

Le style mathématique

Stefan Neuwirth

Journée d'étude *Sciences antiques et Humanités* du 23.5.2007

1 Avertissement

Je donne cet exposé en tant que mathématicien amateur de littérature et de philosophie. J'aurais aimé jeté un regard littéraire sur les œuvres mathématiques. Or ma recherche ne me donne qu'exceptionnellement l'occasion de consulter des textes qui auraient une valeur littéraire. J'évoquerai donc seulement la notation mathématique actuelle sans m'arrêter sur la pauvreté de la langue naturelle utilisée de manière interstitielle par les mathématiciens.

2 Science objective et style subjectif

Gilles-Gaston Granger évoque la question dans [Gra68, §I,8] : « l'individuel apparaît nécessairement tout d'abord comme le côté négatif des structures. » Il distingue trois niveaux d'individuation de la pensée scientifique :

- la contingence du mode de structuration : « La multiplicité des structures possibles apparaît évidemment à l'historien consciencieux qui refuse de fermer les yeux sur les projets avortés, les rêveries, les hérésies, de la pensée scientifique. » [Gra68, §I,9]
- la personnalité du chercheur : « Parler du caractère d'un individu, c'est donc le définir comme *organisme de réception et d'émission de messages* » [Gra68, §I,10].
- la singularité des actes de création scientifique : « on pourrait, croyons-nous, interpréter par une analyse assez soigneuse presque tous ces événements comme manifestations sensibles et signes apparents de situations concrètes complexes, dans lesquelles le découvreur ne joue nullement le rôle de récepteur d'un message fortuit, mais celui de l'acteur qui se saisit pratiquement d'une *conjoncture*. » [Gra68, §I,11]

3 Styles de raisonnement

Ian Hacking étudie dans [Hac01] le « style du laboratoire » et le « style statistique » comme deux styles de raisonnement : « Le style de raisonnement le plus puissant, celui qui a rendu possible le monde moderne, celui qui a irrémédiablement bouleversé l'univers – de fond en comble –, celui qui transforme et réinvente le monde actuel, c'est, sans aucun doute, celui que j'appelle le style du laboratoire, celui qui a émergé il y a quatre cents ans. Autrefois, on étudiait, on observait, on spéculait sur des phénomènes. Aujourd'hui, on fabrique des phénomènes, on les isole, on les purifie. [...] Il y a bien d'autres styles de raisonnement. L'un d'entre eux, auquel j'ai peut-être consacré une part trop importante de ma vie, est le style statistique. Il a totalement modifié l'expérience que nous faisons du monde dans lequel nous vivons au jour le jour, un monde intégralement marqué du sceau de la probabilité : la sexualité, le sport, la maladie, la politique, l'économie, l'électron. [...] Néanmoins, mon objectif est métaphysique, et ce qui me tient à cœur, c'est la vérité elle-même, ou, plus exactement, comment un style de raisonnement introduit de nouvelles façons de trouver la vérité. Car je prétends que chaque style introduit, en matière de preuve et de démonstration, son propre type de critères, et qu'il détermine les conditions de vérité propres aux domaines auxquels on en vient à l'appliquer. Ceci

me conduit à des thèses tout à fait radicales sur la vérité et l'objectivité, et sur la réalité des objets scientifiques eux-mêmes. Un style de raisonnement est plus qu'un ensemble de techniques destinées à mettre en évidence de nouveaux types de faits, à les intégrer dans cet univers dans lequel nous vivons, pensons et agissons ensemble. Je prétends même qu'un style crée ses critères de vérité. Il s'auto-justifie. »

4 Le style axiomatique

Comparons les quatre premières définitions des *Éléments* d'Euclide [Euc14]

I.1 Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

I.2 Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.

I.3 Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.

I.4 Εὐθεῖα γραμμὴ ἐστίν, ἣτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

I. Déf. 1 Le point est ce dont la partie est nulle.

I. Déf. 2 Une ligne est une longueur sans largeur.

I. Déf. 3 Les extrémités d'une ligne sont des points.

I. Déf. 4 La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points.

aux cinq premières propositions du *Tractatus logico-philosophicus* de Ludwig Wittgenstein [Wit22] :

1 Die Welt ist alles, was der Fall ist.

1.1 Die Welt ist die Gesamtheit der Tatsachen, nicht der Dinge.

1.11 Die Welt ist durch die Tatsachen bestimmt und dadurch, dass es alle Tatsachen sind.

1.12 Denn, die Gesamtheit der Tatsachen bestimmt, was der Fall ist und auch, was alles nicht der Fall ist.

1.13 Die Tatsachen im logischen Raum sind die Welt.

1 Le monde est tout ce qui est le cas.

1.1 Le monde est la totalité des faits, non des choses.

1.11 Le monde est déterminé par les faits, et par cela qu'ils sont tous les faits.

1.12 Car l'ensemble des faits détermine ce qui est le cas, et aussi ce qui n'est pas le cas.

1.13 Les faits dans l'espace logique sont le monde.

Cela illustre le succès du style développé par l'auteur des *Éléments* pour sa méthode axiomatique.

5 La notation mathématique

Lire [Fre02] pour une introduction au formalisme algébrique selon le plan suivant :

1. La syntaxe des formules algébriques (la ponctuation qui structure par agrégation.)

2. Le sens des formules algébriques.

3. Les lettres (d'abord utilisées pour numéroter les points d'une figure géométrique, les lettres servent depuis Viète d'inconnues et d'indéterminées sur lesquelles on peut opérer.)

4. Les indices.

Cet article traite aussi de

- la notation fonctionnelle (« Imaginons une boîte noire avec un nombre de cadrans où l'on peut lire et ajuster certaines grandeurs, qui par des lois internes de la boîte, peuvent dépendre les unes des autres. À partir des grandeurs qui s'expriment sur les cadrans, on peut former de nouvelles grandeurs, algébriquement et en divisant l'accroissement infinitésimal d'une grandeur par celui d'une seconde grandeur (alors que les autres grandeurs sont fixes ou variables, d'après des modes prescrits.) Tous ces processus peuvent s'effectuer abstraitement, sans que les dépendances fonctionnelles entre les grandeurs soient jamais explicitées. »)
- la notation logique comme le connecteur \Rightarrow et les quantificateurs \exists et \forall .

6 L'exactitude

La notation mathématique poursuit un mouvement vers l'explicite et l'exactitude. Cet idéal est partagé par Italo Calvino comme il l'écrit dans sa leçon américaine *Esattezza* [Cal88] :

Esattezza vuol dire per me soprattutto tre cose :

- 1) un disegno dell'opera ben definito e ben calcolato ;
- 2) l'evocazione d'immagini visuali nitide, incisive, memorabili ; in italiano abbiamo un aggettivo che non existe in inglese, « icastico », dal greco $\epsilon\iota\kappa\alpha\sigma\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma$;
- 3) un linguaggio il più preciso possibile come lessico e come resa delle sfumature del pensiero e dell'immaginazione.

Exactitude veut dire pour moi surtout trois choses :

- 1) un projet d'ouvrage défini et calculé avec justesse ;
- 2) l'évocation d'images visuelles nettes, incisives, mémorables ; l'italien dispose pour les définir de l'adjectif « icastico » (du grec $\epsilon\iota\kappa\alpha\sigma\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma$), qui n'existe pas en anglais ;
- 3) un langage aussi précis que possible dans son lexique, comme dans le respect des nuances de l'imagination et de la pensée.

Voici un passage de la même leçon sur le rapport entre littérature et mathématique :

Questo legame tra le scelte formali della composizione letteraria e il bisogno di un modello cosmologico (ossia d'un quadro mitologico generale) credo sia presente anche negli autori che non lo dichiarano in modo esplicito. Il gusto della composizione geometrizzante, di cui potremmo tracciare una storia nella letteratura mondiale a partire da Mallarmé, ha sullo sfondo l'opposizione ordine-disordine, fondamentale nella scienza contemporanea.

Ce lien entre les choix formels de la composition littéraire et le besoin d'un modèle cosmologique (ou plutôt, d'un cadre mythologique général), il me semble le voir se nouer même chez les auteurs qui ne l'affirment pas explicitement. Le goût de la composition géométrisante, dont nous pourrions retracer l'histoire en parcourant la littérature mondiale à partir de Mallarmé, repose sur l'opposition ordre-désordre, fondamentale dans la science contemporaine.

7 Le mathématicien est-il littéraire ou philosophe ?

Dans son *Fronton* [Qui95], Pascal Quignard prend parti pour une supériorité de la littérature sur la philosophie. Il cite Fronton : « Il se trouve que le philosophe peut être imposteur et que l'amateur des lettres ne peut l'être. Le littéraire est chaque mot. D'autre part, son investigation propre est plus profonde à cause de l'image. »

En lisant les premières pages du *Fronton*, le mathématicien se retrouve naturellement dans le camp du littéraire lorsque Quignard écrit : « L'écrivain est celui qui choisit son langage et n'en est pas dominé. Il est le contraire de l'enfant. Il ne mendie pas ce qui le domine. Il travaille à ce qui le libère. » Lui aussi est ainsi exhorté dans l'élaboration de sa notation : « combats avec le langage dont il te faut dérouiller jour après jour la lame, pour la faire resplendir. »

Bibliographie

- [Cal88] I. CALVINO – « Esattezza », *Lezioni americane : sei proposte per il prossimo millennio*, Garzanti, Milano, 1988, Traduction par Yves Hersant : « Exactitude », *Leçons américaines : aide-mémoire pour le prochain millénaire*, Gallimard, Paris, 1992.
- [Euc14] EUCLIDE – *Les Œuvres d'Euclide, en grec, en latin et en français : d'après un manuscrit très ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours*, vol. 1, M. Patris, 1814, traduit et édité par François Peyrard.
- [Fre02] H. FREUDENTHAL – « **Notation mathématique** », *Encyclopædia universalis*, Paris, 2002.
- [Gra68] G.-G. GRANGER – *Essai d'une philosophie du style*, A. Colin, Paris, 1968.
- [Hac01] I. HACKING – *Leçon inaugurale faite le jeudi 11 janvier 2001*, Collège de France, Paris, 2001.
- [Qui95] P. QUIGNARD – « Fronton », *Rhétorique spéculative*, Calmann-Lévy, Paris, 1995.
- [Wit22] L. WITTGENSTEIN – *Tractatus logico-philosophicus*, Kegan Paul Trench Trubner, London, 1922, Traduction par Gilles-Gaston Granger chez Gallimard, Paris, 1993.