]] = \mathbf{k}[[\mathbf{T}]]$. De plus, la donnée d'un tel isomorphisme Φ_0 en $x = 0$ (défini par un idéal $\mathfrak{m}_0$) détermine par translation un isomorphisme Φ_x pour tout $x \in \mathbf{G}$.

On fixe $x \in \mathbf{G}$. L'isomorphisme Φ_x permet de munir l'espace des opérateurs différentiels $\mathrm{Hom}_\mathbf{k}(\widehat{\mathfrak{A}}_\mathfrak{m}, \mathbf{k})$ de la base $(\partial^\kappa_{\Phi_x})_{\kappa \in \mathbb{N}^g}$, où : $\partial^\kappa_{\Phi_x} := \frac{1}{\kappa!} \frac{\partial^{|\kappa|}}{\partial \mathbf{T}^\kappa}$, avec :

$$|\kappa| := \sum_{i=1}^{g} \kappa_i \quad \text{ et : } \quad \kappa! := \kappa_1! \cdots \kappa_g!$$

Pour $1 \leq i \leq g$, on note $\epsilon_i := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 1)$, le 1 étant sur la i-ème coordonnée. Les $(\partial^{\epsilon_i}_{\Phi_x})_{1 \leq i \leq g}$ forment alors une base du tangent $\mathrm{Hom}_\mathbf{k}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, \mathbf{k})$ de $\mathbf{G}$ en x.

Si $F \in \mathfrak{A}$ est une forme homogène de degré D non nulle en x, pour toute forme homogène $P \in \mathfrak{A}$ de degré D, on note $P_{x,F}$ l'image de $\frac{P}{F}$ dans $\hat{\mathfrak{A}}_\mathfrak{m}$.

Définition 1 *Soit $P \in \mathfrak{A}$ une forme homogène de degré D et $T \geq 1$ un entier. On dit que P s'annule à un ordre au moins T en x si pour toute forme $F \in \mathfrak{A}$, de degré D, non nulle en x, on a :*

$$\forall \kappa \in \mathbb{N}^g, |\kappa| \leq T - 1 : \quad \partial^\kappa_{\Phi_x} P_{x,F} = 0.$$

2.1 Dessous d'escalier et ensembles pondérés

On reprend ici le formalisme des dessous d'escaliers développé par Philippon dans [Phi96], 2. Ce formalisme permet classiquement d'intégrer la multiplicité dans un lemme de zéros, en travaillant avec des ensembles de points de $\mathbf{G}$ pondérés par des sous-ensembles de $\mathbb{N}^g$.

Soit $d \geq 1$ et $1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq g$. On appelle *$d$-face* d'indice $\mathbf{i} := (i_1, \ldots, i_d)$ le sous-ensemble $F_\mathbf{i} := \mathbb{N} \cdot \epsilon_{i_1} + \cdots + \mathbb{N} \cdot \epsilon_{i_d}$ de $\mathbb{N}^g$.

On dit qu'un ensemble $E \subset \mathbb{N}^g$ est un *escalier* si pour tout $\kappa \in E$, on a : $\kappa + \mathbb{N}^g \subset E$. Le complémentaire dans $\mathbb{N}^g$ d'un escalier est appelé *dessous d'escalier*. Si W est un dessous d'escalier, on note aussi $\mathfrak{I}_W$ l'idéal de $\mathfrak{B}$ engendré par les monômes $(T^\beta)_{\beta \in \mathbb{N}^g \setminus W}$.

On appelle *ensemble pondéré* un sous-ensemble Σ de $\mathbb{N}^g \times \mathbf{G}$ tel que pour tout $x \in \mathbf{G}$, l'ensemble $W_{x,\Sigma} := \{\kappa \in \mathbb{N}^g, \text{ t.q. } (\kappa, x) \in \Sigma\}$ est un dessous d'escalier (on notera encore W_x ce dessous d'escalier lorsqu'il n'y aura pas d'ambigüité sur Σ). Le *support* d'un ensemble pondéré Σ, noté $\mathrm{Supp}(\Sigma)$, est sa projection sur $\mathbf{G}$. La *somme* de deux ensembles pondérés Σ et Σ', notée $\Sigma + \Sigma'$, est l'ensemble pondéré :

$$\{(\kappa + \kappa', x + x'), (\kappa, x) \in \Sigma, (\kappa', x') \in \Sigma'\}.$$

On identifie aussi un sous-ensemble X de $\mathbf{G}$ à l'ensemble pondéré $\{0\} \times X$. Si $P \in \mathfrak{A}$ est une forme de degré D et Σ est un ensemble pondéré, on dit que P est nulle sur Σ si :

$$\forall (\kappa, x) \in \Sigma, \ \forall F \text{ de degré } D \text{ non nulle en } x \ : \ \partial^{\kappa}_{\Phi_x} P_{x,F} = 0.$$

Si $F_{\mathbf{i}}$ est une d-face, et W un dessous d'escalier, on note $C_{\mathbf{i}}(W)$ l'enveloppe convexe de $(\mathbb{N}^g \setminus F_{\mathbf{i}}) \cap W$ dans $\mathbb{R}^d_+$. Si V est une sous-variété de $\mathbf{G}$ de codimension d, associée à un idéal premier $\mathfrak{p}$, et si W est un dessous d'escalier, on note :

$$m_W(V) := d! \max_{\mathbf{i},x} \left\{ \mathrm{Vol}\left(\mathbb{R}^d_+ \setminus C_{\mathbf{i}}(W)\right)\right\},$$

où le maximum porte sur les indices $\mathbf{i}$ associés à une d-face $F_{\mathbf{i}}$, et les points $x \in V$ (définis par un idéal $\mathfrak{m}$) tels que les dérivations $\partial^{\epsilon_{i_1}}_{\Phi_x}, \ldots, \partial^{\epsilon_{i_d}}_{\Phi_x}$ se projettent sur une base de l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathfrak{p}/\mathfrak{p} \cap \mathfrak{m}^2, \mathbf{k})$, qui est le *cotangent* de V en x.

On peut comparer naturellement la multiplicité $m_W(V)$ à la multiplicité de Samuel, définie sur les idéaux de la façon suivante (voir [Bou83], chapitre 8, §7.1) :

Définition 2 *Soit A un anneau local, noethérien, de dimension d et $\mathfrak{p}$ son idéal maximal. En notant ψ la longueur sur les modules, on pose :*

$$e_{\mathfrak{p}}(A) := d! \lim_{l \to \infty} \frac{\psi(A/\mathfrak{p}^l A)}{l^d}.$$

On a alors le lemme (lemme 7 de [Phi96]) :

Lemme 1 *Soit $\mathfrak{I}$ un idéal homogène de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{p}$ un idéal minimal associé à $\mathfrak{I}$, définissant une sous-variété V de $\mathbf{G}$ et W un dessous d'escalier fini de $\mathbb{N}^g$. Si $\Delta^W_{\Phi_0}(\mathfrak{I}) \subset \mathfrak{p}$, on a :*

$$e_{\mathfrak{I}\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}) \geq m_W(V).$$

2.2 Ensembles pondérés et idéaux

On aura besoin, pour prouver le théorème de zéros, de faire agir des ensembles pondérés sur des idéaux homogènes, via des opérateurs différentiels qu'on définit dans ce paragraphe.

On suppose désormais qu'il existe un entier $c \geq 1$ tel qu'on peut trouver un entier $c' \geq 1$, un recouvrement ouvert $(U_\alpha)_\alpha$ et des formes bi-homogènes $(F_\alpha)_\alpha$ définies sur $\mathbf{k}$ et de degré (c, c') représentant l'addition :

$$s : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \to \mathbf{G}.$$

Toutes ces données sont fixées pour la suite de l'article. On sait d'après [Lan87] qu'un tel c existe, et qu'on peut prendre $(c, c') = (2, 2)$ si l'adhérence de Zariski $\overline{\mathbf{G}}$ est projectivement normale et équivariante.

Soit $x \in \mathbf{G}$ et soit $(F_{\alpha,0}, \ldots, F_{\alpha,n})$ une famille de polynômes bi-homogènes représentant l'addition au voisinage de $(0, x) \in \mathbf{G} \times \mathbf{G}$. On note :

$$s^* : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A} \otimes_{\mathbf{k}} \widehat{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{m}},$$

le morphisme induit sur les algèbres. Soit $P \in \mathfrak{A}$, et $\kappa \in \mathbb{N}^g$. On pose alors $\Delta^{\kappa}_{\Phi_x} P$ le coefficient dans $\mathfrak{A}$ du monôme $\mathbf{T}^{\kappa}$ de $(1 \otimes \Phi_x) \circ s^*(P) \in \mathfrak{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathfrak{B}$. Ce polynôme dépend du choix de la famille $(F_{\alpha,i})_{0 \leq i \leq n}$, mais pas son hypersurface d'annulation. En particulier, P s'annule sur un ensemble pondéré Σ si et seulement si :

$$\forall (x, \kappa) \in \Sigma, \text{ on a : } \Delta^{\kappa}_{\Phi_x} P \in \mathfrak{m}_0.$$

Les relations suivantes sont immédiates :

$$\begin{aligned} \Delta^{\kappa}_{\Phi_x}(P+Q) &= \Delta^{\kappa}_{\Phi_x}P + \Delta^{\kappa}_{\Phi_x}Q, \\ \Delta^{\kappa}_{\Phi_x}(PQ) &= \sum_{\kappa'+\kappa''=\kappa} \Delta^{\kappa'}_{\Phi_x}P \cdot \Delta^{\kappa''}_{\Phi_x}Q, \end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbf{G}$, $(P,Q) \in \mathfrak{A}$, $\kappa \in \mathbb{N}^g$.

On définit maintenant :

Définition 3 *Soit $\mathfrak{I}$ un idéal homogène de $\mathfrak{A}$ et W un dessous d'escalier de $\mathbb{N}^g$. On pose :*

$$\Delta^{W}_{\Phi_x}(\mathfrak{I}) := \Big(\Delta^{\kappa}_{\Phi_x}(P), P \in \mathfrak{I}, \kappa \in W\Big),$$

et si Σ est un ensemble pondéré :

$$\Delta^{\Sigma}(\mathfrak{I}) := \Big(\Delta^{W_{x,\Sigma}}_{\Phi_x}(\mathfrak{I}),\ x \in \mathrm{Supp}(\Sigma)\Big).$$

On dit que $\mathfrak{I}$ s'annule sur Σ si $\Delta^{\Sigma}(\mathfrak{I}) \subset \mathfrak{m}_0$.

On a alors les propriétés :

Proposition 2 *Soit W et W' deux dessous d'escalier de $\mathbb{N}^g$, $(x,x') \in \boldsymbol{G}^2$, $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{J}$ deux idéaux homogènes de $\mathfrak{A}$.*

- *(1) On a : $\Delta^{W}_{\Phi_x}(\mathfrak{I}+\mathfrak{J}) = \Delta^{W}_{\Phi_x}(\mathfrak{I}) + \Delta^{W}_{\Phi_x}(\mathfrak{J})$. Et si $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{J}$: $\Delta^{W}_{\Phi_x}(\mathfrak{I}) \subset \Delta^{W}_{\Phi_x}(\mathfrak{J})$.*
- *(2) On a : $\Delta^{0}_{\Phi_0}(\mathfrak{I}) = \mathfrak{I}$ et $\Delta^{0}_{\Phi_x}(\mathfrak{I}) = \tau^*_x(\mathfrak{I})$, où τ^*_x désigne la translation par x sur l'algèbre $\mathfrak{A}$.*
- *(3) L'idéal $\Delta^{W}_{\Phi_x}$ ne dépend pas du choix du recouvrement ouvert et des formes bi-homogènes représentant l'addition sur ce recouvrement. De plus :*

$$\Delta^{W}_{\Phi_x} \circ \Delta^{W'}_{\Phi_{x'}}(\mathfrak{I}) = \Delta^{W+W'}_{\Phi_{x+x'}}(\mathfrak{I}).$$

Preuve

Pour les points (1), (2), et la première assertion de (3), voir la preuve de la Proposition 3 de [Phi96], où l'hypothèse que les dessous d'escalier sont finis n'est pas utilisée. L'égalité du point (3) est démontrée dans cette même référence si l'un des dessous d'escalier est trivial, et plus généralement dans [DH00] (4.5, (iv)).

□

3 Le théorème de zéros et sa démonstration

3.1 Le théorème principal

On peut maintenant énoncer le principal résultat de cet article.

Théorème 3 *Soit V une sous-variété algébrique de $\boldsymbol{G}$ de codimension $d \geq 1$ et soient $s_0, \ldots, s_d$ des entiers strictement positifs. Pour $0 \leq i \leq d$, soit Σ_i un ensemble pondéré tel que, pour tout $x \in \mathrm{Supp}(\Sigma_i)$, W_{x,Σ_i} est fini et ne dépend pas de x. On suppose que :*

$$\Sigma_i = \Gamma_{i,1} \cup \cdots \cup \Gamma_{i,s_i},$$

pour des ensembles pondérés $\Gamma_{i,j}$ $(1 \leq j \leq s_i)$ à support contenant l'origine de $\boldsymbol{G}$. Pour tout $1 \leq j \leq s_i$, fixons un sous-groupe $H_{i,j}$ de $\mathrm{Stab}\big(\mathrm{Supp}(\Gamma_{i,j})\big)$. Soit enfin $P \in \mathfrak{A}$ non trivial, s'annulant sur l'ensemble pondéré :

$$V + \Sigma_0 + \cdots + \Sigma_d.$$

Il existe alors :

- *Des entiers $1 \leq k \leq k' \leq d$;*

– *Des indices* $j_0, \dots, j_{k'-1}$ *tels que,* $\forall\ 0 \le i \le k'-1 :\quad 1 \le j_i \le s_i$ *;*
– *Des sous-variétés algébriques* Z_j *de* $\mathbf{G}$*, pour* $1 \le j \le s_{k'}$*, propres, irréductibles, de codimension* k*, telles que :*

$$\deg\left(\bigcup_{x \in H_{0,j_0}+\cdots+H_{k'-1,j_{k'-1}}} \ \bigcup_{1 \le j \le s_{k'}} \ \bigcup_{y \in \Gamma_{k',j}} [m_{W_y}(x+y+Z_j)]\big(x+y+Z_j\big)\right) \le c^g \deg(\boldsymbol{G}) \cdot L^k.$$

De plus, chaque variété Z_j*, pour* $1 \le j \le s_{k'}$*, est incomplètement définie dans* $\mathbf{G}$ *par des formes de degré au plus* cL *et contient au moins une composante isolée du fermé :*

$$\mathrm{Supp}\left(V + H_{1,j_1} + \cdots + H_{k'-1,j_{k'-1}} + \Sigma_{k'} + \cdots + \Sigma_d\right).$$

Remarques
(i) Ce théorème implique le théorème 2 de [Phi96]. Il suffit de prendre ici tous les s_i égaux à 1 et les sous-groupes $H_{i,1}$ égaux à $\{0\}$ (pour $0 \le i \le d$). Notre théorème affirme alors l'existence d'une unique variété obstructrice qui vérifie la formule donnée dans le théorème 2 de [Phi96] (la variété obstructrice étant notée V dans cette référence). C'est notamment pour cela qu'on n'a pas directement écrit les $\mathrm{Supp}(\Sigma_i)$ comme des réunions de sous-groupes.
(ii) Ce théorème implique aussi le théorème 4.2 de [AD03], en considérant la compactification standard de $\mathbb{G}_m^n$, en prenant $c = 1$ et tous les supports des $\Gamma_{i,j}$ égaux à des sous-groupes $H_{i,j}$ de $\mathbb{G}_m^n$. Outre la généralité du groupe algébrique $\mathbf{G}$, la principale nouveauté de ce théorème, en comparaison du théorème 4.2 de [AD03], est la prise en compte des multiplicités.

3.2 Démonstration du théorème 3

Passons à la preuve du théorème proprement dite. L'idée, classique, consiste à considérer de gros ensembles algébriques construits en intersectant des translatés de l'hypersurface définie par P, avec multiplicité. On construit ainsi une suites de fermés emboîtés, et on s'assure que deux fermés successifs ont même dimension. On peut alors comparer les degrés de ces deux fermés (en même dimension), ce qui achève de prouver le théorème 3.

Soit maintenant V une sous-variété de $\mathbf{G}$ de codimension d, des ensembles pondérés $\Sigma_0, \dots, \Sigma_d$ tels que dans le théorème, et un polynôme homogène P de degré L, non trivial, et qui s'annule sur $V + \Sigma_0 + \cdots + \Sigma_d$.

Pour pouvoir travailler avec des ensembles algébriques, et en particulier ne retenir que les composantes irréductibles pertinentes de tels ensembles, on aura besoin de la définition suivante :

Définition 4 *Soit* Z_1 *et* Z_2 *deux fermés algébriques inclus dans* $\boldsymbol{G}$*. On appelle trace de* Z_1 *relativement à* Z_2*, notée* $\mathrm{tr}(Z_1, Z_2)$*, la réunion des composantes isolées de* Z_1 *contenant au moins une composante isolée de* Z_2*.*

3.2.1 Construction des fermés emboîtés

Commençons par définir, pour $1 \le j \le s_0$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_{0,j} &:= \Delta^{\Gamma_{0,j}}(P), \\ X_{0,j} &:= Z(\mathfrak{I}_{0,j}), \\ Y_{0,j} &:= \mathrm{tr}\Big(X_{0,j},\ \mathrm{Supp}(V + H_{0,j} + \Sigma_1 + \cdots + \Sigma_d)\Big). \end{aligned}$$

On pose ensuite j_0 comme étant le plus petit entier $1 \le j \le s_0$ tel que la dimension de $Y_{0,j}$ soit minimale. On pose ensuite :

$$\mathfrak{I}_0 := \mathfrak{I}_{0,j_0}, \quad X_0 := X_{0,j_0}, \quad \text{et} \quad Y_0 := Y_{0,j_0}.$$

De la même façon, on définit, par récurrence sur $1 \leq i \leq d$, les ensembles suivants, où j varie entre 1 et s_i :

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_{i,j} &:= \Delta^{\Gamma_{i,j}}(\mathfrak{I}_{i-1}), \\ X_{i,j} &:= Z(\mathfrak{I}_{i,j}), \\ Y_{i,j} &:= \mathrm{tr}\Big(X_{i,j},\ \mathrm{Supp}(V + H_{0,j_0} + \cdots + H_{i-1,j_{i-1}} + H_{i,j} + \Sigma_{i+1} + \cdots + \Sigma_d)\Big). \end{aligned}$$

On choisit aussi l'entier j_i comme étant le plus petit entier $1 \leq j \leq s_i$ pour lequel la dimension de $Y_{i,j}$ est minimale, et l'on pose :

$$\mathfrak{I}_i := \mathfrak{I}_{i,j_i}, \quad X_i := X_{i,j_i}, \quad \text{et} \quad Y_i := Y_{i,j_i}.$$

Fait 1 *La suite de fermés ainsi construite vérifie les propriétés suivantes :*
- *(1) Pour tout* $0 \leq i \leq d$, *on a :* $Y_i \neq \emptyset$.
- *(2) Pour tout* $0 \leq i \leq d-1$, *on a l'inclusion :* $Y_{i+1} \subset Y_i$.
- *(3) On a l'inégalité :* $\mathrm{codim}(Y_d) \leq d$.

Preuve
Pour démontrer la propriété (1), on observe par une récurrence immédiate que, pour $0 \leq i \leq d$ et $1 \leq j \leq s_i$:

$$\mathfrak{I}_{i,j} = \Delta^{\Gamma_{0,j_0}+\cdots+\Gamma_{i-1,j_{i-1}}+\Gamma_{i,j}}(P).$$

Comme P s'annule sur $V + \Sigma_0 + \cdots + \Sigma_d$, on a donc l'inclusion :

$$\mathrm{Supp}(V + \Sigma_{i+1} + \cdots + \Sigma_d) \subset X_{i,j}.$$

Par définition de $Y_{i,j}$, on en déduit :

$$Y_{i,j} \supset \mathrm{tr}(X_{i,j},\ \mathrm{Supp}(V + \Sigma_{i+1} + \cdots + \Sigma_d)) \neq \emptyset.$$

En particulier, Y_i est non vide pour tout $0 \leq i \leq d$.

Pour démontrer le second point, fixons $0 \leq i \leq d-1$ et remarquons que pour tout $1 \leq j \leq s_{i+1}$, $\Gamma_{i+1,j}$ contient l'origine de $\mathbf{G}$. On en déduit les inclusions : $\mathfrak{I}_i \subset \mathfrak{I}_{i+1,j}$, puis pour $j = j_i$: $X_{i+1} \subset X_i$. On remarque enfin que la réunion de translatés de V intervenant dans la définition des $Y_{i,j}$ est décroissante avec i, et on obtient : $Y_{i+1} \subset Y_i$.

Enfin, le point (3) se déduit immédiatement du point (1) : si la variété Y_d est non vide, alors elle contient un translaté de V, et est de codimension inférieure à d.

□

Fait 2 *Il existe un indice* $1 \leq k' \leq d$ *tel que :* $\dim(Y_{k'-1}) = \dim(Y_{k'})$.

Preuve
On remarque que : $(P) \subset \mathfrak{I}_0$, donc que : $Y_0 \subset X_{0,j_0} \subset Z((P))$. Les Y_i forment donc une suite de $d+1$ fermés emboîtés de codimension comprise entre 1 et d, et il existe deux fermés successifs ayant même dimension.

□

L'entier k' du théorème est donc fixé, ainsi que les entiers $j_0, \ldots, j_{k'-1}$. On pose aussi

$$k := \mathrm{codim}(Y_{k'}).$$

On doit maintenant déterminer les variétés Z_j $(1 \leq j \leq s_{k'})$ dont l'existence est affirmée par le théorème.

3.2.2 Choix des variétés obstructrices

Le fermé $Y_{k'}$ étant de dimension minimale parmi les $Y_{k',j}$, et chacun de ces fermés étant inclus dans $Y_{k'-1}$, on en déduit l'égalité, pour tout $1 \leq j \leq s_{k'}$:

$$\dim(Y_{k',j}) = \dim(Y_{k'-1}),$$

et il existe une composante isolée commune à ces deux fermés. Pour tout $1 \leq j \leq s_{k'}$, on choisit une telle variété (de codimension k), et on note Z_j son intersection avec $\mathbf{G}$.

On est déjà en mesure de démontrer le dernier point du théorème. Fixons $1 \leq j \leq s_{k'}$. L'idéal $\mathfrak{I}_{k'-1}$ est engendré par des formes de degré au plus cL et la variété Z_j est une composante isolée de $\mathbf{G} \cap X_{k'-1}$, donc est incomplètement définie dans $\mathbf{G}$ par des formes de degré au plus cL. De plus, Z_j contient, par construction, une composante isolée du fermé :

$$\mathrm{Supp}\left(V + H_{1,j_1} + \cdots + H_{k'-1,j_{k'-1}} + \Sigma_{k'} + \cdots + \Sigma_d\right).$$

3.2.3 Comparaison des degrés

Il reste maintenant à établir l'inégalité du théorème. La prise en compte des multiplicités rend cette comparaison délicate. On procède en deux étapes. La première consiste à montrer que le fermé $Y_{k'-1}$ contient de nombreux translatés des Z_j. La seconde est de comparer le degré du cycle naturellement formé à partir de cette réunion (en introduisant les multiplicités liées aux dessous d'escaliers des Σ_i) à celui de la réunions des composantes de codimension k du fermé $Y_{k'-1}$.

On commence par remarquer que pour tout $1 \leq j \leq s_{k'}$ et pour tout $y \in \mathrm{Supp}(\Gamma_{k',j})$, la variété $y + Z_j$ est incluse dans $Y_{k'-1}$. En effet, par définition de $\mathfrak{I}_{k',j}$, on a :

$$\Delta^{\{0\}}_{\Phi_y}(\mathfrak{I}_{k'-1}) \subset \mathfrak{I}_{k',j}.$$

Comme $\mathfrak{I}_{k',j}$ est nul sur Z_j par construction, il suit que $\mathfrak{I}_{k'-1}$ est nul sur $y + Z_j$ (par la proposition 2, (2)). Soit maintenant une composante isolée V_j de :

$$\mathrm{Supp}\left(V + H_{1,j_1} + \cdots + H_{k'-1,j_{k'-1}} + \Sigma_{k'} + \cdots + \Sigma_d\right),$$

contenue dans Z_j (dont l'existence a été démontrée à la fin du paragraphe 3.2.2). Comme :

$$y + V_j \subset y + Z_j \quad \text{et} \quad y \in \mathrm{Supp}(\Gamma_{k',j}),$$

on a alors :

$$\begin{aligned} y + Z_j &\subset \mathrm{tr}\Big(X_{k'-1},\ \mathrm{Supp}(V + H_{0,j_0} + \cdots + H_{k'-1,j_{k'-1}} + H_{k',j} + \Sigma_{k'+1} + \cdots + \Sigma_d + \Gamma_{k',j})\Big) \\ &= \mathrm{tr}\Big(X_{k'-1},\ \mathrm{Supp}(V + H_{0,j_0} + \cdots + H_{k'-1,j_{k'-1}} + \Sigma_{k'} + \Sigma_{k'+1} + \cdots + \Sigma_d)\Big) \\ &= Y_{k'-1}, \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant du fait que $H_{k',j}$ stabilise $\mathrm{Supp}(\Gamma_{k',j})$. De plus, ces deux fermés ayant même dimension, la variété $y + Z_j$ est en fait une composante isolée de $Y_{k'-1}$.

L'étape suivante consiste à montrer que $H_{0,j_0} + \cdots + H_{k'-1,j_{k'-1}}$ stabilise $Y_{k'-1}$. Pour $0 \leq i \leq k'-1$, soit donc $x_i \in H_{i,j_i}$ et notons $x := x_0 + \cdots + x_{k'-1}$. Par la proposition 2, (2) et (3), on a :

$$\tau_x^*(\mathfrak{I}_{k'-1}) = \Delta^{\{0\}}_{\Phi_x} \circ \Delta^{\Gamma_{0,j_0} + \cdots + \Gamma_{i-1,j_{i-1}}}(P),$$

et puisque pour tout $0 \leq i \leq k'-1$, $x_i \in \mathrm{Stab}\big(\mathrm{Supp}(\Gamma_{i,j_i})\big)$, on a :

$$\tau_x^*(\mathfrak{I}_{k'-1}) = \mathfrak{I}_{k'-1}.$$

Le fermé $X_{k'-1}$ est donc stabilisé par $H_{0,j_0} + \cdots + H_{k'-1,j_{k'-1}}$, et il en va de même pour $Y_{k'-1}$ vue sa définition.

On en déduit que la réunion :

$$\bigcup_{x\in H_{0,j_0}+\cdots+H_{k'-1,j_{k'-1}}}\ \bigcup_{1\leq j\leq s_{k'}}\ \bigcup_{y\in\Gamma_{k',j}}(x+y+Z_j) \tag{1}$$

est formée de composantes isolées de $Y_{k'-1}$. Il s'agit maintenant, en utilisant cette information, de majorer le degré du cycle considéré dans le théorème 3.

Soit donc $1\leq j\leq s_{k'}$, $x\in H_{0,j_0}+\cdots+H_{k'-1,j_{k'-1}}$, et $y\in\mathrm{Supp}(\Gamma_{k',j})$. Notons $\mathfrak{p}$ l'idéal premier définissant $x+y+Z_j$. On a l'inclusion suivante entre idéaux :

$$\Delta_{\Phi_0}^{W_y}(\mathfrak{I}_{k'-1})\subset\tau^*_{-x-y}(\mathfrak{I}_{k',j})\subset\mathfrak{p}.$$

La première inclusion suit la définition de l'idéal $\mathfrak{I}_{k',j}$, en remarquant que x stabilise $X_{k'-1}$, et la seconde est directe vue la construction de Z_j. Toutes les conditions sont maintenant réunies pour appliquer le lemme 1 qui donne :

$$e_{\mathfrak{I}_{k'-1}\mathfrak{A}_\mathfrak{p}}(\mathfrak{A}_\mathfrak{p})\geq m_{W_y}(x+y+Z_j). \tag{2}$$

On peut désormais majorer le degré du cycle suivant :

$$Z:=\bigcup_{x\in H_{0,j_0}+\cdots+H_{k'-1,j_{k'-1}}}\ \bigcup_{1\leq j\leq s_{k'}}\ \bigcup_{y\in\Gamma_{k',j}}[m_{W_y}(x+y+Z_j)]\big(x+y+Z_j\big),$$

On a :

$$\begin{aligned}\deg(Z) &\leq \sum_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(\mathfrak{I}_{k'-1}),\mathrm{rg}(\mathfrak{p})=k} e_{\mathfrak{I}_{k'-1}\mathfrak{A}_\mathfrak{p}}(\mathfrak{A}_\mathfrak{p})\cdot\deg(\mathfrak{p})\\ &\leq \deg(\mathbf{G})\cdot(cL)^k.\end{aligned}$$

L'inégalité (2) et les définitions rappelées en 2 sur les cycles algébriques établissent en effet la première inégalité. La seconde est le lemme 5 de [Phi96], la réunion (1) étant incluse dans $X_{k'-1}$. Le théorème 3 est donc entièrement démontré.

□

3.3 Une remarque sur les variétés obstructrices

Pour conclure ce travail, donnons une dernière précision sur les variétés obstructrices. On peut en fait, au moins dans un cas standard, montrer que les formes qui les définissent ont une multiplicité. Précisons ce qu'on entend par là :

Définition 5 *Soit V une sous-variété de $\boldsymbol{G}$ et soient T,L deux entiers positifs. On dit que V est incomplètement définie dans $\boldsymbol{G}$ par des formes de degré $\leq L$, avec multiplicité $\geq T+1$, s'il existe des éléments $(q_1,\ldots,q_l)$ de $\mathfrak{A}$, tous de degrés $\leq L$, définissant un idéal $\mathfrak{I}$, tels que V soit une composante irréductible de $\boldsymbol{G}\cap Z(\Delta_{\Phi_0}^{W_T}(\mathfrak{I}))$, où W est le dessous d'escalier :*

$$W_T:=\{\kappa\in\mathbb{N}^g,|\kappa|\leq T\}.$$

On reprend les hypothèses du théorème 3, et on suppose en plus que $\Sigma_{k'}$ (où k' est donné par le théorème) est de la forme :

$$\Sigma_{k'}=\{\kappa\in\mathbb{N}^g,|\kappa|\leq T_{k'}\}\times\mathrm{Supp}(\Sigma_{k'}),$$

pour un entier positif $T_{k'}$. Dans ce cas :

Proposition 4 *Les variétés Z_j dont l'existence est donnée par le théorème 3 sont incomplètement définies dans $\boldsymbol{G}$ par des formes de degré $\leq cL$ avec multiplicité $\geq T_{k'}$.*

Preuve

Dans la preuve du théorème 3, on a construit les Z_j comme composantes de $\mathbf{G} \cap Z(\mathfrak{I}_{k'-1})$, où l'idéal $\mathfrak{I}_{k'-1}$ est engendré par des formes de degré au plus cL. De plus, par construction, pour $1 \leq j \leq s_{k'}$, la variété Z_j est une composante irréductible de $\mathbf{G} \cap X_{k',j} = \mathbf{G} \cap Z(\mathfrak{I}_{k',j})$. En particulier, si $\mathfrak{p}_j$ désigne l'idéal de définition de Z_j :

$$\Delta_{\Phi_0}^{W_{T_{k'}}}(\mathfrak{I}_{k'-1}) \subset \mathfrak{p}_j,$$

et Z_j est bien une composante irréductible de $\mathbf{G} \cap Z(\Delta_{\Phi_0}^{W_{T_{k'}}}(\mathfrak{I}_{k'-1}))$.

□

Références

[AD03] F. Amoroso et S. David : Minoration de la hauteur normalisée dans un tore. *J. Inst. Math. Jussieu*, 2(3):335–381, 2003.

[Bou83] N. Bourbaki : *Algèbre commutative.* Masson, Paris, 1983.

[DH00] S. David et M. Hindry : Minoration de la hauteur de Néron-Tate sur les variétés abéliennes de type C.M. *J. Reine Angew. Math.*, 529:1–74, 2000.

[Gal08] A. Galateau : Le problème de Bogomolov effectif sur les variétés abéliennes. *Prépublication*, 2008.

[Lan87] H. Lange : Families of translations of commutative algebraic groups. *Journal of algebra*, 109:260–265, 1987.

[Phi86] P. Philippon : Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs. *Bull. Soc. Math. France*, 114:353–383, 1986.

[Phi96] P. Philippon : Nouveaux lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs. *Rocky Mountain Math. Journal*, 26(3):1069–1088, 1996.