

Inégalités de Kato pour les problèmes de convection-diffusion scalaires

Boris Andreianov

Université de Franche-Comté, Besançon, France

basé sur les travaux en collaboration avec

Nathaël Alibaud, Fouzia Bouhsiss, Mohamed Gazibo Karimou,
Noureddine Igbida, Kenneth H. Karlsen, Mohamed Maliki,
Darko Mitrović, Adama Ouédraogo, Nils H. Risebro, Karima Sbihi

- 1 **Inégalité(s) de Kato et leurs conséquences**
- 2 **Comment obtenir l'inégalité de Kato (ça se mérite)**
 - Cas parabolique
 - Cas hyperbolique, parabolique dégénéré, fractionnaire
 - L'inégalité de Kato, ça s'hérite !
- 3 **Comment exploiter l'inégalité de Kato dans \mathbb{R}^N**
 - Cas hyperbolique, parabolique dégénéré, fractionnaire I
 - Cas elliptique quasi-linéaire
 - Cas hyperbolique, parabolique dégénéré, fractionnaire II
 - Diffusion non linéaire ? Dégénérescence elliptique ?
- 4 **Comment exploiter l'inégalité de Kato en domaine borné**
 - Le cadre général des conditions aux limites dissipatives.
 - Conditions de couplage d'interface (CCI) dissipatives
 - CB et CCI dissipatives dans le cas hyperbolique.
 - CB Dirichlet dans le cas parabolique dégénéré.
Trace-régularité.
 - Cas des CB Neumann (flux zéro).
Inégalités de Kato globales (jusqu'au bord).

Inégalité(s) de Kato et ses conséquences

L'inégalité classique dite "de Kato".

Inégalité de [Kato'72] . Soit Ω un domaine ouvert de \mathbb{R}^N .

Soit $W \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que $-\Delta W \in L^1_{loc}(\Omega)$. Alors

$$-\Delta |W| \leq \text{sign}(W)(-\Delta W) \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Preuve : cas général, par approximation de W .

Cas de W au moins H^1_{loc} , par approx. de $\text{sign}(\cdot)$. Moralement : l'inégalité vient de $-\Delta |W| = \text{sign}(W)(-\Delta W) + \delta_0(W) |\nabla W|^2$.

Généralisation ([Brézis '84]) : Avec les mêmes hypothèses sur W , soit $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante (sens large), Lipschitz, C^1 /morceaux. On a

$$-\Delta S(W) \leq S'(W)(-\Delta W) \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Variante "diffusion quasilineaire" (façon [Blanchard, Porretta'05]) :

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, croissante (au sens large) .

Soit $u, w, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ vérifiant $w = \varphi(u)$ et $u - \Delta w = g$;

idem, $\hat{u}, \hat{w}, \hat{g} \in L^1_{loc}(\Omega)$ vérifiant $\hat{w} = \varphi(\hat{u})$ et $\hat{u} - \Delta \hat{w} = \hat{g}$. Alors

$$(u - \hat{u})^+ - \Delta(w - \hat{w})^+ \leq \text{sign}^+(u - \hat{u})(g - \hat{g}) \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

L'inégalité classique dite "de Kato".

Inégalité de [Kato'72] . Soit Ω un domaine ouvert de \mathbb{R}^N .

Soit $W \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que $-\Delta W \in L^1_{loc}(\Omega)$. Alors

$$-\Delta|W| \leq \text{sign}(W)(-\Delta W) \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Preuve : cas général, par approximation de W .

Cas de W au moins H^1_{loc} , par approx. de $\text{sign}(\cdot)$. Moralement : l'inégalité vient de $-\Delta|W| = \text{sign}(W)(-\Delta W) + \delta_0(W)|\nabla W|^2$.

Généralisation ([Brézis '84]) : Avec les mêmes hypothèses sur W , soit $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante (sens large), Lipschitz, C^1 /morceaux. On a

$$-\Delta S(W) \leq S'(W)(-\Delta W) \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Variante "diffusion quasilineaire" (façon [Blanchard, Porretta'05]) :

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, croissante (au sens large) .

Soit $u, w, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ vérifiant $w = \varphi(u)$ et $u - \Delta w = g$;

idem, $\hat{u}, \hat{w}, \hat{g} \in L^1_{loc}(\Omega)$ vérifiant $\hat{w} = \varphi(\hat{u})$ et $\hat{u} - \Delta \hat{w} = \hat{g}$. Alors

$$(u - \hat{u})^+ - \Delta(w - \hat{w})^+ \leq \text{sign}^+(u - \hat{u})(g - \hat{g}) \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

L'inégalité classique dite "de Kato".

Inégalité de [Kato'72] . Soit Ω un domaine ouvert de \mathbb{R}^N .

Soit $W \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que $-\Delta W \in L^1_{loc}(\Omega)$. Alors

$$-\Delta|W| \leq \text{sign}(W)(-\Delta W) \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Preuve : cas général, par approximation de W .

Cas de W au moins H^1_{loc} , par approx. de $\text{sign}(\cdot)$. Moralement : l'inégalité vient de $-\Delta|W| = \text{sign}(W)(-\Delta W) + \delta_0(W)|\nabla W|^2$.

Généralisation ([Brézis '84]) : Avec les mêmes hypothèses sur W , soit $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante (sens large), Lipschitz, C^1 /morceaux. On a

$$-\Delta S(W) \leq S'(W)(-\Delta W) \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Variante "diffusion quasilineaire" (façon [Blanchard, Porretta'05]) :

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, croissante (au sens large) .

Soit $u, w, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ vérifiant $w = \varphi(u)$ et $u - \Delta w = g$;

idem, $\hat{u}, \hat{w}, \hat{g} \in L^1_{loc}(\Omega)$ vérifiant $\hat{w} = \varphi(\hat{u})$ et $\hat{u} - \Delta \hat{w} = \hat{g}$. Alors

$$(u - \hat{u})^+ - \Delta(w - \hat{w})^+ \leq \text{sign}^+(u - \hat{u})(g - \hat{g}) \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

“Inégalités de Kato” pour les équations de convection-diffusion

Forme typique des équations considérées :

$$u_t + \operatorname{div} F[u] = 0 \text{ dans } (0, T) \times \Omega, \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$$

où le flux F est donné en fonction de u par l'expression

$$F[u] = f(u) - \nabla \varphi(u),$$

f continue (au moins), φ continue, croissante au sens large.

Inégalité de Kato :

$$|u - \hat{u}|_t + \operatorname{div} \operatorname{sign}(u - \hat{u})(F[u] - F[\hat{u}]) \leq 0 \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \Omega).$$

Variante stationnaire: $u + \operatorname{div} F[u] = g$ dans $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$.

Inégalité de Kato :

$$|u - \hat{u}| + \operatorname{div} \operatorname{sign}(u - \hat{u})(F[u] - F[\hat{u}]) \leq \operatorname{sign}(u - \hat{u})(g - \hat{g}) \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Variante “diffusion fractionnaire”: $u_t + \operatorname{div} f(u) + (-\Delta)^{\alpha/2}[\varphi(u)] = 0$.

Inégalité de Kato ([Alibaud'07]) :

$$|u - \hat{u}|_t + \operatorname{div} \operatorname{sign}(u - \hat{u})(f(u) - f(\hat{u})) + (-\Delta)^{\alpha/2}[|\varphi(u) - \varphi(\hat{u})|] \leq 0 \text{ dans } \mathcal{D}'.$$

“Inégalités de Kato” pour les équations de convection-diffusion

Forme typique des équations considérées :

$$u_t + \operatorname{div} F[u] = 0 \text{ dans } (0, T) \times \Omega, \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$$

où le flux F est donné en fonction de u par l'expression

$$F[u] = f(u) - \nabla \varphi(u),$$

f continue (au moins), φ continue, croissante au sens large.

Inégalité de Kato :

$$|u - \hat{u}|_t + \operatorname{div} \operatorname{sign}(u - \hat{u})(F[u] - F[\hat{u}]) \leq 0 \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \Omega).$$

Variante stationnaire: $u + \operatorname{div} F[u] = g$ dans $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$.

Inégalité de Kato :

$$|u - \hat{u}| + \operatorname{div} \operatorname{sign}(u - \hat{u})(F[u] - F[\hat{u}]) \leq \operatorname{sign}(u - \hat{u})(g - \hat{g}) \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Variante “diffusion fractionnaire”: $u_t + \operatorname{div} f(u) + (-\Delta)^{\alpha/2}[\varphi(u)] = 0$.

Inégalité de Kato ([Alibaud'07]) :

$$|u - \hat{u}|_t + \operatorname{div} \operatorname{sign}(u - \hat{u})(f(u) - f(\hat{u})) + (-\Delta)^{\alpha/2} [|\varphi(u) - \varphi(\hat{u})|] \leq 0 \text{ dans } \mathcal{D}'.$$

“Inégalités de Kato” pour les équations de convection-diffusion

Forme typique des équations considérées :

$$u_t + \operatorname{div} F[u] = 0 \text{ dans } (0, T) \times \Omega, \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$$

où le flux F est donné en fonction de u par l'expression

$$F[u] = f(u) - \nabla \varphi(u),$$

f continue (au moins), φ continue, croissante au sens large.

Inégalité de Kato :

$$|u - \hat{u}|_t + \operatorname{div} \operatorname{sign}(u - \hat{u})(F[u] - F[\hat{u}]) \leq 0 \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \Omega).$$

Variante stationnaire: $u + \operatorname{div} F[u] = g$ dans $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$.

Inégalité de Kato :

$$|u - \hat{u}| + \operatorname{div} \operatorname{sign}(u - \hat{u})(F[u] - F[\hat{u}]) \leq \operatorname{sign}(u - \hat{u})(g - \hat{g}) \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Variante “diffusion fractionnaire”: $u_t + \operatorname{div} f(u) + (-\Delta)^{\alpha/2}[\varphi(u)] = 0$.

Inégalité de Kato ([Alibaud'07]) :

$$|u - \hat{u}|_t + \operatorname{div} \operatorname{sign}(u - \hat{u})(f(u) - f(\hat{u})) + (-\Delta)^{\alpha/2} [|\varphi(u) - \varphi(\hat{u})|] \leq 0 \text{ dans } \mathcal{D}'.$$

Conséquences de l'inégalité de Kato

Le caractère bien posé pour ces équations découle en grande partie des inégalités de Kato. Pour le cas stationnaire :

l'inégalité de Kato "intégrée sur Ω " (NB: pas toujours possible !)
 \Rightarrow **Ok l'unicité, la dépendance continue L^1 , la comparaison.**

Unicité On veut prendre la fonction test $\xi = \mathbf{1}_\Omega$ à la place de $\xi \in \mathcal{D}'(\Omega)$.
 Parfois impossible (cadre L^1_{loc} de [Brézis'84]), souvent délicat.
 Alors on cherche à s'accommoder de $(\xi_n)_n$ suite bien choisie.

Ordre $S(r) = r^+$ à la place de $S(r) = |r| \Rightarrow$ principe de comparaison.

Existence Principe de comparaison

+ \exists pour sous-ensemble dense de données + bornes uniformes
 (bornes L^1 , \exists de sur- et sous- solutions explicites, etc.)
 \Rightarrow^1 existence (avec les arguments de convergence monotone).

Dépendance continue Principe de comparaison + \exists sur- et sous- solutions L^1_{loc}
 \Rightarrow stabilité L^1_{loc} des sol. p/rapport aux données
 (avec les arguments de lim inf-lim sup).

¹Plus délicat pour les problèmes à dégénérescence hyperbolique

Conséquences de l'inégalité de Kato

Le caractère bien posé pour ces équations découle en grande partie des inégalités de Kato. Pour le cas stationnaire :

l'inégalité de Kato "intégrée sur Ω " (NB: pas toujours possible !)
 \Rightarrow **Ok l'unicité, la dépendance continue L^1 , la comparaison.**

Unicité On veut prendre la fonction test $\xi = \mathbf{1}_\Omega$ à la place de $\xi \in \mathcal{D}'(\Omega)$.
 Parfois impossible (cadre L^1_{loc} de [Brézis'84]), souvent délicat.
 Alors on cherche à s'accommoder de $(\xi_n)_n$ suite bien choisie.

Ordre $S(r) = r^+$ à la place de $S(r) = |r| \Rightarrow$ **principe de comparaison.**

Existence Principe de comparaison

+ \exists pour sous-ensemble dense de données + bornes uniformes
 (bornes L^1 , \exists de sur- et sous- solutions explicites, etc.)
 \Rightarrow^1 existence (avec les arguments de convergence monotone).

Dépendance continue Principe de comparaison + \exists sur- et sous- solutions L^1_{loc}
 \Rightarrow stabilité L^1_{loc} des sol. p/rapport aux données
 (avec les arguments de lim inf-lim sup).

¹Plus délicat pour les problèmes à dégénérescence hyperbolique

Conséquences de l'inégalité de Kato

Le caractère bien posé pour ces équations découle en grande partie des inégalités de Kato. Pour le cas stationnaire :

l'inégalité de Kato "intégrée sur Ω " (NB: pas toujours possible !)
 \Rightarrow **Ok l'unicité, la dépendance continue L^1 , la comparaison.**

Unicité On veut prendre la fonction test $\xi = \mathbf{1}_\Omega$ à la place de $\xi \in \mathcal{D}'(\Omega)$.
 Parfois impossible (cadre L^1_{loc} de [Brézis'84]), souvent délicat.
 Alors on cherche à s'accommoder de $(\xi_n)_n$ suite bien choisie.

Ordre $S(r) = r^+$ à la place de $S(r) = |r| \Rightarrow$ **principe de comparaison.**

Existence Principe de comparaison

+ \exists pour sous-ensemble dense de données + bornes uniformes
 (bornes L^1 , \exists de sur- et sous- solutions explicites, etc.)
 \Rightarrow^1 **existence** (avec les arguments de convergence monotone).

Dépendance continue Principe de comparaison + \exists sur- et sous- solutions L^1_{loc}
 \Rightarrow stabilité L^1_{loc} des sol. p/rapport aux données
 (avec les arguments de lim inf-lim sup).

¹Plus délicat pour les problèmes à dégénérescence hyperbolique

Conséquences de l'inégalité de Kato

Le caractère bien posé pour ces équations découle en grande partie des inégalités de Kato. Pour le cas stationnaire :

l'inégalité de Kato "intégrée sur Ω " (NB: pas toujours possible !)
 \Rightarrow **Ok l'unicité, la dépendance continue L^1 , la comparaison.**

Unicité On veut prendre la fonction test $\xi = \mathbf{1}_\Omega$ à la place de $\xi \in \mathcal{D}'(\Omega)$.
 Parfois impossible (cadre L^1_{loc} de [Brézis'84]), souvent délicat.
 Alors on cherche à s'accommoder de $(\xi_n)_n$ suite bien choisie.

Ordre $S(r) = r^+$ à la place de $S(r) = |r| \Rightarrow$ **principe de comparaison.**

Existence Principe de comparaison

+ \exists pour sous-ensemble dense de données + bornes uniformes
 (bornes L^1 , \exists de sur- et sous- solutions explicites, etc.)
 \Rightarrow^1 **existence** (avec les arguments de convergence monotone).

Dépendance continue Principe de comparaison + \exists sur- et sous- solutions L^1_{loc}
 \Rightarrow **stabilité L^1_{loc} des sol. p/rapport aux données**
 (avec les arguments de lim inf-lim sup).

¹Plus délicat pour les problèmes à dégénérescence hyperbolique

Obtenir l'inégalité de Kato

Obtenir IK dans le cas avec diffusion non dégénérée

Éq. type : $u_t + \operatorname{div} f(u) - \Delta w = 0$, $w = \varphi(u)$, φ strictement croissante

Cadre : solutions faibles ($H_{loc}^1(\Omega)$) ou très faibles ($L_{loc}^1(\Omega)$)

Principe pour obtenir IK : multiplier par $\operatorname{sign}_\alpha(w - \hat{w})$, $\alpha \rightarrow 0$.

- Marche pour pb. stationnaire ou solutions telles que $u_t \in L_{loc}^1$, à condition que f soit Lipschitz ou au moins Hölder d'ordre 1/2.
- Si u_t est une distribution, **dédoublément de variables en temps** ([Otto'96]) : considérer $\hat{w} = \hat{w}(s, x)$ et des fonctions test en (t, s, x) à support qui se concentre sur $t = s$
- Si f n'est pas assez régulière, aussi le **dédoublément en espace**
- Variante : si l'on remplace la diffusion Δw par le " **$p(u)$ -laplacien**" $\operatorname{div} |\nabla w|^{p(u)-2} \nabla w$, on peut obtenir l'IK lorsque l'une des deux solutions est "régulière" (ici, \hat{u} telle que $\nabla \hat{u} \in L^\infty$)
 ⇒ idée de famille "dense" de solutions "régulières" [A., Bouhsiss'04]
- Variante : si $f \circ \varphi^{-1} \in C$, φ croissante au sens large, on obtient IK en multipliant par $\operatorname{sign}_\alpha(w - \hat{w} + \alpha\pi)$, $\pi \approx \operatorname{sign}(u - \hat{u})$ dès que \hat{u} est une solution régulière (ici, \hat{u} stationnaire : [A., Igbida'12])
 ⇒ idée d'utiliser les "solutions intégrales" [Bénilan'72]

Obtenir IK dans le cas avec diffusion non dégénérée

Éq. type : $u_t + \operatorname{div} f(u) - \Delta w = 0$, $w = \varphi(u)$, φ strictement croissante

Cadre : solutions faibles ($H_{loc}^1(\Omega)$) ou très faibles ($L_{loc}^1(\Omega)$)

Principe pour obtenir IK : multiplier par $\operatorname{sign}_\alpha(w - \hat{w})$, $\alpha \rightarrow 0$.

- Marche pour pb. stationnaire ou solutions telles que $u_t \in L_{loc}^1$, à condition que f soit Lipschitz ou au moins Hölder d'ordre 1/2.
- Si u_t est une distribution, **dédoublément de variables en temps** ([Otto'96]) : considérer $\hat{w} = \hat{w}(s, x)$ et des fonctions test en (t, s, x) à support qui se concentre sur $t = s$
- Si f n'est pas assez régulière, aussi le **dédoublément en espace**
- Variante : si l'on remplace la diffusion Δw par le " $\rho(u)$ -laplacien" $\operatorname{div} |\nabla w|^{\rho(u)-2} \nabla w$, on peut obtenir l'IK lorsque l'une des deux solutions est "régulière" (ici, \hat{u} telle que $\nabla \hat{u} \in L^\infty$)
 \Rightarrow idée de famille "dense" de solutions "régulières" [A., Bouhsiss'04]
- Variante : si $f \circ \varphi^{-1} \in C$, φ croissante au sens large, on obtient IK en multipliant par $\operatorname{sign}_\alpha(w - \hat{w} + \alpha\pi)$, $\pi \approx \operatorname{sign}(u - \hat{u})$ dès que \hat{u} est une solution régulière (ici, \hat{u} stationnaire : [A., Igibida'12])
 \Rightarrow idée d'utiliser les "solutions intégrales" [Bénilan'72]

Obtenir IK dans le cas avec diffusion non dégénérée

Éq. type : $u_t + \operatorname{div} f(u) - \Delta w = 0$, $w = \varphi(u)$, φ strictement croissante

Cadre : solutions faibles ($H_{loc}^1(\Omega)$) ou très faibles ($L_{loc}^1(\Omega)$)

Principe pour obtenir IK : multiplier par $\operatorname{sign}_\alpha(w - \hat{w})$, $\alpha \rightarrow 0$.

- Marche pour pb. stationnaire ou solutions telles que $u_t \in L_{loc}^1$, à condition que f soit Lipschitz ou au moins Hölder d'ordre $1/2$.
- Si u_t est une distribution, **dédoublément de variables en temps** ([Otto'96]) : considérer $\hat{w} = \hat{w}(s, x)$ et des fonctions test en (t, s, x) à support qui se concentre sur $t = s$
- Si f n'est pas assez régulière, aussi le **dédoublément en espace**
- Variante : si l'on remplace la diffusion Δw par le " **$p(u)$ -laplacien**" $\operatorname{div} |\nabla w|^{p(u)-2} \nabla w$, on peut obtenir l'IK lorsque l'une des deux solutions est "régulière" (ici, \hat{u} telle que $\nabla \hat{u} \in L^\infty$)
 ⇒ idée de famille "**dense**" de solutions "**régulières**" [A., Bouhsiss'04]
- Variante : si $f \circ \varphi^{-1} \in C$, φ croissante au sens large, on obtient IK en multipliant par $\operatorname{sign}_\alpha(w - \hat{w} + \alpha\pi)$, $\pi \approx \operatorname{sign}(u - \hat{u})$ dès que \hat{u} est une solution régulière (ici, \hat{u} stationnaire : [A., Igbida'12])
 ⇒ idée d'utiliser les "**solutions intégrales**" [Bénilan'72]



Obtenir IK dans le cas avec diffusion non dégénérée

Éq. type : $u_t + \operatorname{div} f(u) - \Delta w = 0$, $w = \varphi(u)$, φ strictement croissante

Cadre : solutions faibles ($H_{loc}^1(\Omega)$) ou très faibles ($L_{loc}^1(\Omega)$)

Principe pour obtenir IK : multiplier par $\operatorname{sign}_\alpha(w - \hat{w})$, $\alpha \rightarrow 0$.

- Marche pour pb. stationnaire ou solutions telles que $u_t \in L_{loc}^1$, à condition que f soit Lipschitz ou au moins Hölder d'ordre 1/2.
- Si u_t est une distribution, **dédoublément de variables en temps** ([Otto'96]) : considérer $\hat{w} = \hat{w}(s, x)$ et des fonctions test en (t, s, x) à support qui se concentre sur $t = s$
- Si f n'est pas assez régulière, aussi le **dédoublément en espace**
- Variante : si l'on remplace la diffusion Δw par le " **$p(u)$ -laplacien**" $\operatorname{div} |\nabla w|^{p(u)-2} \nabla w$, on peut obtenir l'IK lorsque l'une des deux solutions est "régulière" (ici, \hat{u} telle que $\nabla \hat{u} \in L^\infty$)
 ⇒ **idée de famille "dense" de solutions "régulières"** [A., Bouhsiss'04]
- Variante : si $f \circ \varphi^{-1} \in C$, φ croissante au sens large, on obtient IK en multipliant par $\operatorname{sign}_\alpha(w - \hat{w} + \alpha\pi)$, $\pi \approx \operatorname{sign}(u - \hat{u})$ dès que \hat{u} est une solution régulière (ici, \hat{u} stationnaire : [A., Igbida'12])
 ⇒ **idée d'utiliser les "solutions intégrales"** [Bénilan'72]

Obtenir IK dans le cas hyperbolique ou avec diffusion dégénérée

Éq. type : $u_t + \operatorname{div} f(u) - \Delta w = 0$, $w = \varphi(u)$, φ croissante avec plats .

Cadre : solutions entropiques ou cinétiques

Principe pour obtenir IK :

dédoubler les variables dans la (bonne) formulation entropique

- Cas hyperbolique $\varphi \equiv 0$ [Kruzhkov'69] :

$$\forall k \in \mathbb{R} \quad |u - k|_t + \operatorname{div} \operatorname{sign}(u - k)(f(u) - f(k)) \leq 0 \quad \text{dans } D',$$

càd l'IK avec $\hat{u} \equiv k$! Dédoublement : "glisser" \hat{u} à la place de k .
 \Rightarrow IK générale peut se déduire d'une famille restreinte de IK !

- Cas parabolique-hyperbolique [Carrillo'99] :

$$|u - k|_t + \dots - \Delta |\varphi(u) - \varphi(k)| \leq - \limsup_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \int_{|u-k| < \alpha} |\nabla \varphi(u)|^2,$$

on garde la dissipation parabolique " $\delta_0(u - k) |\nabla \varphi(u)|^2$ ".

- Si diffusion fractionnaire $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} w$ à la place de $-\Delta w$, via la formulation cinétique ([Perthame],[Alibaud,A.,Ouédraogo'15?]) :

$$|u - k|_t + \dots + (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} |\varphi(u) - \varphi(k)| \leq -2 \int_{\{z: k \in \operatorname{conv}\{u(\cdot), u(\cdot+z)\}\}} |\varphi(u(\cdot+z)) - \varphi(k)| \frac{C_\alpha dz}{|z|^{N+\alpha}}.$$

Obtenir IK dans le cas hyperbolique ou avec diffusion dégénérée

Éq. type : $u_t + \operatorname{div} f(u) - \Delta w = 0$, $w = \varphi(u)$, φ croissante avec plats .

Cadre : solutions entropiques ou cinétiques

Principe pour obtenir IK :

dédoubler les variables dans la (bonne) formulation entropique

- Cas hyperbolique $\varphi \equiv 0$ [Kruzhkov'69] :

$$\forall k \in \mathbb{R} \quad |u - k|_t + \operatorname{div} \operatorname{sign}(u - k)(f(u) - f(k)) \leq 0 \quad \text{dans } D',$$

càd l'IK avec $\hat{u} \equiv k$! **Dédoublage** : "glisser" \hat{u} à la place de k .

⇒ IK générale peut se déduire d'une famille restreinte de IK !

- Cas parabolique-hyperbolique [Carrillo'99] :

$$|u - k|_t + \dots - \Delta |\varphi(u) - \varphi(k)| \leq - \limsup_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \int_{|u-k| < \alpha} |\nabla \varphi(u)|^2,$$

on garde la dissipation parabolique " $\delta_0(u - k) |\nabla \varphi(u)|^2$ ".

- Si diffusion fractionnaire $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} w$ à la place de $-\Delta w$, via la formulation cinétique ([Perthame],[Alibaud,A.,Ouédraogo'15?]) :

$$|u - k|_t + \dots + (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} |\varphi(u) - \varphi(k)| \leq -2 \int_{\{z : k \in \operatorname{conv}\{u(\cdot), u(\cdot+z)\}\}} |\varphi(u(\cdot+z)) - \varphi(k)| \frac{C_\alpha dz}{|z|^{N+\alpha}}.$$

Obtenir IK dans le cas hyperbolique ou avec diffusion dégénérée

Éq. type : $u_t + \operatorname{div} f(u) - \Delta w = 0$, $w = \varphi(u)$, φ croissante avec plats .

Cadre : solutions entropiques ou cinétiques

Principe pour obtenir IK :

dédoubler les variables dans la (bonne) formulation entropique

- Cas hyperbolique $\varphi \equiv 0$ [Kruzhkov'69] :

$$\forall k \in \mathbb{R} \quad |u - k|_t + \operatorname{div} \operatorname{sign}(u - k)(f(u) - f(k)) \leq 0 \quad \text{dans } D',$$

càd l'IK avec $\hat{u} \equiv k$! **Dédoublage** : "glisser" \hat{u} à la place de k .
 \Rightarrow IK générale peut se déduire d'une famille restreinte de IK !

- Cas parabolique-hyperbolique [Carrillo'99] :

$$|u - k|_t + \dots - \Delta |\varphi(u) - \varphi(k)| \leq - \limsup_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \int_{|u-k| < \alpha} |\nabla \varphi(u)|^2,$$

on garde la dissipation parabolique " $\delta_0(u - k)|\nabla \varphi(u)|^2$ ".

- Si diffusion fractionnaire $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} w$ à la place de $-\Delta w$, via la formulation cinétique ([Perthame],[Alibaud,A.,Ouédraogo'15?]) :

$$|u - k|_t + \dots + (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} |\varphi(u) - \varphi(k)| \leq -2 \int_{\{z : k \in \operatorname{conv}\{u(\cdot), u(\cdot+z)\}\}} |\varphi(u(\cdot+z)) - \varphi(k)| \frac{C_\alpha dz}{|z|^{N+\alpha}}.$$

Obtenir IK dans le cas hyperbolique ou avec diffusion dégénérée

Éq. type : $u_t + \operatorname{div} f(u) - \Delta w = 0$, $w = \varphi(u)$, φ croissante avec plats .

Cadre : solutions entropiques ou cinétiques

Principe pour obtenir IK :

dédoubler les variables dans la (bonne) formulation entropique

- Cas hyperbolique $\varphi \equiv 0$ [Kruzhkov'69] :

$$\forall k \in \mathbb{R} \quad |u - k|_t + \operatorname{div} \operatorname{sign}(u - k)(f(u) - f(k)) \leq 0 \quad \text{dans } D',$$

càd l'IK avec $\hat{u} \equiv k$! Dédoublage : "glisser" \hat{u} à la place de k .

⇒ IK générale peut se déduire d'une famille restreinte de IK !

- Cas parabolique-hyperbolique [Carrillo'99] :

$$|u - k|_t + \dots - \Delta |\varphi(u) - \varphi(k)| \leq - \limsup_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \int_{|u-k| < \alpha} |\nabla \varphi(u)|^2,$$

on garde la dissipation parabolique " $\delta_0(u - k) |\nabla \varphi(u)|^2$ ".

- Si diffusion fractionnaire $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} w$ à la place de $-\Delta w$, via la formulation cinétique ([Perthame],[Alibaud,A.,Ouédraogo'15?]) :

$$|u - k|_t + \dots + (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} |\varphi(u) - \varphi(k)| \leq -2 \int_{\{z: k \in \operatorname{conv}\{u(\cdot), u(\cdot+z)\}\}} |\varphi(u(\cdot+z)) - \varphi(k)| \frac{C_\alpha dz}{|z|^{N+\alpha}}.$$



L'inégalité de Kato passe à la limite sous la cv. suffisamment forte.

Il arrive fréquemment d'hériter l'IK par passage à la limite.

- **Méthode de viscosité évanescence** : passage du parabolique non dégénéré (IK facile) à l'hyperbolique (IK très délicate)
- **Approximation numérique** de $u_t + f(u)_x + \dots = 0$
par **schémas monotones** [Crandall, Tartar'80] de volumes finis :
IK facile au niveau discret (toute fonction test est admissible)
- **Approximation des données**
(cadre où on peut passer de IK à la contraction L^1)
On part de **contraction partielle** pour une solution générale u
avec une classe restreinte de solutions \hat{u} dites "régulières".
Condition : **densité L^1 des données \hat{g} telles que $\exists \hat{u}$ "régulière"**.
 - Solutions non variationnelles de $\dots + (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} w = f \in L^1$, $\alpha \leq 2$:
solutions renormalisées [Murat-Lions] ou **entropiques** [BBGGPV'95],
IK plus facile si \hat{u} est une sol. bornée (ex.: [Alibaud, A., Bendahmane'10])
 - **Contraction pour le problème stationnaire** (**opérateurs (m -)accrétifs**)
+ contraction entre u générale et \hat{u} stationnaire (**sol. intégrale**)
 \Rightarrow contraction et IK pour u, \hat{u} solutions générales ([Bénilan'72]).

L'inégalité de Kato passe à la limite sous la cv. suffisamment forte.

Il arrive fréquemment d'hériter l'IK par passage à la limite.

- **Méthode de viscosité évanescence** : passage du parabolique non dégénéré (IK facile) à l'hyperbolique (IK très délicate)
- **Approximation numérique** de $u_t + f(u)_x + \dots = 0$ par **schémas monotones** [Crandall, Tartar'80] de volumes finis : IK facile au niveau discret (toute fonction test est admissible)
- **Approximation des données** (cadre où on peut passer de IK à la contraction L^1)
On part de **contraction partielle** pour une solution générale u avec une classe restreinte de solutions \hat{u} dites "régulières".
Condition : **densité L^1 des données \hat{g} telles que $\exists \hat{u}$ "régulière"**.
 - Solutions non variationnelles de $\dots + (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} w = f \in L^1$, $\alpha \leq 2$:
solutions renormalisées [Murat-Lions] ou **entropiques** [BBGGPV'95],
IK plus facile si \hat{u} est une sol. bornée (ex.: [Alibaud, A., Bendahmane'10])
 - **Contraction pour le problème stationnaire** (**opérateurs (m -)accrétifs**)
+ contraction entre u générale et \hat{u} stationnaire (**sol. intégrale**)
 \Rightarrow contraction et IK pour u, \hat{u} solutions générales ([Bénilan'72]).

L'inégalité de Kato passe à la limite sous la cv. suffisamment forte.

Il arrive fréquemment d'hériter l'IK par passage à la limite.

- **Méthode de viscosité évanescence** : passage du parabolique non dégénéré (IK facile) à l'hyperbolique (IK très délicate)
- **Approximation numérique** de $u_t + f(u)_x + \dots = 0$
par **schémas monotones** [Crandall, Tartar'80] de volumes finis :
IK facile au niveau discret (toute fonction test est admissible)
- **Approximation des données**
(cadre où on peut passer de IK à la contraction L^1)
On part de **contraction partielle** pour une solution générale u
avec une **classe restreinte de solutions \hat{u}** dites "régulières".
Condition : **densité L^1 des données \hat{g}** telles que $\exists \hat{u}$ "régulière".
 - Solutions non variationnelles de $\dots + (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} w = f \in L^1$, $\alpha \leq 2$:
solutions renormalisées [Murat-Lions] ou **entropiques** [BBGGPV'95],
IK plus facile si \hat{u} est une sol. bornée (ex.: [Alibaud, A., Bendahmane'10])
 - **Contraction pour le problème stationnaire** (**opérateurs (m -)accrétifs**)
+ contraction entre u générale et \hat{u} stationnaire (**sol. intégrale**)
 \Rightarrow contraction et IK pour u, \hat{u} solutions générales ([Bénilan'72]).

L'inégalité de Kato passe à la limite sous la cv. suffisamment forte.

Il arrive fréquemment d'hériter l'IK par passage à la limite.

- **Méthode de viscosité évanescence** : passage du parabolique non dégénéré (IK facile) à l'hyperbolique (IK très délicate)
- **Approximation numérique** de $u_t + f(u)_x + \dots = 0$ par **schémas monotones** [Crandall, Tartar'80] de volumes finis : IK facile au niveau discret (toute fonction test est admissible)
- **Approximation des données** (cadre où on peut passer de IK à la contraction L^1)
On part de **contraction partielle** pour une solution générale u avec une **classe restreinte de solutions \hat{u}** dites "régulières".
Condition : **densité L^1 des données \hat{g}** telles que $\exists \hat{u}$ "régulière".
 - Solutions non variationnelles de $\dots + (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} w = f \in L^1$, $\alpha \leq 2$:
solutions renormalisées [Murat-Lions] ou **entropiques** [BBGGPV'95],
IK plus facile si \hat{u} est une **sol. bornée** (ex.: [Alibaud, A., Bendahmane'10])
 - **Contraction pour le problème stationnaire** (opérateurs (m -)accrétifs)
+ contraction entre u générale et \hat{u} stationnaire (sol. intégrale)
 \Rightarrow contraction et IK pour u, \hat{u} solutions générales ([Bénilan'72]).

L'inégalité de Kato passe à la limite sous la cv. suffisamment forte.

Il arrive fréquemment d'hériter l'IK par passage à la limite.

- **Méthode de viscosité évanescence** : passage du parabolique non dégénéré (IK facile) à l'hyperbolique (IK très délicate)
- **Approximation numérique** de $u_t + f(u)_x + \dots = 0$ par **schémas monotones** [Crandall, Tartar'80] de volumes finis : IK facile au niveau discret (toute fonction test est admissible)
- **Approximation des données** (cadre où on peut passer de IK à la contraction L^1)
On part de **contraction partielle** pour une solution générale u avec une **classe restreinte de solutions \hat{u} dites "régulières"**.
Condition : **densité L^1 des données \hat{g} telles que $\exists \hat{u}$ "régulière"**.
 - Solutions non variationnelles de $\dots + (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} w = f \in L^1$, $\alpha \leq 2$: **solutions renormalisées** [Murat-Lions] ou **entropiques** [BBGGPV'95], IK plus facile si \hat{u} est une **sol. bornée** (ex.: [Alibaud, A., Bendahmane'10])
 - **Contraction pour le problème stationnaire** (**opérateurs (m -)accrétifs**) + contraction entre u générale et \hat{u} stationnaire (**sol. intégrale**)
 \Rightarrow contraction et IK pour u, \hat{u} solutions générales ([Bénilan'72]).

Exploiter l'inégalité de Kato : le cas \mathbb{R}^N

Techniques “hyperboliques” \pm classiques pour exploiter IK

Faits connus pour $u_t + \operatorname{div} f(u) = 0$ posé dans $L^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^N)$:

- f Lipschitz \Rightarrow on peut “intégrer IK localement” [Kruzhkov’70]
 \Rightarrow **Ok pour unicité, comparaison, contraction L^1**
- f juste continue \Rightarrow exemples de non-unicité [Panov’91]
- $f \in C^{1-\frac{1}{N}}$ \Rightarrow Ok (IK intégrée globalement) [Bénilan’72]
- (subtil) conditions type Hölder anisotropiques
sur les modules de continuité des composantes du flux f
 \Rightarrow Ok [Kruzhkov, Panov’94], [Bénilan, Kruzhkov’96]

IK est exploitée grâce à un bon choix de fonctions test $(\xi_n)_n$.

- $(N - 1)$ composantes du vecteur flux f monotones
+ décroissance de u à l’infini \Rightarrow Ok [A., Bénilan, Kruzhkov’00]

Une technique très différente: récurrence en N , accréativité à fond.

Problème ouvert :

unicité ou contre-exemples pour $u \in L^1$, f juste continue

Techniques “hyperboliques” \pm classiques pour exploiter IK

Faits connus pour $u_t + \operatorname{div} f(u) = 0$ posé dans $L^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^N)$:

- f Lipschitz \Rightarrow on peut “intégrer IK localement” [Kruzhkov’70]
 \Rightarrow **Ok pour unicité, comparaison, contraction L^1**
- f juste continue \Rightarrow exemples de non-unicité [Panov’91]
- $f \in C^{1-\frac{1}{N}}$ \Rightarrow Ok (IK intégrée globalement) [Bénilan’72]
- (subtil) conditions type Hölder anisotropiques
sur les modules de continuité des composantes du flux f
 \Rightarrow Ok [Kruzhkov, Panov’94], [Bénilan, Kruzhkov’96]

IK est exploitée grâce à un bon choix de fonctions test $(\xi_n)_n$.

- $(N - 1)$ composantes du vecteur flux f monotones
+ décroissance de u à l’infini \Rightarrow Ok [A., Bénilan, Kruzhkov’00]

Une technique très différente: récurrence en N , accréativité à fond.

Problème ouvert :

unicité ou contre-exemples pour $u \in L^1$, f juste continue

Techniques “hyperboliques” \pm classiques pour exploiter IK

Faits connus pour $u_t + \operatorname{div} f(u) = 0$ posé dans $L^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^N)$:

- f Lipschitz \Rightarrow on peut “intégrer IK localement” [Kruzhkov’70]
 \Rightarrow **Ok pour unicité, comparaison, contraction L^1**
- f juste continue \Rightarrow exemples de non-unicité [Panov’91]
- $f \in C^{1-\frac{1}{N}}$ \Rightarrow Ok (IK intégrée globalement) [Bénilan’72]
- (subtil) conditions type Hölder anisotropiques
sur les modules de continuité des composantes du flux f
 \Rightarrow Ok [Kruzhkov, Panov’94], [Bénilan, Kruzhkov’96]

IK est exploitée grâce à un bon choix de fonctions test $(\xi_n)_n$.

- $(N - 1)$ composantes du vecteur flux f monotones
+ décroissance de u à l’infini \Rightarrow Ok [A., Bénilan, Kruzhkov’00]

Une technique très différente: **récurrence en N , accréativité à fond.**

Problème ouvert :

unicité ou contre-exemples pour $u \in L^1$, f juste continue

Mêmes techniques dans le cadre parabolique-hyperbolique

Extensions au **cas hyperbolique-parabolique (et fractionnaire)** :

- f, φ Lipschitz \Rightarrow Ok :
 “**vitesse finie-infinie de propagation**”, un argument de splitting
 [Alibaud'07] ($\alpha < 2$ mais passe pour $\alpha = 2$).
 [Endal,Jakobsen'14] : **estimations localisées pour $\alpha \leq 2$** .
- $f \in C^{1-\frac{1}{N}}$ et $\varphi \in C^{1-\frac{2}{N}}$ \Rightarrow Ok [Maliki,Touré'03] :
 la technique de Bénilan-Kruzhkov passe pour $\alpha = 2$,
 et on peut probablement faire $\alpha < 2$ si $\varphi \in C^{1-\frac{\alpha}{N}}$

Souci d'optimalité :

dans ces approches, **la monotonie de φ n'est pas exploitée.**

Question : l'hypothèse de régularité $C^{1-\frac{2}{N}}$ sur φ est-elle optimale ?

Mêmes techniques dans le cadre parabolique-hyperbolique

Extensions au **cas hyperbolique-parabolique (et fractionnaire)** :

- f, φ Lipschitz \Rightarrow Ok :
 “**vitesse finie-infinie de propagation**”, un argument de splitting
 [Alibaud'07] ($\alpha < 2$ mais passe pour $\alpha = 2$).
 [Endal,Jakobsen'14] : **estimations localisées pour $\alpha \leq 2$** .
- $f \in C^{1-\frac{1}{N}}$ et $\varphi \in C^{1-\frac{2}{N}}$ \Rightarrow Ok [Maliki,Touré'03] :
 la technique de Bénilan-Kruzhkov passe pour $\alpha = 2$,
 et on peut probablement faire $\alpha < 2$ si $\varphi \in C^{1-\frac{\alpha}{N}}$

Souci d'optimalité :

dans ces approches, **la monotonie de φ n'est pas exploitée**.

Question : l'hypothèse de régularité $C^{1-\frac{2}{N}}$ sur φ est-elle optimale ?

Techniques classiques et moins classiques pour Fast Diffusion

Cas modèle : $u - \Delta\varphi(u) = g$ (avec φ aussi générales que possible)

But : convertir IK en unicité-comparaison-... valable pour $u \in L^\infty$

[A.,Maliki'??] : trois "well-posedness classes" qui incluent L^∞ ...
deux d'entre elles étaient, grosso modo, connues.

Hypothèse commune : **continuité uniforme de φ** (OK si sol. L^∞).

Notation: ω_φ le module de continuité, $\Omega_\varphi = \omega_\varphi^{-1}$.

- **classe L^1_{loc}** , sous la condition de Keller-Osserman $\int^{+\infty} \frac{dz}{z\Omega_\varphi(z)} < +\infty$
vérifiée typiquement pour Fast Diffusion $\varphi(u) = u^m$, $0 < m < 1$
[Brézis'84],[Gallouët,Morel'87] . Technique : \exists sur-solutions W_R de
 $\Omega_\varphi(W) - \Delta W = 0$ qui explosent sur $|x| = R$ et tq $W_R \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$.
- **classe pondérée $L^1(\mathbb{R}^N; \exp(-c|\cdot|))$** ,
sous la condition que φ au plus linéaire à l'infini, $\varphi'(+\infty) > c$.
Technique de linéarisation de l'inégalité de Kato généralisée
(choix de S telle que $S'\Omega_\varphi = cS$ - pas tout à fait possible...)
- **classe pondérée $L^1(\mathbb{R}^N; \max\{|\cdot|, R\}^{2-N})$** , [Bénilan,Crandall'81] . Le
poids ρ_R en solution fondamentale tronquée étant sur-harmonique ,
 $|w - \hat{w}|\Delta\rho \leq 0$ et on jette la contribution de la diffusion à IK.

Youpii ! Technique des poids sur-harmoniques supporte $+\text{div } f(u)$!

Techniques classiques et moins classiques pour Fast Diffusion

Cas modèle : $u - \Delta\varphi(u) = g$ (avec φ aussi générales que possible)

But : convertir IK en unicité-comparaison-... valable pour $u \in L^\infty$

[A.,Maliki'??] : trois "well-posedness classes" qui incluent L^∞ ...
deux d'entre elles étaient, grosso modo, connues.

Hypothèse commune : **continuité uniforme de φ** (OK si sol. L^∞).

Notation: ω_φ le module de continuité, $\Omega_\varphi = \omega_\varphi^{-1}$.

- **classe L^1_{loc}** , sous la condition de Keller-Osserman $\int^{+\infty} \frac{dz}{z\Omega_\varphi(z)} < +\infty$
vérifiée typiquement pour Fast Diffusion $\varphi(u) = u^m$, $0 < m < 1$
[Brézis'84],[Gallouët,Morel'87] . **Technique** : \exists sur-solutions W_R de
 $\Omega_\varphi(W) - \Delta W = 0$ qui explosent sur $|x| = R$ et tq $W_R \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$.
- **classe pondérée $L^1(\mathbb{R}^N; \exp(-c|\cdot|))$** ,
sous la condition que φ au plus linéaire à l'infini, $\varphi'(+\infty) > c$.
Technique de linéarisation de l'inégalité de Kato généralisée
(choix de S telle que $S'\Omega_\varphi = cS$ - pas tout à fait possible...)
- **classe pondérée $L^1(\mathbb{R}^N; \max\{|\cdot|, R\}^{2-N})$** , [Bénilan,Crandall'81] . Le
poids ρ_R en solution fondamentale tronquée étant sur-harmonique ,
 $|w - \hat{w}|\Delta\rho \leq 0$ et on jette la contribution de la diffusion à IK.

Youpii ! Technique des poids sur-harmoniques supporte $+\text{div } f(u)$!

Techniques classiques et moins classiques pour Fast Diffusion

Cas modèle : $u - \Delta\varphi(u) = g$ (avec φ aussi générales que possible)

But : convertir IK en unicité-comparaison-... valable pour $u \in L^\infty$

[A.,Maliki'??] : trois "well-posedness classes" qui incluent L^∞ ...
deux d'entre elles étaient, grosso modo, connues.

Hypothèse commune : **continuité uniforme de φ** (OK si sol. L^∞).

Notation: ω_φ le module de continuité, $\Omega_\varphi = \omega_\varphi^{-1}$.

- **classe L^1_{loc}** , sous la condition de Keller-Osserman $\int^{+\infty} \frac{dz}{z\Omega_\varphi(z)} < +\infty$
vérifiée typiquement pour Fast Diffusion $\varphi(u) = u^m$, $0 < m < 1$
[Brézis'84],[Gallouët,Morel'87] . **Technique** : \exists sur-solutions W_R de
 $\Omega_\varphi(W) - \Delta W = 0$ qui explosent sur $|x| = R$ et tq $W_R \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$.
- **classe pondérée $L^1(\mathbb{R}^N; \exp(-c|\cdot|))$** ,
sous la condition que φ au plus linéaire à l'infini, $\varphi'(+\infty) > c$.
Technique de linéarisation de l'inégalité de Kato généralisée
(choix de S telle que $S'\Omega_\varphi = cS$ - pas tout à fait possible...)
- **classe pondérée $L^1(\mathbb{R}^N; \max\{|\cdot|, R\}^{2-N})$** , [Bénilan,Crandall'81] . Le
poids ρ_R en solution fondamentale tronquée étant sur-harmonique ,
 $|w - \hat{w}|\Delta\rho \leq 0$ et on jette la contribution de la diffusion à IK.

Youpii ! Technique des poids sur-harmoniques supporte $+\text{div } f(u)$!

Techniques classiques et moins classiques pour Fast Diffusion

Cas modèle : $u - \Delta\varphi(u) = g$ (avec φ aussi générales que possible)

But : convertir IK en unicité-comparaison-... valable pour $u \in L^\infty$

[A.,Maliki'??] : trois "well-posedness classes" qui incluent L^∞ ...
deux d'entre elles étaient, grosso modo, connues.

Hypothèse commune : **continuité uniforme de φ** (OK si sol. L^∞).

Notation: ω_φ le module de continuité, $\Omega_\varphi = \omega_\varphi^{-1}$.

- **classe L^1_{loc}** , sous la condition de Keller-Osserman $\int^{+\infty} \frac{dz}{z\Omega_\varphi(z)} < +\infty$
vérifiée typiquement pour Fast Diffusion $\varphi(u) = u^m$, $0 < m < 1$
[Brézis'84],[Gallouët,Morel'87] . **Technique** : \exists sur-solutions W_R de
 $\Omega_\varphi(W) - \Delta W = 0$ qui explosent sur $|x| = R$ et tq $W_R \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$.
- **classe pondérée $L^1(\mathbb{R}^N; \exp(-c|\cdot|))$** ,
sous la condition que φ au plus linéaire à l'infini, $\varphi'(+\infty) > c$.
Technique de linéarisation de l'inégalité de Kato généralisée
(choix de S telle que $S'\Omega_\varphi = cS$ - pas tout à fait possible...)
- **classe pondérée $L^1(\mathbb{R}^N; \max\{|\cdot|, R\}^{2-N})$** , [Bénilan,Crandall'81] . Le
poids ρ_R en solution fondamentale tronquée étant sur-harmonique ,
 $|w - \hat{w}|\Delta\rho \leq 0$ et on jette la contribution de la diffusion a IK.

Youpii ! Technique des poids sur-harmoniques supporte $+\text{div } f(u)$!

Technique de fonctions test “en solution fondamentale tronquée”

Idée tirée de [A.,Maliki'??] : on peut traiter φ seulement continue si l'on se sert de fonctions test sur-harmoniques : on profite ainsi du signe de $\text{sign}(u - \hat{u})(w - \hat{w}) = |w - \hat{w}|$.

Technique : prendre ξ en solution fondamentale tronquée,

$$\xi_{R,\varepsilon}(x) = \frac{R^{N-2+\varepsilon}}{\max\{|x|, R\}^{N-2+\varepsilon}}$$

Approximations ($\varepsilon \downarrow 0$, mais aussi tronquer le support de $\xi_{R,\varepsilon}$).

- fonction test en temps $\exp(-ct)$ pour profiter du terme d'évolution
- À R fixé, on tue la contribution de la diffusion dans IK
- Avec $R \rightarrow \infty$, on tue la contribution de la convection
- on a bien $\xi_{R,\varepsilon} \rightarrow 1$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty \Rightarrow \text{Ok}$.

Résultats :

- $f \in C^{1-\frac{1}{N}}$, φ juste continue, $\alpha = 2 \Rightarrow \text{Ok}$ [A.,Maliki'10],
preuve d'apparence plus naturelle que les preuves “hyperboliques”
- $f \in C^{1-\frac{1}{N}}$, φ juste continue, $\alpha < 2 \Rightarrow \text{Ok}$ [A.,Brassart'15?],
analyse poussée de l'action de $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ sur puissances tronquées
- $f \in C^{1-\frac{1}{N}}$, $\varphi \in C^{1-\frac{\alpha}{N}}$, avec preuve assez simple.

Technique de fonctions test “en solution fondamentale tronquée”

Idée tirée de [A.,Maliki'??] : on peut traiter φ seulement continue si l'on se sert de fonctions test sur-harmoniques : on profite ainsi du signe de $\text{sign}(u - \hat{u})(w - \hat{w}) = |w - \hat{w}|$.

Technique : prendre ξ en solution fondamentale tronquée,

$$\xi_{R,\varepsilon}(x) = \frac{R^{N-2+\varepsilon}}{\max\{|x|, R\}^{N-2+\varepsilon}}$$

Approximations ($\varepsilon \downarrow 0$, mais aussi tronquer le support de $\xi_{R,\varepsilon}$).

- fonction test en temps $\exp(-ct)$ pour profiter du terme d'évolution
- À R fixé, on tue la contribution de la diffusion dans IK
- Avec $R \rightarrow \infty$, on tue la contribution de la convection
- on a bien $\xi_{R,\varepsilon} \rightarrow 1$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty \Rightarrow \text{Ok}$.

Résultats :

- $f \in C^{1-\frac{1}{N}}$, φ juste continue, $\alpha = 2 \Rightarrow \text{Ok}$ [A.,Maliki'10],
preuve d'apparence plus naturelle que les preuves “hyperboliques”
- $f \in C^{1-\frac{1}{N}}$, φ juste continue, $\alpha < 2 \Rightarrow \text{Ok}$ [A.,Brassart'15?],
analyse poussée de l'action de $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ sur puissances tronquées
- $f \in C^{1-\frac{1}{N}}$, $\varphi \in C^{1-\frac{\alpha}{N}}$, avec preuve assez simple.

Technique de fonctions test “en solution fondamentale tronquée”

Idée tirée de [A.,Maliki'??] : on peut traiter φ seulement continue si l'on se sert de fonctions test sur-harmoniques : on profite ainsi du signe de $\text{sign}(u - \hat{u})(w - \hat{w}) = |w - \hat{w}|$.

Technique : prendre ξ en solution fondamentale tronquée,

$$\xi_{R,\varepsilon}(x) = \frac{R^{N-2+\varepsilon}}{\max\{|x|, R\}^{N-2+\varepsilon}}$$

Approximations ($\varepsilon \downarrow 0$, mais aussi tronquer le support de $\xi_{R,\varepsilon}$).

- fonction test en temps $\exp(-ct)$ pour profiter du terme d'évolution
- À R fixé, on tue la contribution de la diffusion dans IK
- Avec $R \rightarrow \infty$, on tue la contribution de la convection
- on a bien $\xi_{R,\varepsilon} \rightarrow 1$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty \Rightarrow \text{Ok}$.

Résultats :

- $f \in C^{1-\frac{1}{N}}$, φ juste continue, $\alpha = 2 \Rightarrow \text{Ok}$ [A.,Maliki'10],
preuve d'apparence plus naturelle que les preuves “hyperboliques”
- $f \in C^{1-\frac{1}{N}}$, φ juste continue, $\alpha < 2 \Rightarrow \text{Ok}$ [A.,Brassart'15?],
analyse poussée de l'action de $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ sur puissances tronquées
- $f \in C^{1-\frac{1}{N}}$, $\varphi \in C^{1-\frac{\alpha}{N}}$, avec preuve assez simple.

Quid de diffusion non linéaire ? de dégénérescence elliptique ?

Question ouverte I : unicité de solutions (dans une classe ad hoc) pour convection + diffusion du type p -laplacien ?

Difficulté : une dérivée sur la fonction test Ok, mais pas les deux

- Cas $p < 2$: résultats partiels [Kurta'95,03]
- Cas 1D sans convection : semble marcher "artisanalement"

Question ouverte (?) II : Cas elliptique-parabolique ? (Richards,...)
 $u_t + \operatorname{div} f(w) - \Delta w = 0$, $u = b(w)$ (càd φ à saut, $b = \varphi^{-1}$ continue)

Difficulté : plus aucun contrôle de $|w - \hat{w}|$ par $|u - \hat{u}|$.

- Cas $f = F \circ b$ (condition de structure, [Bénilan,Wittbold'96]) : devrait passer avec la technique [A.,Maliki'10]
- Cas général sans condition de structure : paraît compliqué (cf. [A.,Wittbold'10] pour la dépendance continue)

Quid de diffusion non linéaire ? de dégénérescence elliptique ?

Question ouverte I : unicité de solutions (dans une classe ad hoc) pour convection + diffusion du type p -laplacien ?

Difficulté : une dérivée sur la fonction test Ok, mais pas les deux

- Cas $p < 2$: résultats partiels [Kurta'95,03]
- Cas 1D sans convection : semble marcher "artisanalement"

Question ouverte (?) II : Cas elliptique-parabolique ? (Richards,...)
 $u_t + \operatorname{div} f(w) - \Delta w = 0$, $u = b(w)$ (càd φ à saut, $b = \varphi^{-1}$ continue)

Difficulté : plus aucun contrôle de $|w - \hat{w}|$ par $|u - \hat{u}|$.

- Cas $f = F \circ b$ (condition de structure, [Bénilan, Wittbold'96]) : devrait passer avec la technique [A., Maliki'10]
- Cas général sans condition de structure : paraît compliqué (cf. [A., Wittbold'10] pour la dépendance continue)

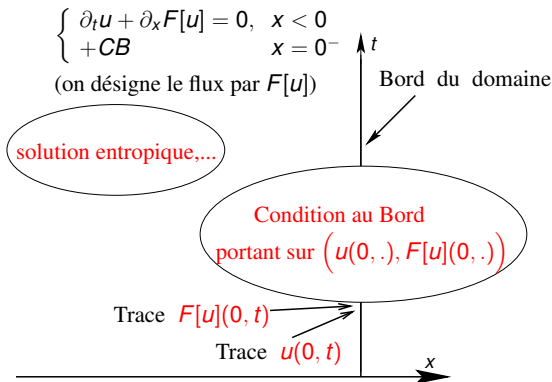
Exploiter

l'inégalité de Kato :

le cas d'un domaine borné

Le cadre général des conditions aux limites dissipatives.

Problèmes aux limites : approche à partir de l'IK locale

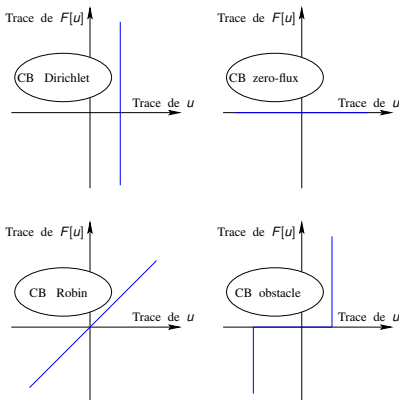


Exploiter IK près du bord : fct.test $\xi_n \rightarrow \mathbf{1}_\Omega$ avec $\nabla \xi_n \rightarrow -\delta|_{\partial\Omega} \mathbf{n} \Rightarrow$

$$\int_{\Omega} |u - \hat{u}|(T, x) - \int_{\Omega} |u_0 - \hat{u}_0| \leq - \int_0^T \gamma_{ad hoc} \left\{ \text{sign}(u - \hat{u})(F[u] - F[\hat{u}]) \cdot \mathbf{n} \right\}(t) dt$$

Le cadre général des conditions aux limites dissipatives.

Conditions aux limites classiques



Dans ces cas, $(u, F[u]) \in \beta$ pour un graphe maximal monotone β .

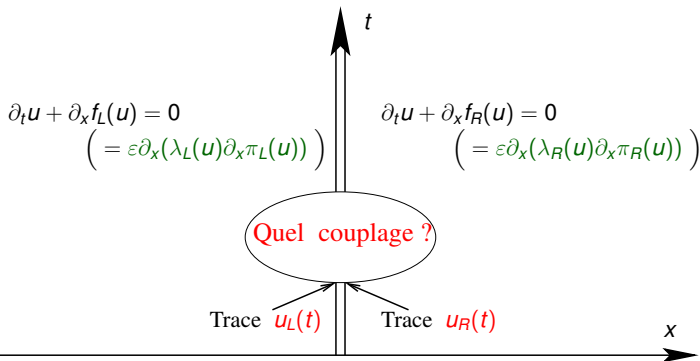
Cadre général : CB posée en termes d'une dépendance maximale monotone entre la solution u et le flux $F[u]$ au bord

Dissipation de bord :

$$\text{sign}(u - \hat{u})(F[u] - F[\hat{u}]) = \text{sign}(u - \hat{u})(\beta(u) - \beta(\hat{u})) \geq 0 !$$

Exemple 1 : Buckley-Leverett dans un milieu poreux à Deux Roches

$$\partial_t u + \partial_x (f_L(u) \mathbf{1}_{x < 0} + f_R(u) \mathbf{1}_{x > 0}) = 0$$



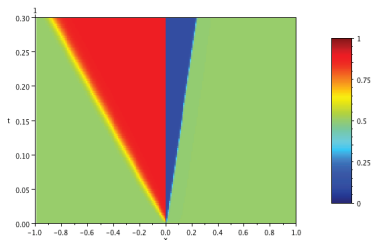
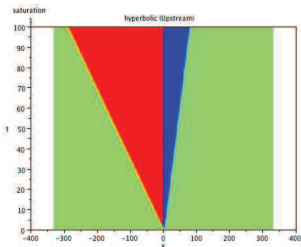
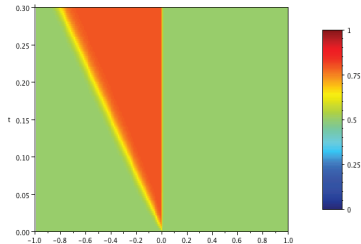
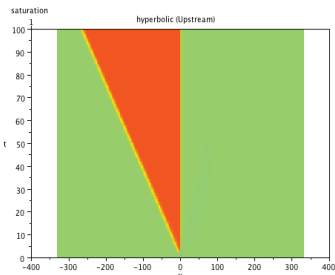
L'équation est une **limite singulière** de problèmes "plus simples".

IK vraie pour $\varepsilon > 0$; elle doit être héritée à la limite

\Rightarrow couplage dissipatif par l'interface ? [A., Cancès'12,'14]

Conditions de couplage d'interface (CCI) dissipatives

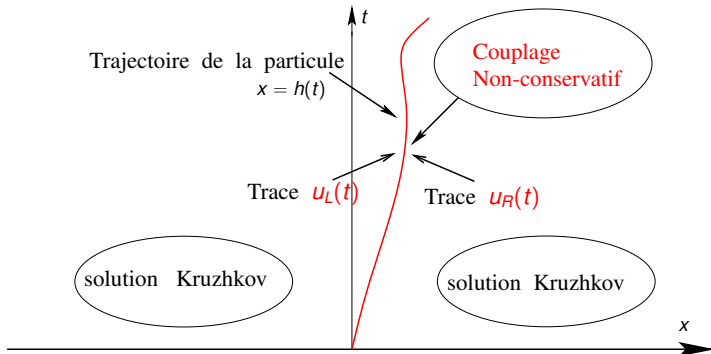
Exemples numériques Buckley-Leverett : non-unicité ?



Gauche : Deux solutions pour la même équation hyperbolique
 Droite : Solutions du modèle plus précis ($\varepsilon = 10^{-3}$, $\pi_{L,R}$ différents)

Exemple 2 : Couplage Burgers-Particule par une force de trainée

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} = -(u - h'(t))\delta_0(x - h(t)), \\ h''(t) = u(t, h(t)) - h'(t) \end{cases}$$



Splitting (temps fractionnaire) ou point fixe \Rightarrow découplage.

Terme source dans LdC dissipatif (formellement) \Rightarrow IK doit être vraie

Problème découplé bien posé dans L^∞ [A., Seguin'12] ;

pb. couplé bien posé BV, exist. L^∞ [A., Lagoutière, Seguin, Takahashi'14]

Conditions de couplage d'interface dissipatives

Analogie : On assimile une interface interne à un double bord

Les conditions de couplage d'interface (CCI) peuvent s'énoncer, comme dans le cas de CB, par:

$$\left((u_L, u_R), (\mathcal{F}_L, \mathcal{F}_R) \right) \in \mathcal{H} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

où $u_{L,R}$: les traces (droite et gauche) de la solution u
et $\mathcal{F}_{L,R}$: les traces normales (droite et gauche) du flux $F[u]$.

La dissipativité de la CCI équivaut la monotonie de \mathcal{H}
au sens suivant : \mathcal{H} est dite 1-monotone si

$$\forall \left((u_L, u_R), (\mathcal{F}_L, \mathcal{F}_R) \right), \left((\hat{u}_L, \hat{u}_R), (\hat{\mathcal{F}}_L, \hat{\mathcal{F}}_R) \right) \in \mathcal{H}$$

$$\text{sign}_{\max}(u_L - \hat{u}_L)(\mathcal{F}_L - \hat{\mathcal{F}}_L) + \text{sign}_{\max}(u_R - \hat{u}_R)(\mathcal{F}_R - \hat{\mathcal{F}}_R) \geq 0$$

Principe : Les outils appropriés pour CB passent aussi pour les CCI !

NB : l'idée vient de [Imbert, Monneau'14] (HJeq. sur réseaux)

Conditions de couplage d'interface dissipatives

Analogie : On assimile une interface interne à un double bord

Les conditions de couplage d'interface (CCI) peuvent s'énoncer, comme dans le cas de CB, par:

$$\left((u_L, u_R), (\mathcal{F}_L, \mathcal{F}_R) \right) \in \mathcal{H} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

où $u_{L,R}$: les traces (droite et gauche) de la solution u
et $\mathcal{F}_{L,R}$: les traces normales (droite et gauche) du flux $F[u]$.

La dissipativité de la CCI équivaut la monotonie de \mathcal{H}
au sens suivant : \mathcal{H} est dite 1-monotone si

$$\forall \left((u_L, u_R), (\mathcal{F}_L, \mathcal{F}_R) \right), \left((\hat{u}_L, \hat{u}_R), (\hat{\mathcal{F}}_L, \hat{\mathcal{F}}_R) \right) \in \mathcal{H}$$

$$\text{sign}_{\max}(u_L - \hat{u}_L)(\mathcal{F}_L - \hat{\mathcal{F}}_L) + \text{sign}_{\max}(u_R - \hat{u}_R)(\mathcal{F}_R - \hat{\mathcal{F}}_R) \geq 0$$

Principe : Les outils appropriés pour CB passent aussi pour les CCI !

NB : l'idée vient de [Imbert, Monneau'14] (HJeq. sur réseaux)

Cadre général des CB monotones. Dissipation de bord. Projection

Loi de conservation **hyperbolique** $u_t + f(u)_x = 0 + \text{CB } (u, F[u]) \in \beta$:

- **Unicité évidente** pour le problème formel
- Problème formel mal posé (**pas d'existence en général**)
- Problème avec $\dots = \varepsilon \partial_{xx}^2 u$ bien posé, IK/contraction L^1 héritées lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. La limite est une solution entropique locale vérifiant la **CB effective** $(u, F[u]) \in \tilde{\beta}$ où $\tilde{\beta}$ est un projeté de β
- Problème aux limites avec CB projetée (i.e., avec $\tilde{\beta}$) bien posé
- On comprend mieux la condition projetée si on dessine $\tilde{\beta}$.
On observe : $\tilde{\beta}$ est le sous-graphe maximal monotone de f le plus proche possible de β !
- On peut décrire $\tilde{\beta}$ en termes du "flux numérique de Godunov" :

$$\tilde{\beta} = \left\{ (u, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} = f(u) = \text{God}(u, \tilde{u}) \in \beta(\tilde{u}) \right\}$$

Ex.: la condition [Bardos, LeRoux, Nédélec'79] s'exprime ainsi

Détails : [Thèse Sbihi'06],[A., Sbihi'15]

Cadre général des CB monotones. Dissipation de bord. Projection

Loi de conservation **hyperbolique** $u_t + f(u)_x = 0 + \text{CB } (u, F[u]) \in \beta$:

- **Unicité évidente** pour le problème formel
- Problème formel mal posé (**pas d'existence en général**)
- Problème avec $\dots = \varepsilon \partial_{xx}^2 u$ **bien posé**, IK/contraction L^1 héritées **lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$** . La limite est une solution entropique locale vérifiant la **CB effective** $(u, F[u]) \in \tilde{\beta}$ où **$\tilde{\beta}$ est un projeté de β**
- **Problème aux limites avec CB projetée** (i.e., avec $\tilde{\beta}$) **bien posé**
- On comprend mieux la condition projetée si on dessine $\tilde{\beta}$.
On observe : **$\tilde{\beta}$ est le sous-graphe maximal monotone de f le plus proche possible de β !**
- On peut décrire $\tilde{\beta}$ en termes du "flux numérique de Godunov" :

$$\tilde{\beta} = \left\{ (u, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} = f(u) = \text{God}(u, \tilde{u}) \in \beta(\tilde{u}) \right\}$$

Ex.: la condition [Bardos, LeRoux, Nédélec'79] s'exprime ainsi

Détails : [Thèse Sbihi'06],[A., Sbihi'15]

Cadre général des CB monotones. Dissipation de bord. Projection

Loi de conservation **hyperbolique** $u_t + f(u)_x = 0 + \text{CB } (u, F[u]) \in \beta$:

- **Unicité évidente** pour le problème formel
- Problème formel mal posé (**pas d'existence en général**)
- Problème avec $\dots = \varepsilon \partial_{xx}^2 u$ **bien posé**, IK/contraction L^1 héritées **lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$** . La limite est une solution entropique locale vérifiant la **CB effective** $(u, F[u]) \in \tilde{\beta}$ où **$\tilde{\beta}$ est un projeté de β**
- **Problème aux limites avec CB projetée** (i.e., avec $\tilde{\beta}$) **bien posé**
- On comprend mieux la condition projetée si on dessine $\tilde{\beta}$.
On observe : **$\tilde{\beta}$ est le sous-graphe maximal monotone de f le plus proche possible de β !**
- On peut décrire $\tilde{\beta}$ en termes du “flux numérique de Godunov”:

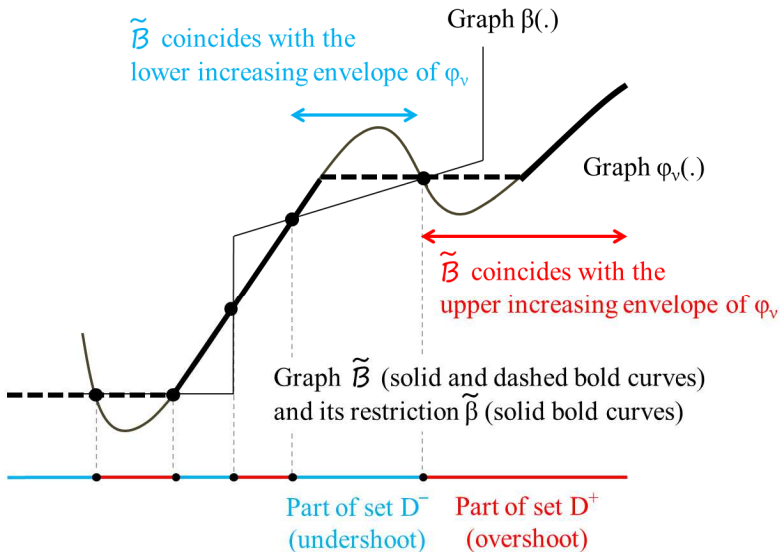
$$\tilde{\beta} = \left\{ (u, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} = f(u) = \text{God}(u, \tilde{u}) \in \beta(\tilde{u}) \right\}$$

Ex.: la condition [Bardos, LeRoux, Nédélec'79] s'exprime ainsi

Détails : [Thèse Sbihi'06],[A.,Sbihi'15]

CB et CCI dissipatives dans le cas hyperbolique.

Exemple pour une CB générale : procédure de projection



CB et CCI dissipatives dans le cas hyperbolique.

Analogie pour le couplage d'interface. Théorie des “germes L^1 -dissipatifs”.

Dans [A.,Karlsen,Risebro'11] les lois de conservation hyperboliques avec flux discontinu (Exemples 1 et 2, entre autre) ont été décrits en termes des couples de traces (u_L, u_R) : on imposait $(u_L, u_R) \in \mathcal{G}$ pour un “germe L^1 -dissipatif” $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$

Résultats :

- problème bien posé,
étant donné un germe (= un principe de couplage)
- (delicat) choix du germe étant donné le modèle physique

Interprétation à la lumière des ICC : ([A.'15])

- dans les modèles physiques, on peut expliciter une ICC (formelle) \mathcal{H}
- comme dans le cas de CB, on doit projeter \mathcal{H} pour obtenir $\tilde{\mathcal{H}}$
le graphe d'ICC effective ; cela se décrit en termes des flux de Godunov
- \mathcal{H} étant 1-monotone, la projection $\tilde{\mathcal{H}}$ hérite la 1-monotonie
- le domaine de $\tilde{\mathcal{H}} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ (1-monotone) est un germe \mathcal{G} L^1 -dissipatif

Conclusion : avec le formalisme des “graphes ICC” il devient plus facile d'identifier le couplage derrière un modèle physique

CB et CCI dissipatives dans le cas hyperbolique.

Analogie pour le couplage d'interface. Théorie des “germes L^1 -dissipatifs”.

Dans [A.,Karlsen,Risebro'11] les lois de conservation hyperboliques avec flux discontinu (Exemples 1 et 2, entre autre) ont été décrits en termes des couples de traces (u_L, u_R) : on imposait $(u_L, u_R) \in \mathcal{G}$ pour un “germe L^1 -dissipatif” $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$

Résultats :

- problème bien posé,
étant donné un germe (= un principe de couplage)
- (delicat) choix du germe étant donné le modèle physique

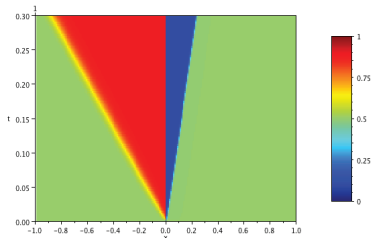
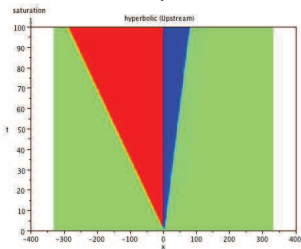
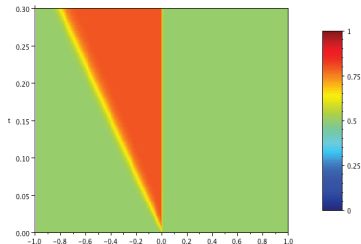
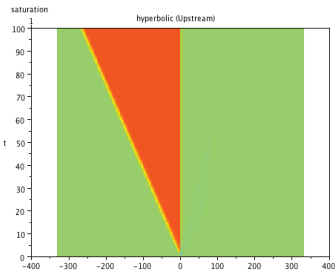
Interprétation à la lumière des ICC : ([A.'15])

- dans les modèles physiques, on peut expliciter une ICC (formelle) \mathcal{H}
- comme dans le cas de CB, on doit projeter \mathcal{H} pour obtenir $\tilde{\mathcal{H}}$
le graphe d'ICC effective ; cela se décrit en termes des flux de Godunov
- \mathcal{H} étant 1-monotone, la projection $\tilde{\mathcal{H}}$ hérite la 1-monotonie
- le domaine de $\tilde{\mathcal{H}} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ (1-monotone) est un germe \mathcal{G} L^1 -dissipatif

Conclusion : avec le formalisme des “graphes ICC” il devient plus facile d'identifier le couplage derrière un modèle physique

CB et CCI dissipatives dans le cas hyperbolique.

Exemples numériques Buckley-Leverett : le rôle d'ICC



Gauche : Deux solutions pour la même équation (ICC's cachées)

Droite : Solutions du modèle plus précis ($\varepsilon = 10^{-3}$, ICC explicites).

CB Dirichlet dans le cas parabolique dégénéré. Trace-régularité.

BC et ICC dans le pas parabolique dégénéré ?

Le principe des BC et ICC dissipatives comprend tout genre de flux $F[u]$, notamment (modèles de sédimentation par ex.) les flux $F[u] = f(u) - \nabla\varphi(u)$; typiquement, $\varphi(u) = (u - u_c)^+$.

Difficulté : existence des traces – de la solution ? – du flux ???

Dès lors, quel sens donner à $\gamma_{ad hoc} \left\{ \text{sign}(u - \hat{u})(F[u] - F[\hat{u}]) \cdot \mathbf{n} \right\}$?

NB: cas hyperbolique, traces fortes existent [Vasseur'01, Panov'07]

Plusieurs travaux faux dans la littérature. Sinon, travaux très techniques [Otto'96],[Mascia, Porretta, Terracina'02],[Vallet'05] basées sur les traces faibles et IK/inégalités entropiques jusqu'au bord

⇒ [Thèse M.Gazibo'13],[A., Gazibo'15?] : expliciter les CB effectives

Résultats :

- pour le pb. de Dirichlet, on décrit le graphe effectif $\tilde{\beta}$
- on met en avant la “trace-régularité” des solutions suffisante pour obtenir IK jusqu'au bord à partir de IK locale.
- Hélas, trace-régularité n'est pas garantie sauf pb. stationnaire 1D

Morale : Formulation qui reste heuristique ? Ok pour le numérique !

CB Dirichlet dans le cas parabolique dégénéré. Trace-régularité.

BC et ICC dans le cas parabolique dégénéré ?

Le principe des BC et ICC dissipatives comprend tout genre de flux $F[u]$, notamment (modèles de sédimentation par ex.) les flux $F[u] = f(u) - \nabla \varphi(u)$; typiquement, $\varphi(u) = (u - u_c)^+$.

Difficulté : existence des traces – de la solution ? – du flux ???

Dès lors, quel sens donner à $\gamma_{ad hoc} \left\{ \text{sign}(u - \hat{u})(F[u] - F[\hat{u}]) \cdot \mathbf{n} \right\}$?

NB: cas hyperbolique, traces fortes existent [Vasseur'01, Panov'07]

Plusieurs travaux faux dans la littérature. Sinon, travaux très techniques [Otto'96], [Mascia, Porretta, Terracina'02], [Vallet'05] basées sur les traces faibles et IK/inégalités entropiques jusqu'au bord

⇒ [Thèse M.Gazibo'13], [A., Gazibo'15?] : expliciter les CB effectives

Résultats :

- pour le pb. de Dirichlet, on décrit le graphe effectif $\tilde{\beta}$
- on met en avant la “trace-régularité” des solutions suffisante pour obtenir IK jusqu'au bord à partir de IK locale.
- Hélas, trace-régularité n'est pas garantie sauf pb. stationnaire 1D

Morale : Formulation qui reste heuristique ? Ok pour le numérique !

BC et ICC dans le pas parabolique dégénéré ?

Le principe des BC et ICC dissipatives comprend tout genre de flux $F[u]$, notamment (modèles de sédimentation par ex.) les flux $F[u] = f(u) - \nabla \varphi(u)$; typiquement, $\varphi(u) = (u - u_c)^+$.

Difficulté : existence des traces – de la solution ? – du flux ???

Dès lors, quel sens donner à $\gamma_{ad hoc} \left\{ \text{sign}(u - \hat{u})(F[u] - F[\hat{u}]) \cdot \mathbf{n} \right\}$?

NB: cas hyperbolique, traces fortes existent [Vasseur'01, Panov'07]

Plusieurs travaux faux dans la littérature. Sinon, travaux très techniques [Otto'96],[Mascia, Porretta, Terracina'02],[Vallet'05] basées sur les traces faibles et IK/inégalités entropiques jusqu'au bord

⇒ [Thèse M.Gazibo'13],[A., Gazibo'15?] : expliciter les CB effectives

Résultats :

- pour le pb. de Dirichlet, on décrit le graphe effectif $\tilde{\beta}$
- on met en avant la “trace-régularité” des solutions suffisante pour obtenir IK jusqu'au bord à partir de IK locale.
- Hélas, trace-régularité n'est pas garantie sauf pb. stationnaire 1D

Morale : Formulation qui reste heuristique ? Ok pour le numérique !

Inégalités entropiques et IK jusqu'au bord.

Finalement, le principe “IK local \Rightarrow IK jusqu'au bord” est douteux.

Piste naturelle : obtenir directement les IK jusqu'au bord

NB: après tout, pour $u - \Delta\varphi(u) = g$ avec CB Dirichlet, c'est direct !

Dans la pratique “hyperbolique”, cela signifie

- inégalités entropiques jusqu'au bord...?
- savoir dédoubler les variables jusqu'au bord...?

Exemple : condition “zéro-flux”, [Bürger,Frid,Karlsen'09] cas hyperb.

Problème ouvert Unicité pour zéro-flux parab.-hyperb. multi-D ?

Résultats : [A.,Bouhsiss'04] cas non dégén., [A.,Gazibo'13] cas 1D

- une formulation entropique jusqu'au bord pour zéro-flux
- l'idée de dédoubler “en desymétrisant” le support de $\xi_n(x, y)$:
- besoin de “régularité près du bord” pour \hat{u} , avec u générale
- “famille dense” de sol. de cette régularité pour le pb. stationnaire (cas non dégénéré, [Lieberman'87] ; cas dégénéré 1D, évident)
- on conclut avec un coup d'accrétivité + solutions intégrales.

Inégalités entropiques et IK jusqu'au bord.

Finalement, le principe “IK local \Rightarrow IK jusqu'au bord” est douteux.

Piste naturelle : obtenir directement les IK jusqu'au bord

NB: après tout, pour $u - \Delta\varphi(u) = g$ avec CB Dirichlet, c'est direct !

Dans la pratique “hyperbolique”, cela signifie

- inégalités entropiques jusqu'au bord...?
- savoir dédoubler les variables jusqu'au bord...?

Exemple : condition “zéro-flux”, [Bürger,Frid,Karlsen'09] cas hyperb.

Problème ouvert Unicité pour zéro-flux parab.-hyperb. multi-D ?

Résultats : [A.,Bouhsiss'04] cas non dégén., [A.,Gazibo'13] cas 1D

- une formulation entropique jusqu'au bord pour zéro-flux
- l'idée de dédoubler “en desymétrisant” le support de $\xi_n(x, y)$:
- besoin de “régularité près du bord” pour \hat{u} , avec u générale
- “famille dense” de sol. de cette régularité pour le pb. stationnaire (cas non dégénéré, [Lieberman'87] ; cas dégénéré 1D, évident)
- on conclut avec un coup d'accrétivité + solutions intégrales.

Inégalités entropiques et IK jusqu'au bord.

Finalement, le principe “IK local \Rightarrow IK jusqu'au bord” est douteux.

Piste naturelle : obtenir directement les IK jusqu'au bord

NB: après tout, pour $u - \Delta\varphi(u) = g$ avec CB Dirichlet, c'est direct !

Dans la pratique “hyperbolique”, cela signifie

- inégalités entropiques jusqu'au bord...?
- savoir dédoubler les variables jusqu'au bord...?

Exemple : condition “zéro-flux”, [Bürger,Frid,Karlsen'09] cas hyperb.

Problème ouvert Unicité pour zéro-flux parab.-hyperb. multi-D ?

Résultats : [A.,Bouhsiss'04] cas non dégén., [A.,Gazibo'13] cas 1D

- une formulation entropique jusqu'au bord pour zéro-flux
- l'idée de dédoubler “en desymétrisant” le support de $\xi_n(x, y)$:
- besoin de “régularité près du bord” pour \hat{u} , avec u générale
- “famille dense” de sol. de cette régularité pour le pb. stationnaire (cas non dégénéré, [Lieberman'87] ; cas dégénéré 1D, évident)
- on conclut avec un coup d'accrétivité + solutions intégrales.

Inégalités entropiques et IK jusqu'au bord.

Finalement, le principe “IK local \Rightarrow IK jusqu'au bord” est douteux.

Piste naturelle : obtenir directement les IK jusqu'au bord

NB: après tout, pour $u - \Delta\varphi(u) = g$ avec CB Dirichlet, c'est direct !

Dans la pratique “hyperbolique”, cela signifie

- inégalités entropiques jusqu'au bord...?
- savoir dédoubler les variables jusqu'au bord...?

Exemple : condition “zéro-flux”, [Bürger,Frid,Karlsen'09] cas hyperb.

Problème ouvert Unicité pour zéro-flux parab.-hyperb. multi-D ?

Résultats : [A.,Bouhsiss'04] cas non dégén., [A.,Gazibo'13] cas 1D

- une formulation entropique jusqu'au bord pour zéro-flux
- l'idée de dédoubler “en desymétrisant” le support de $\xi_n(x, y)$:
- besoin de “régularité près du bord” pour \hat{u} , avec u générale
- “famille dense” de sol. de cette régularité pour le pb. stationnaire (cas non dégénéré, [Lieberman'87] ; cas dégénéré 1D, évident)
- on conclut avec un coup d'accrétivité+ solutions intégrales.

Inégalités entropiques et IK jusqu'au bord.

Finalement, le principe “IK local \Rightarrow IK jusqu'au bord” est douteux.

Piste naturelle : obtenir directement les IK jusqu'au bord

NB: après tout, pour $u - \Delta\varphi(u) = g$ avec CB Dirichlet, c'est direct !

Dans la pratique “hyperbolique”, cela signifie

- inégalités entropiques jusqu'au bord...?
- savoir dédoubler les variables jusqu'au bord...?

Exemple : condition “zéro-flux”, [Bürger,Frid,Karlsen'09] cas hyperb.

Problème ouvert Unicité pour zéro-flux parab.-hyperb. multi-D ?

Résultats : [A.,Bouhsiss'04] cas non dégén., [A.,Gazibo'13] cas 1D

- une formulation entropique jusqu'au bord pour zéro-flux
- l'idée de dédoubler “en desymétrisant” le support de $\xi_n(x, y)$:
- besoin de “régularité près du bord” pour \hat{u} , avec u générale
- “famille dense” de sol. de cette régularité pour le pb. stationnaire (cas non dégénéré, [Lieberman'87] ; cas dégénéré 1D, évident)
- on conclut avec un coup d'accrétivité+ solutions intégrales.

Inégalités entropiques et IK jusqu'au bord.

Finalement, le principe “IK local \Rightarrow IK jusqu'au bord” est douteux.

Piste naturelle : obtenir directement les IK jusqu'au bord

NB: après tout, pour $u - \Delta\varphi(u) = g$ avec CB Dirichlet, c'est direct !

Dans la pratique “hyperbolique”, cela signifie

- inégalités entropiques jusqu'au bord...?
- savoir dédoubler les variables jusqu'au bord...?

Exemple : condition “zéro-flux”, [Bürger,Frid,Karlsen'09] cas hyperb.

Problème ouvert Unicité pour zéro-flux parab.-hyperb. multi-D ?

Résultats : [A.,Bouhsiss'04] cas non dégén., [A.,Gazibo'13] cas 1D

- une formulation entropique jusqu'au bord pour zéro-flux
- l'idée de dédoubler “en desymétrisant” le support de $\xi_n(x, y)$:
- besoin de “régularité près du bord” pour \hat{u} , avec u générale
- “famille dense” de sol. de cette régularité pour le pb. stationnaire (cas non dégénéré, [Lieberman'87] ; cas dégénéré 1D, évident)
- on conclut avec un coup d'accrétivité + solutions intégrales.

Merci !**MERCI****pour votre attention !**