

UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

MINI-PROJET DE MASTER 2

Géométrie à petite et grande échelles
des espaces de Banach

FOVELLE Audrey

Encadrant : M. LANCIEN Gilles

Année 2019-2020

Table des matières

| | | |
|----------|----------------------------------------------------|-----------|
| 1 | Quelques résultats obtenus par Rosendal | 3 |
| 2 | Contre-exemple de Naor | 18 |
| 3 | Prolongement d'applications lipschitziennes | 25 |
| 3.1 | Fonctions à valeurs réelles et complexes | 25 |
| 3.2 | Fonctions à valeurs dans ℓ_∞ | 26 |
| 3.3 | Fonctions à valeurs dans c_0 | 27 |
| A | L'espace de James J | 30 |
| A.1 | Définition et premières propriétés | 30 |
| A.2 | Non-réflexivité de l'espace de James | 36 |
| A.3 | Quelques conséquences | 40 |

Introduction

Lorsqu'on cherche à classifier les espaces de Banach en fonction des propriétés qu'ils possèdent, on est amené à étudier la stabilité de ces propriétés à travers certains type d'applications. Par exemple, si l'on s'intéresse à la structure algébrique d'un Banach, on va considérer des isomorphismes ou des isométries linéaires, alors que si l'on s'intéresse seulement à sa structure topologique, considérer des homéomorphismes suffit.

Si c'est la structure grossière d'un espace qui nous intéresse, on va considérer des plongements grossiers tandis que les plongements uniformes seront plutôt utilisés pour conserver des propriétés infinitésimales.

Le fait qu'un espace de Banach se plonge grossièrement dans un espace de Hilbert si et seulement si il se plonge uniformément dans un espace de Hilbert suggère un lien entre les structures grossière et uniforme. Cependant, dans le cas général, on ne sait pas si l'existence d'un plongement uniforme implique l'existence d'un plongement grossier, et réciproquement.

Cependant, Rosenthal a montré (cf [6]) que si un Banach X se plonge uniformément dans un Banach E , alors, pour tout $p \in [1, +\infty[$, il se plonge fortement dans $\ell_p(E)$ et que l'existence d'un plongement grossier uniformément continu dans E implique l'existence d'un plongement fort dans $\ell_p(E)$. Avec des hypothèses plus fortes, il raffine ce résultat : l'existence d'un plongement uniforme d'un Banach X dans la boule unité fermée d'un Banach E entraîne l'existence d'un plongement grossier uniformément continu de X dans $E \oplus E$. Il a également prouvé que si (X, E) est un couple de Banach vérifiant : [pour tout 1-réseau \mathcal{N} de X , toute application lipschitzienne $f : \mathcal{N} \rightarrow E$ admet un prolongement $F : X \rightarrow E$ uniformément continu (*)], l'existence d'un plongement grossier de X dans E implique l'existence d'un plongement fort de X dans $\ell_p(E)$, pour tout $p \in [1, +\infty[$.

La première partie de ce mémoire est consacrée à la preuve de ces résultats.

Rosenthal s'est alors naturellement demandé si tout couple de Banach vérifiait (*). Un résultat de Naor (cf [4]) répond par la négative à cette question en exhibant un couple de Banach (X, Y) ne vérifiant pas (*).

Nous reprendrons la preuve de ce contre-exemple dans la deuxième partie.

Il existe toutefois des espaces se comportant très bien vis-à-vis du prolongement des applications lipschitziennes. En particulier, on peut toujours prolonger une application lipschitzienne à valeurs dans \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{R}^n , ℓ_∞ ou encore c_0 , en une application lipschitzienne, ce qui fait l'objet de la troisième et dernière partie de ce mémoire.

1 Quelques résultats obtenus par Rosendal

Avant d'énoncer les premiers résultats, introduisons un peu de vocabulaire.

Définition 1. Soit (M, d) un espace métrique, $0 < A \leq B$. On dit qu'un ensemble $\mathcal{N} \subset M$ est un (A, B) -réseau de M si :

- (i) pour tous $x \neq y \in \mathcal{N}$, $d(x, y) \geq A$;
- (ii) pour tout $z \in M$, il existe $x \in \mathcal{N}$ tel que $d(x, z) < B$.

Si $B = A$, on dit simplement que \mathcal{N} est un A -réseau de M .

Définition 2. Soit (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques, $\sigma : (X, d) \rightarrow (Y, \delta)$ une application.

- Le module de compression de σ est l'application :

$$\rho_\sigma : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+} \\ t & \mapsto \inf\{\delta(\sigma(a), \sigma(b)); (a, b) \in X^2, d(a, b) \geq t\} \end{cases}$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$;

- Le module d'expansion de σ est l'application :

$$\omega_\sigma : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+} \\ t & \mapsto \sup\{\delta(\sigma(a), \sigma(b)); (a, b) \in X^2, d(a, b) \leq t\} \end{cases} ;$$

- On dit que σ est un plongement uniforme si $\lim_{t \rightarrow 0^+} \omega_\sigma(t) = 0$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\rho_\sigma(t) > 0$;
- On dit que σ est bornologique si, pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\omega_\sigma(t) < +\infty$;
- On dit que σ est un plongement grossier si σ est bornologique et que $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_\sigma(t) = +\infty$;
- On dit que l'application σ est non-évanescence s'il existe $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $t \geq t_0$, on ait $\rho_\sigma(t) > 0$;
- On dit que σ est un plongement fort si σ est un plongement à la fois uniforme et grossier.

Remarque 1. • En reprenant les notations de la définition précédente, on dit que σ est uniformément continue si $\lim_{t \rightarrow 0^+} \omega_\sigma(t) = 0$, et, dans ce cas, on appelle également ω_σ le module d'uniforme continuité de σ ;

- Un plongement uniforme est non-évanescence.

Il peut arriver qu'une application uniformément continue soit automatiquement bornologique. C'est en particulier le cas si l'espace de départ est métriquement convexe, comme le montre la proposition 1 ci-dessous.

Définition 3. Un espace métrique (X, d) est dit métriquement convexe si pour tout $(x, y) \in X^2$, pour tout $\lambda \in]0, 1[$, il existe $z_\lambda \in X$ vérifiant :

$$d(x, z_\lambda) = \lambda d(x, y) \text{ et } d(y, z_\lambda) = (1 - \lambda)d(x, y).$$

Remarque 2. Tout espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|)$ est métriquement convexe. En effet, soit $(x, y) \in X^2$, $\lambda \in]0, 1[$, si on pose $z_\lambda = x - \lambda(x - y)$, on a :

$$\|x - z_\lambda\| = \lambda \|x - y\| \text{ et } \|y - z_\lambda\| = (1 - \lambda)\|x - y\|.$$

Proposition 1. Soit (X, d) , (Y, δ) deux espaces métriques, $f : X \rightarrow Y$ une application uniformément continue. On note ω_f son module de continuité et on suppose (X, d) métriquement convexe.

On a alors : pour tout $s \in \mathbb{R}^{+*}$, $\omega_f(s) < \infty$.

Démonstration. Puisque f est uniformément continue, on a $\lim_{t \rightarrow 0} \omega_f(t) = 0$ donc il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [0, \eta]$, $\omega_f(t) \leq 1$.

Soit $s \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrons qu'il existe une constante $C_s > 0$ telle que, pour tout $(x, y) \in X^2$ vérifiant $d(x, y) \leq s$, on ait $\delta(f(x), f(y)) \leq C_s$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $N \geq 2$ et $\frac{s}{N} \leq \eta$.

Soit $(x, y) \in X^2$ vérifiant $d(x, y) \leq s$.

Puisque X est métriquement convexe, il existe $x_0 = x, x_1, \dots, x_N = y \in X$ tels que, pour tout $i \in [0, N-1]$, $d(x_i, x_{i+1}) = \frac{1}{N}d(x, y)$, pour tout $j \in [0, N]$, $d(x_j, y) = \frac{N-j}{N}d(x, y)$.

Puisque $\frac{1}{N}d(x, y) \leq \frac{s}{N} \leq \eta$, l'inégalité triangulaire assure que :

$$\delta(f(x), f(y)) \leq \sum_{j=0}^{N-1} \delta(f(x_j), f(x_{j+1})) \leq \sum_{j=0}^{N-1} \omega_f\left(\frac{1}{N}d(x, y)\right) \leq N.$$

On a donc bien le résultat avec $C_s = N$. □

Afin d'énoncer un premier lien entre plongement uniforme et plongement grossier entre espaces de Banach, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 1. *Soit X et E des espaces de Banach, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset E^E$ une suite de projections bornées sur des sous-espaces $E_n \subset E$, $n \in \mathbb{N}^*$, vérifiant :*

$$\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, m \neq n \implies E_m \subset \ker(P_n).$$

Soit $(\sigma_n : X \rightarrow E_n)_{n \in \mathbb{N}^}$ une suite d'applications non-évanescents uniformément continues. Alors X admet un plongement fort dans E .*

Démonstration. Quitte à effectuer des translations, on peut supposer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_n(0) = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, σ_n est une application non-évanescence uniformément continue donc il existe $(\Delta_n, \delta_n, \varepsilon_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^3$ tel que :

$$\forall (x, y) \in X^2, \|x - y\| \geq \Delta_n \implies \|\sigma_n(x) - \sigma_n(y)\| \geq \delta_n$$

et :

$$\forall (x, y) \in X^2, \|x - y\| \leq \varepsilon_n \implies \|\sigma_n(x) - \sigma_n(y)\| \leq 2^{-n}.$$

Soit $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(x, y) \in X^2$. Notons que, si $\|x - y\| \leq k\varepsilon_n$, alors il existe $z_0 = x, z_1, \dots, z_k = y \in X$ tels que, pour tout $i \in [0, k-1]$, $\|z_i - z_{i+1}\| = \frac{1}{k}\|x - y\| \leq \varepsilon_n$, ce qui assure que :

$$\|\sigma_n(x) - \sigma_n(y)\| \leq \sum_{i=1}^k \|\sigma_n(z_{i-1}) - \sigma_n(z_i)\| \leq k2^{-n}$$

d'où, pour tout $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a :

$$\forall (x, y) \in X^2, \|x - y\| \leq k\varepsilon_n \implies \|\sigma_n(x) - \sigma_n(y)\| \leq k2^{-n}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose alors $\psi_n : \begin{cases} X & \rightarrow E_n \\ x & \mapsto \frac{1}{\left\lceil \frac{n^2 \Delta_n}{\varepsilon_n} \right\rceil} \sigma_n(n \Delta_n x) \end{cases}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(x, y) \in X^2$. D'après ce qui précède, comme $\left\lceil \frac{n^2 \Delta_n}{\varepsilon_n} \right\rceil \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \|x - y\| \leq n &\implies \|n \Delta_n x - n \Delta_n y\| \leq n^2 \Delta_n < \left\lceil \frac{n^2 \Delta_n}{\varepsilon_n} \right\rceil \varepsilon_n \\ &\implies \|\sigma_n(n \Delta_n x) - \sigma_n(n \Delta_n y)\| \leq \left\lceil \frac{n^2 \Delta_n}{\varepsilon_n} \right\rceil 2^{-n} \\ &\implies \|\psi_n(x) - \psi_n(y)\| \leq 2^{-n} \end{aligned}$$

et on a également :

$$\begin{aligned} \|x - y\| \geq \frac{1}{n} &\implies \|n \Delta_n x - n \Delta_n y\| \geq \Delta_n \\ &\implies \|\sigma_n(n \Delta_n x) - \sigma_n(n \Delta_n y)\| \geq \delta_n \\ &\implies \|\psi_n(x) - \psi_n(y)\| \geq \frac{\delta_n}{\left\lceil \frac{n^2 \Delta_n}{\varepsilon_n} \right\rceil}. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par uniforme continuité de σ_n , il existe $\xi_n > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in X^2$, on ait :

$$\|x - y\| \leq \xi_n \implies \|\sigma_n(x) - \sigma_n(y)\| \leq \frac{\delta_n 2^{-n}}{n \|P_n\|}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose alors $\phi_n : \begin{cases} X & \rightarrow E_n \\ x & \mapsto \frac{n \|P_n\|}{\delta_n} \sigma_n\left(\frac{\xi_n}{n} x\right) \end{cases}$. On note que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(x, y) \in X^2$, on a :

$$\begin{aligned} \|x - y\| \leq n &\implies \left\| \frac{\xi_n}{n} x - \frac{\xi_n}{n} y \right\| \leq \xi_n \\ &\implies \left\| \sigma_n\left(\frac{\xi_n}{n} x\right) - \sigma_n\left(\frac{\xi_n}{n} y\right) \right\| \leq \frac{\delta_n 2^{-n}}{n \|P_n\|} \\ &\implies \|\phi_n(x) - \phi_n(y)\| \leq 2^{-n} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \|x - y\| \geq \frac{n \Delta_n}{\xi_n} &\implies \left\| \frac{\xi_n}{n} x - \frac{\xi_n}{n} y \right\| \geq \Delta_n \\ &\implies \left\| \sigma_n\left(\frac{\xi_n}{n} x\right) - \sigma_n\left(\frac{\xi_n}{n} y\right) \right\| \geq \delta_n \\ &\implies \|\phi_n(x) - \phi_n(y)\| \geq n \|P_n\|. \end{aligned}$$

En particulier, pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $(x, y) \in X^2$, si $\|x - y\| \leq m$, alors, pour tout $n \geq m$, $\|x - y\| \leq n$ d'où :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \|\psi_{2n-1}(x) - \psi_{2n-1}(y)\| &= \sum_{n=1}^{m-1} \|\psi_{2n-1}(x) - \psi_{2n-1}(y)\| + \sum_{n=m}^{\infty} \|\psi_{2n-1}(x) - \psi_{2n-1}(y)\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{m-1} \|\psi_{2n-1}(x) - \psi_{2n-1}(y)\| + \sum_{n=m}^{\infty} 2^{-(2n-1)} < +\infty \end{aligned}$$

et :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\phi_{2n}(x) - \phi_{2n}(y)\| \leq \sum_{n=1}^{m-1} \|\phi_{2n}(x) - \phi_{2n}(y)\| + \sum_{n=m}^{\infty} 2^{-2n} < \infty.$$

On en déduit (avec $y = 0$) que, pour tout $x \in X$, les séries $\sum_{n \geq 1} \psi_{2n-1}(x)$ et $\sum_{n \geq 1} \phi_{2n}(x)$ sont absolument convergentes dans l'espace de Banach E . On peut alors définir l'application :

$$\omega : \begin{cases} X & \rightarrow E \\ x & \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{2n-1}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{2n}(x) \end{cases} .$$

Montrons que ω est un plongement fort de X dans E .

• Commençons par montrer que ω est uniformément continue.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^{-2m+3} < \varepsilon$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ψ_n et ϕ_n sont uniformément continues car σ_n l'est donc $\sum_{n=1}^{m-1} \psi_{2n-1} + \sum_{n=1}^{m-1} \phi_{2n}$ l'est également, ce qui assure qu'il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in X^2$ on ait :

$$\|x - y\| < \eta \implies \left\| \left(\sum_{n=1}^{m-1} \psi_{2n-1}(x) + \sum_{n=1}^{m-1} \phi_{2n}(x) \right) - \left(\sum_{n=1}^{m-1} \psi_{2n-1}(y) + \sum_{n=1}^{m-1} \phi_{2n}(y) \right) \right\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On a alors, pour tout $(x, y) \in X^2$ vérifiant $\|x - y\| < \min(\eta, m)$:

$$\begin{aligned} \|\omega(x) - \omega(y)\| &\leq \left\| \left(\sum_{n=1}^{m-1} \psi_{2n-1}(x) + \sum_{n=1}^{m-1} \phi_{2n}(x) \right) - \left(\sum_{n=1}^{m-1} \psi_{2n-1}(y) + \sum_{n=1}^{m-1} \phi_{2n}(y) \right) \right\| \\ &\quad + \sum_{n=m}^{\infty} \|\psi_{2n-1}(x) - \psi_{2n-1}(y)\| + \sum_{n=m}^{\infty} \|\phi_{2n}(x) - \phi_{2n}(y)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{n=m}^{\infty} 2^{-2n+1} + \sum_{n=m}^{\infty} 2^{-2n} \\ &= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{3}(2^{-2m+3} + 2^{-2m+2}) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

donc ω est uniformément continue.

• Montrons désormais que ω est un plongement uniforme.

Il suffit de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(x, y) \in X^2$, on a :

$$\|x - y\| > \frac{1}{2n-1} \implies \|\omega(x) - \omega(y)\| \geq \frac{1}{\|P_{2n-1}\|} \frac{\delta_{2n-1}}{\left\lceil \frac{(2n-1)^2 \Delta_{2n-1}}{\varepsilon_{2n-1}} \right\rceil}$$

$$\text{car } \frac{1}{\|P_{2n-1}\|} \frac{\delta_{2n-1}}{\left\lceil \frac{(2n-1)^2 \Delta_{2n-1}}{\varepsilon_{2n-1}} \right\rceil} > 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(x, y) \in X^2$ tel que $\|x - y\| > \frac{1}{2n-1}$. On a :

$$\|\omega(x) - \omega(y)\| \geq \frac{1}{\|P_{2n-1}\|} \|P_{2n-1}(\omega(x)) - P_{2n-1}(\omega(y))\|.$$

Or P_{2n-1} est continue et, pour tout $m \neq 2n-1$, $E_m \subset \ker(P_{2n-1})$ donc $P_{2n-1}(\omega(x)) = \psi_{2n-1}(x)$ et $P_{2n-1}(\omega(y)) = \psi_{2n-1}(y)$ d'où :

$$\|\omega(x) - \omega(y)\| \geq \frac{1}{\|P_{2n-1}\|} \|\psi_{2n-1}(x) - \psi_{2n-1}(y)\| \geq \frac{1}{\|P_{2n-1}\|} \frac{\delta_{2n-1}}{\left\lceil \frac{(2n-1)^2 \Delta_{2n-1}}{\varepsilon_{2n-1}} \right\rceil}$$

ce qui assure que ω est un plongement uniforme.

• Montrons pour finir que ω est un plongement grossier.

D'après la proposition 1, comme ω est uniformément continue, ω est bornologique. Il suffit alors de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(x, y) \in X^2$, on a :

$$\|x - y\| \geq \frac{2n\Delta_{2n}}{\xi_{2n}} \implies \|\omega(x) - \omega(y)\| \geq 2n.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(x, y) \in X^2$ vérifiant $\|x - y\| \geq \frac{2n\Delta_{2n}}{\xi_{2n}}$, comme pour tout $m \neq n$, $E_m \subset \ker(P_n)$, on a comme précédemment :

$$\|\omega(x) - \omega(y)\| \geq \frac{1}{\|P_{2n}\|} \|P_{2n}(\omega(x)) - P_{2n}(\omega(y))\| = \frac{1}{\|P_{2n}\|} \|\phi_{2n}(x) - \phi_{2n}(y)\| \geq 2n$$

ce qui assure le résultat.

Finalement, X admet bien un plongement fort sur E . □

En appliquant ce lemme avec des projections explicites, on obtient le théorème suivant :

Théorème 1. *Soit X et E deux espaces de Banach, $\sigma : X \rightarrow E$ une application non-évanescence uniformément continue.*

Pour tout $p \in [1, +\infty[$, X admet un plongement fort dans $\ell_p(E)$.

Démonstration. Soit $p \in [1, +\infty[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_n = \{(0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n^e \text{ position}}}{x}, 0, \dots, 0 \dots), x \in E\} \subset \ell_p(E)$ et :

$$P_n : \begin{cases} \ell_p(E) & \rightarrow \ell_p(E) \\ x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}^*} & \mapsto (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n^e \text{ position}}}{x_n}, 0, \dots, 0 \dots) \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est une projection bornée sur E_n et, pour tout $m \neq n$, $E_m \subset \ker(P_n)$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application

$$\sigma_n : \begin{cases} X & \rightarrow E_n \\ x & \mapsto (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n^e \text{ position}}}{\sigma(x)}, 0, \dots, 0 \dots) \end{cases}$$

est non-évanescence uniformément continue donc on a le résultat par le lemme 1. □

On déduit immédiatement de ce théorème deux premiers corollaires, qui donnent un lien entre plongement uniforme et plongement grossier entre espaces de Banach.

Corollaire 1. *Soit X et E deux espaces de Banach.*

Si X admet un plongement grossier uniformément continu dans E , alors, pour tout $p \in [1, +\infty[$, X se plonge fortement dans $\ell_p(E)$.

Démonstration. Cela vient du fait qu'un plongement grossier est par définition une application non-évanescence. \square

Corollaire 2. *Soit X et E deux espaces de Banach.*

Si X se plonge uniformément dans E , alors, pour tout $p \in [1, +\infty[$, X se plonge fortement dans $\ell_p(E)$.

Démonstration. Cela vient du fait qu'un plongement uniforme est une application non-évanescence uniformément continue. \square

Il est alors naturel de se demander pour quels espaces de Banach E on peut obtenir un plongement fort dans E à partir d'un plongement uniforme dans E grâce à ce corollaire. Les trois résultats suivants prouvent qu'on peut le faire si $E = \ell_p$ ou $E = L_p(\mathbb{R})$, $p \in [1, +\infty[$. En effet, dans ce cas, pour tout $p \in [1, +\infty[$, $\ell_p(E)$ est isomorphe à E , ce qui n'est pas vrai pour tous les espaces de Banach, un contre-exemple étant donné en annexe.

Lemme 2. *Soit $p \in [1, +\infty[$.*

L'espace $\ell_p(\ell_p)$ est isométriquement isomorphe à ℓ_p .

Démonstration. \mathbb{N}^2 est dénombrable donc il existe une bijection $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ de \mathbb{N} sur \mathbb{N}^2 . On pose :

$$V : \begin{cases} \ell_p(\ell_p) & \rightarrow \ell_p \\ x = (x^n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto (u(x)_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

où, pour tout $x \in \ell_p(\ell_p)$, pour tout $(k, l) \in \mathbb{N}^2$, $u(x)_{(k,l)} = x^k(l)$.

Montrons que V est une isométrie linéaire surjective de $\ell_p(\ell_p)$ sur ℓ_p .

• On note que V est bien linéaire.

• V est une isométrie :

Pour tout $x = (x^n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_p(\ell_p)$, on a :

$$\|V(x)\|_p^p = \sum_{n \in \mathbb{N}} |x^{\psi(n)_1}(\psi(n)_2)|^p = \sum_{(k,l) \in \mathbb{N}^2} |x^k(l)|^p \stackrel{\text{FT}}{=} \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{l \in \mathbb{N}} |x^k(l)|^p = \sum_{k \in \mathbb{N}} \|x^k\|_p^p = \|x\|_p^p$$

Donc V est bien une isométrie (ce calcul montre aussi que V est bien définie).

• V est surjective :

Soit $y = (y(k))_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_p$. Pour tout $l \in \mathbb{N}$, si on note $(n, k) = \psi(l)$, on pose : $x^n(k) = y(l)$. On a alors $y = V(x)$ ce qui assure la surjectivité de V .

Donc V est une isométrie linéaire surjective de $\ell_p(\ell_p)$ sur ℓ_p , d'où $\ell_p(\ell_p) \equiv \ell_p$. \square

Lemme 3. *Soit $p \in [1, +\infty[$.*

L'espace $\ell_p(L_p(\mathbb{R}))$ est isométriquement isomorphe à $L_p(\mathbb{R})$.

Démonstration. • Étape 1 : $L_p(\mathbb{R})$ est isométriquement isomorphe à $L_p(]0, 1[)$

Montrons que $\varphi : \begin{cases} L_p(]0, 1[) & \rightarrow L_p(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ x & \mapsto f\left(\frac{1}{\pi} \arctan(x) + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{\pi(1+x^2)}\right)^{\frac{1}{p}} \end{cases} \end{cases}$ est une isomé-

trie linéaire surjective. Commençons par montrer que φ est bien définie.

Soit $f \in L_p(]0, 1[)$. En effectuant le changement de variable $u = \frac{1}{\pi} \arctan(x) + \frac{1}{2}$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \left| f\left(\frac{1}{\pi} \arctan(x) + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{\pi(1+x^2)}\right)^{\frac{1}{p}} \right|^p d\lambda(x) = \int_{]0,1[} |f(u)|^p d\lambda(u) = \|f\|_{L_p(]0,1[)}^p < +\infty$$

donc φ est bien définie et comme elle est linéaire, c'est une isométrie linéaire.

Montrons que φ est surjective. Soit $g \in L_p(\mathbb{R})$.

$$\text{Posons } f : \begin{cases}]0, 1[\rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto g\left(\tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)\right) \left(\frac{\pi}{\cos^2\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{p}}. \end{cases}$$

En effectuant le changement de variable $u = \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$, on montre que $f \in L_p(]0, 1[)$, et comme $\varphi(f) = g$, φ est bien surjective.

Donc φ est une isométrie linéaire surjective, ce qui assure que $L_p(\mathbb{R})$ est isométriquement isomorphe à $L_p(]0, 1[)$.

• Étape 2 : $L_p(\mathbb{R}^{+*})$ est isométriquement isomorphe à $L_p(\mathbb{R})$

On montre comme à l'étape 1 que l'application ψ définie par :

$$\psi : \begin{cases} L_p(\mathbb{R}^{+*}) \rightarrow L_p(\mathbb{R}) \\ x \mapsto \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto f(\exp(x))(\exp(x))^{\frac{1}{p}} \end{cases} \end{cases}$$

est une isométrie linéaire surjective, ce qui assure que $L_p(\mathbb{R}^+)$ est isométriquement isomorphe à $L_p(\mathbb{R})$.

• Étape 3 : $\ell_p(L_p(\mathbb{R}))$ est isométriquement isomorphe à $L_p(\mathbb{R}^+)$

Montrons que $J : \begin{cases} \ell_p(L_p(\mathbb{R})) \rightarrow L_p(\mathbb{R}^+) \\ (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{-1}(f_n)(\cdot - n) \mathbb{1}_{]n, n+1[} \end{cases}$ est une isométrie linéaire sur-

jective. Commençons par montrer que J est bien définie.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_p(L_p(\mathbb{R}))$. Comme φ est une isométrie, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{-1}(f_n)(x - n) \mathbb{1}_{]n, n+1[}(x) \right|^p d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}^+} \sum_{n=0}^{\infty} |\varphi^{-1}(f_n)(x - n)|^p \mathbb{1}_{]n, n+1[}(x) d\lambda(x) \\ &\stackrel{\text{FT}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{]n, n+1[} |\varphi^{-1}(f_n)(x - n)|^p d\lambda(x) \\ &\stackrel{u=x-n}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi^{-1}(f_n)\|_{L_p(]0, 1[)}^p \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{L_p(\mathbb{R})}^p < +\infty \end{aligned}$$

donc J est bien définie et comme elle est linéaire, c'est une isométrie linéaire.

Montrons que J est surjective. Soit $f \in L_p(\mathbb{R}^+)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = \varphi(f(\cdot + n) \mathbb{1}_{]0, 1[}) \in L_p(\mathbb{R})$. Puisque φ est une isométrie, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{L_p(\mathbb{R})}^p = \sum_{n=0}^{\infty} \|f(\cdot + n) \mathbb{1}_{]0, 1[}\|_{L_p(]0, 1[)}^p = \sum_{n=0}^{\infty} \|f \mathbb{1}_{]n, n+1[}\|_{L_p(\mathbb{R}^+)}^p = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^+)}^p < +\infty$$

donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_p(L_p(\mathbb{R}))$. Or $J((f_n)_{n \in \mathbb{N}}) = f$, donc J est surjective, d'où $\ell_p(L_p(\mathbb{R}))$ est isométriquement isomorphe à $L_p(\mathbb{R}^+)$.

• Étape 4 : Conclusion

L'application $\Delta = \psi \circ J : \ell_p(L_p(\mathbb{R})) \rightarrow L_p(\mathbb{R})$ est une isométrie linéaire surjective, ce qui assure le résultat. \square

Corollaire 3. Soit X un espace de Banach, $p \in [1, +\infty[$, $E = \ell_p$ ou $E = L_p(\mathbb{R})$.
Si X se plonge uniformément dans E , alors X se plonge fortement dans E .

Démonstration. Le corollaire 2 et les lemmes 2 et 3 assurent le résultat car la composée d'une isométrie linéaire surjective et d'un plongement fort est un plongement fort. \square

Montrons désormais que si un Banach se plonge uniformément dans un espace réflexif, alors il se plonge fortement dans un espace réflexif. Pour cela, il suffit de montrer que si un espace de Banach E est réflexif, alors $\ell_p(E)$ est réflexif ($1 < p < +\infty$).

Pour ce faire, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 4. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, $p \in]1, +\infty[$. Notons $q \in]1, +\infty[$ l'exposant conjugué de p .

L'application $\psi : \begin{cases} \ell_q(E^*) & \rightarrow \ell_p(E)^* \\ (x_n^*)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto \begin{cases} \ell_p(E) & \rightarrow \mathbb{C} \\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \langle x_n^*, x_n \rangle_{E^*, E} \end{cases} \end{cases}$ est une isométrie linéaire

surjective.

Démonstration. * Commençons par montrer que ψ est bien définie.

Soit $x^* = (x_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_q(E^*)$. Pour toute suite $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_p(E)$, d'après l'inégalité de Hölder, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle x_n^*, x_n \rangle_{E^*, E}| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n^*\|_{E^*} \|x_n\| \leq \|x^*\|_{\ell_q(E^*)} \|x\|_{\ell_p(E)}$$

donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x_n^*, x_n \rangle_{E^*, E}$ converge et, comme $\psi(x^*)$ est linéaire, ψ est bien définie et, pour

tout $x^* \in \ell_q(E^*)$, $\|\psi(x^*)\|_{\ell_p(E)^*} \leq \|x^*\|_{\ell_q(E^*)}$.

* On note que ψ est linéaire. Montrons que c'est une isométrie.

Soit $x^* = (x_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_q(E^*)$. D'après ce qui précède, il suffit de montrer que $\|\psi(x^*)\|_{\ell_p(E)^*} \geq \|x^*\|_{\ell_q(E^*)}$.

Si $x^* = 0$, le résultat est immédiat donc on peut supposer $\|x^*\|_{\ell_q(E^*)} > 0$. Il suffit de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in \ell_p(E)$ tel que $\|x\|_{\ell_p(E)} = 1$ et $|\psi(x^*)(x)| \geq \|x^*\|_{\ell_q(E^*)} - \frac{\varepsilon}{\|x^*\|_{\ell_q(E^*)}^{\frac{q}{p}}}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $\|x_n^*\|_{E^*} = 0$, on pose $\tilde{x}_n = 0$. Sinon, il existe $\tilde{x}_n \in E$ tel que $\|\tilde{x}_n\| = 1$, $x_n^*(\tilde{x}_n) \in \mathbb{R}^+$ et $x_n^*(\tilde{x}_n) \geq \|x_n^*\|_{E^*} - \frac{\varepsilon}{2^{n+1} \|x_n^*\|_{E^*}^{q-1}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = \|x_n^*\|_{E^*}^{q-1} \tilde{x}_n$.

Montrons que la suite $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi définie appartient à $\ell_p(E)$. On a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^p = \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n^*\|_{E^*}^{p(q-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n^*\|_{E^*}^q = \|x^*\|_{\ell_q(E^*)}^q < +\infty$$

donc $x \in \ell_p(E)$ et $\|x\|_{\ell_p(E)} = \|x^*\|_{\ell_q(E^*)}^{\frac{q}{p}} > 0$.

On en déduit que :

$$|\psi(x^*)(x)| = \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n^*\|_{E^*}^{q-1} x_n^*(\tilde{x}_n) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n^*\|_{E^*}^q - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \geq \|x^*\|_{\ell_q(E^*)}^q - \varepsilon = \|x^*\|_{\ell_q(E^*)} \|x\|_{\ell_p(E)} - \varepsilon$$

donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in \ell_p(E)$ tel que $\|x\|_{\ell_p(E)} > 0$ et :

$$\left| \psi(x^*) \left(\frac{x}{\|x\|_{\ell_p(E)}} \right) \right| \geq \|x^*\|_{\ell_q(E^*)} - \frac{\varepsilon}{\|x^*\|_{\ell_q(E^*)}^{\frac{q}{p}}}$$

ce qui assure que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\|\psi(x^*)\|_{\ell_p(E)^*} \geq \|x^*\|_{\ell_q(E^*)} - \frac{\varepsilon}{\|x^*\|_{\ell_q(E^*)}^{\frac{q}{p}}}$, d'où $\|\psi(x^*)\|_{\ell_p(E)^*} \geq \|x^*\|_{\ell_q(E^*)}$.

* Pour finir, montrons que ψ est surjective.

Soit $\delta \in \ell_p(E)^*$. Si $\delta = 0_{\ell_p(E)^*}$, on a $\delta = \psi(0_{\ell_q(E^*)})$. On suppose alors $\delta \neq 0_{\ell_p(E)^*}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application

$$x_n^* : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{C} \\ x & \mapsto \delta((0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n^e \text{ position}}}{x}, 0, \dots, 0, \dots)) \end{cases}$$

est bien définie et $x_n^* \in E^*$. Montrons que $x^* = (x_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_q(E^*)$ et que $\psi(x^*) = \delta$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\varepsilon > 0$. Si $\|x_n^*\|_{E^*} = 0$, on pose $x_n = 0$. Sinon, il existe $x_n \in E$ tel que $\|x_n\| = 1$, $x_n^*(x_n) \in \mathbb{R}^+$ et $x_n^*(x_n) \geq \|x_n^*\|_{E^*} - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}\|x_n^*\|_{E^*}^{q-1}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$y^n = (\|x_0^*\|_{E^*}^{q-1}x_0, \dots, \|x_n^*\|_{E^*}^{q-1}x_n, 0, \dots, 0, \dots) \in \ell_p(E).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$\|\delta\|_{\ell_p(E)^*} \left(\sum_{k=0}^n \|x_k^*\|_{E^*}^q \right)^{\frac{1}{p}} = \|\delta\|_{\ell_p(E)^*} \|y^n\|_{\ell_p(E)} \geq |\delta(y^n)| = \sum_{k=0}^n \|x_k^*\|_{E^*}^{q-1} x_k^*(x_k) \geq \sum_{k=0}^n \|x_k^*\|_{E^*}^q - \varepsilon$$

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\sum_{k=0}^n \|x_k^*\|_{E^*}^q - \varepsilon \leq \|\delta\|_{\ell_p(E)^*} \left(\sum_{k=0}^n \|x_k^*\|_{E^*}^q \right)^{\frac{1}{p}}$$

d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(\sum_{k=0}^n \|x_k^*\|_{E^*}^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|\delta\|_{\ell_p(E)^*}.$$

On en déduit que $x^* = (x_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_q(E^*)$.

De plus, pour tout $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_p(E)$, on a, comme $\delta \in \ell_p(E)^*$:

$$\psi(x^*)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^*(x_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta((0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n^e \text{ position}}}{x_n}, 0, \dots, 0, \dots)) = \delta(x)$$

d'où $\psi(x^*) = \delta$, ce qui assure que ψ est surjective.

Donc ψ est une isométrie linéaire surjective. □

Proposition 2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach réflexif, $p \in]1, +\infty[$.

L'espace $\ell_p(E)$ est réflexif.

Démonstration. Notons $q \in]1, +\infty[$ l'exposant conjugué de p .

D'après le lemme 4, l'application $\psi : \begin{cases} \ell_q(E^*) & \rightarrow \ell_p(E)^* \\ (x_n^*)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto \begin{cases} \ell_p(E) & \rightarrow \mathbb{C} \\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \langle x_n^*, x_n \rangle_{E^*, E} \end{cases} \end{cases}$ est

une isométrie linéaire surjective.

De même, l'application $\phi : \begin{cases} \ell_p(E^{**}) & \rightarrow \ell_q(E^*)^* \\ (x_n^{**})_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto \begin{cases} \ell_q(E^*) & \rightarrow \mathbb{C} \\ (x_n^*)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \langle x_n^{**}, x_n^* \rangle_{E^{**}, E^*} \end{cases} \end{cases}$ est une isométrie linéaire surjective.

Puisque E est réflexif, l'isométrie linéaire $\Pi_E : \begin{cases} E & \rightarrow E^{**} \\ x & \mapsto \begin{cases} E^* & \rightarrow \mathbb{C} \\ x^* & \mapsto x^*(x) \end{cases} \end{cases}$ est surjective.

On veut montrer que l'isométrie linéaire $\Pi : \begin{cases} \ell_p(E) & \rightarrow \ell_p(E)^{**} \\ x & \mapsto \begin{cases} \ell_p(E)^* & \rightarrow \mathbb{C} \\ x^* & \mapsto x^*(x) \end{cases} \end{cases}$ est surjective.

Posons $\Delta : \begin{cases} \ell_p(E) & \rightarrow \ell_q(E^*)^* \\ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto \phi((\Pi_E(x_n))_{n \in \mathbb{N}}) \end{cases}$. L'application Δ est une isométrie linéaire surjective en tant que composée d'isométries linéaires surjectives.

Il suffit alors de montrer que $\Pi = (\psi^*)^{-1} \circ \Delta = (\psi^{-1})^* \circ \Delta$. Or, pour tout $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_p(E)$, pour tout $\delta \in \ell_p(E)^*$, d'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned} ((\psi^*)^{-1} \circ \Delta(x))(\delta) &= \Delta(x)(\psi^{-1}(\delta)) = \phi(\Pi_E(x))(\psi^{-1}(\delta)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle \Pi_E(x_n), \psi^{-1}(\delta)_n \rangle_{E^{**}, E^*} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi^{-1}(\delta)_n(x_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta((0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n^e \text{ position}}}{x_n}, 0, \dots, 0, \dots)) = \delta(x) \\ &= \Pi(x)(\delta) \end{aligned}$$

d'où $\Pi = (\psi^*)^{-1} \circ \Delta$ est une isométrie linéaire surjective, ce qui assure que $\ell_p(E)$ est réflexif. \square

Corollaire 4. *Soit X un espace de Banach.*

Si X se plonge uniformément dans un espace de Banach réflexif, alors X se plonge fortement dans un espace de Banach réflexif.

Démonstration. Si X se plonge uniformément dans un Banach réflexif E , alors, d'après le corollaire 2, pour tout $]1, +\infty[$, X se plonge fortement dans $\ell_p(E)$, qui est réflexif d'après la proposition 2. \square

On a vu qu'un plongement uniforme dans un Banach E impliquait un plongement grossier dans $\ell_p(E)$, $p \in [1, +\infty[$. Sous certaines hypothèses, énoncées ci-dessous, on peut obtenir une réciproque, c'est-à-dire un plongement uniforme d'un Banach X dans $\ell_p(E)$ à partir d'un plongement grossier de X dans l'espace de Banach E .

Avant d'énoncer ce résultat, nous aurons besoin du lemme suivant, affirmant que si l'on peut prolonger une application lipschitzienne définie sur un 1-réseau en une application uniformément continue définie sur tout l'espace, on peut le faire pour tous les A -réseaux, $A > 0$.

Lemme 5. *Soit X et E deux espaces de Banach tels que, pour tout 1-réseau \mathcal{N} de X , toute application lipschitzienne $f : \mathcal{N} \rightarrow E$ admet un prolongement $F : X \rightarrow E$ uniformément continu.*

Alors, pour tout $A > 0$, pour tout A -réseau \mathcal{N} de X , toute application lipschitzienne $f : \mathcal{N} \rightarrow E$ admet un prolongement $F : X \rightarrow E$ uniformément continu.

Démonstration. Soit $A > 0$, \mathcal{N} un A -réseau de X , $f : \mathcal{N} \rightarrow E$ une application lipschitzienne. L'ensemble $\mathcal{M} = \{\frac{x}{A}, x \in \mathcal{N}\}$ est un 1-réseau de X et l'application \tilde{f} définie par :

$$\tilde{f} : \begin{cases} \mathcal{M} & \rightarrow E \\ x & \mapsto f(Ax) \end{cases}$$

est bien définie et est lipschitzienne donc admet un prolongement $\tilde{F} : X \rightarrow E$ uniformément continu.

L'application $F : \begin{cases} X & \rightarrow E \\ x & \mapsto \tilde{F}(\frac{x}{A}) \end{cases}$ est uniformément continue et prolonge f , ce qui assure le résultat. \square

Théorème 2. *Soit X et E deux espaces de Banach tels que, pour tout 1-réseau \mathcal{N} de X , toute application lipschitzienne $f : \mathcal{N} \rightarrow E$ admet un prolongement $F : X \rightarrow E$ uniformément continu.*

Si X se plonge grossièrement dans E , alors, pour tout $p \in [1, +\infty[$, X se plonge fortement dans $\ell_p(E)$.

Démonstration. Supposons qu'il existe un plongement grossier $f : X \rightarrow E$ de X dans E . Soit $p \in [1, +\infty[$. D'après le théorème 1, il suffit de montrer qu'il existe une application non-évanescence uniformément continue $\sigma : X \rightarrow E$.

On note ρ le module de compression de f et ω son module d'expansion. Par définition, on a :

$$\forall (x, y) \in X^2, \rho(\|x - y\|) \leq \|f(x) - f(y)\| \leq \omega(\|x - y\|)$$

avec $\lim_{+\infty} \rho = +\infty$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\omega(t) < +\infty$.

En particulier, il existe $A > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in X^2$ vérifiant $\|x - y\| \geq A$, on ait $\|f(x) - f(y)\| \geq 1$. Considérons un A -réseau \mathcal{N} de X .

Montrons que $f|_{\mathcal{N}}$ est lipschitzienne. Soit $x \neq y \in \mathcal{N}$. Puisque $\|x - y\| \geq A$, on a :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \omega(\|x - y\|) \leq \omega\left(\left\lceil \frac{\|x - y\|}{A} \right\rceil A\right) \leq \left(\frac{\|x - y\|}{A} + 1\right) \omega(A) \leq \frac{2\omega(A)}{A} \|x - y\|$$

d'où le caractère lipschitzien de $f|_{\mathcal{N}}$.

Le lemme 5 assure que f admet un prolongement $\sigma : X \rightarrow E$ uniformément continu. Il suffit, pour conclure, de montrer que σ est une application non-évanescence.

Puisque σ est uniformément continue, $\omega_\sigma(A) < +\infty$ d'après la proposition 1 donc, comme $\lim_{+\infty} \rho = +\infty$, il existe $B > 2A$ tel que $\rho(B - 2A) - 2\omega_\sigma(A) > 0$.

Soit alors $(x, y) \in X^2$ vérifiant $\|x - y\| \geq B$. Comme \mathcal{N} est un A réseau de X , il existe $(x_{\mathcal{N}}, y_{\mathcal{N}}) \in \mathcal{N}^2$ tel que $\|x - x_{\mathcal{N}}\| \leq A$ et $\|y - y_{\mathcal{N}}\| \leq A$. Comme $(x_{\mathcal{N}}, y_{\mathcal{N}}) \in \mathcal{N}^2$ et $\|x_{\mathcal{N}} - y_{\mathcal{N}}\| \geq B - 2A$, on a :

$$\|\sigma(x_{\mathcal{N}}) - \sigma(y_{\mathcal{N}})\| = \|f(x_{\mathcal{N}}) - f(y_{\mathcal{N}})\| \geq \rho(B - 2A)$$

d'où, pour tout $(x, y) \in X^2$ vérifiant $\|x - y\| \geq B$:

$$\|\sigma(x) - \sigma(y)\| \geq \rho(B - 2A) - 2\omega_\sigma(A) > 0$$

i.e σ est une application non-évanescence. \square

Nous avons vu que si un Banach X se plonge uniformément dans un Banach E , alors il se plonge grossièrement dans $\ell_p(E)$, $p \in]1, +\infty[$. Si on veut raffiner ce résultat et obtenir un plongement grossier dans $E \oplus E$, il faut rajouter des hypothèses, comme le montre le théorème 3 ci-dessous, et qui nécessite le lemme suivant :

Lemme 6. Soit X un espace de Banach, E et F deux autres espaces de Banach dont on note B_E et B_F les boules unité fermées. Soit $\sigma : X \rightarrow B_E$, $\omega : X \rightarrow B_F$ deux applications non-évanescents uniformément continues.

Alors X admet un plongement grossier uniformément continu dans $E \oplus F$.

Démonstration. Quitte à remplacer σ par $\frac{\sigma - \sigma(0)}{2}$ et ω par $\frac{\omega - \omega(0)}{2}$, on peut supposer que $\sigma(0) = \omega(0) = 0$.

Puisque σ et ω sont non-évanescents, il existe $\Delta \geq 2$ et $\delta > 0$ tels que, pour tout $(x, y) \in X^2$ vérifiant $\|x - y\| > \Delta$, on ait $\|\sigma(x) - \sigma(y)\| > \delta$ et $\|\omega(x) - \omega(y)\| > \delta$.

Construisons par récurrence deux suites d'applications uniformément continues et bornées $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset E^X$ et $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset F^X$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \phi_n(0) = \psi_n(0) = 0$; ainsi que des nombres $0 = t_0 < r_1 < t_1 < r_2 < t_2 < \dots$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = +\infty$ et tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(x, y) \in X^2$, on ait :

$$\begin{aligned} \|x - y\| \geq r_n &\implies \left\| \sum_{i=1}^n \phi_i(x) - \sum_{i=1}^n \phi_i(y) \right\| \geq 2^n \\ \|x - y\| \geq t_n &\implies \left\| \sum_{i=1}^n \psi_i(x) - \sum_{i=1}^n \psi_i(y) \right\| \geq 2^n . \\ \|x - y\| \leq t_{n-1} &\implies \|\phi_n(x) - \phi_n(y)\| \leq 2^{-n} \\ \|x - y\| \leq r_n &\implies \|\psi_n(x) - \psi_n(y)\| \leq 2^{-n} \end{aligned}$$

• Initialisation :

Puisque ω est uniformément continue, il existe $\varepsilon \in]0, 1[$ tel que, pour tout $(x, y) \in X^2$ vérifiant $\|x - y\| \leq \varepsilon$, on ait $\|\omega(x) - \omega(y)\| \leq \frac{\delta}{4}$. Posons alors $t_0 = 0$, $r_1 = \Delta$, $\phi_1 = \frac{2}{\delta}\sigma$, $t_1 = \frac{\Delta^2}{\varepsilon}$, $\psi_1 = \frac{2}{\delta}\omega\left(\frac{\varepsilon}{\Delta}\cdot\right)$.

Pour tout $(x, y) \in X^2$, on a :

$$\begin{aligned} \|x - y\| \geq r_1 &\implies \|\phi_1(x) - \phi_1(y)\| \geq \frac{2}{\delta}\delta = 2^1 \\ \|x - y\| \geq t_1 &\implies \left\| \frac{\varepsilon}{\Delta}x - \frac{\varepsilon}{\Delta}y \right\| \geq \Delta \\ &\implies \|\psi_1(x) - \psi_1(y)\| \geq \frac{2}{\delta}\delta = 2^1 \\ \|x - y\| \leq t_0 &\implies \|\phi_1(x) - \phi_1(y)\| = 0 \leq 2^{-1} \\ \|x - y\| \leq r_1 &\implies \left\| \frac{\varepsilon}{\Delta}x - \frac{\varepsilon}{\Delta}y \right\| \leq \varepsilon \\ &\implies \|\psi_1(x) - \psi_1(y)\| \leq \frac{2}{\delta}\frac{\delta}{4} = 2^{-1} \end{aligned}$$

ce qui achève l'initialisation car $0 = t_0 < r_1 < t_1$ et $\phi_1(0) = \psi_1(0) = 0$.

• Hérité :

Supposons ainsi construits $\phi_1, \dots, \phi_n, \psi_1, \dots, \psi_n$, $0 = t_0 < r_1 < t_1 < \dots < r_{n-1} < t_{n-1} < r_n < t_n$, pour un $n \in \mathbb{N}^*$.

Puisque ϕ_1, \dots, ϕ_n sont bornées, on peut définir :

$$S = \sup_{(x, y) \in X^2} \left\| \sum_{i=1}^n \phi_i(x) - \sum_{i=1}^n \phi_i(y) \right\| < +\infty$$

et, puisque σ est uniformément continue, il existe $\varepsilon \in]0, 1[$ tel que, pour tout $(x, y) \in X^2$ vérifiant $\|x - y\| \leq \varepsilon$, on ait $\|\sigma(x) - \sigma(y)\| < \frac{\delta}{(S + 2^{n+1})2^{n+1}}$.

On définit alors $r_{n+1} = \frac{t_n \Delta}{\varepsilon} > 2t_n$ (car $\Delta \geq 2$ et $\varepsilon < 1$), et $\phi_{n+1} = \frac{S + 2^{n+1}}{\delta} \sigma \left(\frac{\varepsilon}{t_n} \cdot \right)$.

De même, puisque ψ_1, \dots, ψ_n sont bornées, on peut définir :

$$S' = \sup_{(x,y) \in X^2} \left\| \sum_{i=1}^n \psi_i(x) - \sum_{i=1}^n \psi_i(y) \right\| < +\infty$$

et, puisque ω est uniformément continue, il existe $\varepsilon' \in]0, 1[$ tel que, pour tout $(x, y) \in X^2$ vérifiant $\|x - y\| \leq \varepsilon'$, on ait $\|\omega(x) - \omega(y)\| < \frac{\delta}{(S' + 2^{n+1})2^{n+1}}$.

On définit ensuite de même $t_{n+1} = \frac{r_{n+1} \Delta}{\varepsilon'} > 2r_{n+1}$ (car $\Delta \geq 2$ et $\varepsilon' < 1$), et $\psi_{n+1} = \frac{S' + 2^{n+1}}{\delta} \omega \left(\frac{\varepsilon'}{r_{n+1}} \cdot \right)$.

On note que $\phi_{n+1}(0) = \psi_{n+1}(0) = 0$.

Pour tout $(x, y) \in X^2$, on a alors :

$$\begin{aligned} \|x - y\| \geq r_{n+1} &\implies \left\| \frac{\varepsilon}{t_n} x - \frac{\varepsilon}{t_n} y \right\| \geq \frac{\varepsilon}{t_n} r_{n+1} = \Delta \\ &\implies \left\| \sigma \left(\frac{\varepsilon}{t_n} x \right) - \sigma \left(\frac{\varepsilon}{t_n} y \right) \right\| \geq \delta \\ &\implies \|\phi_{n+1}(x) - \phi_{n+1}(y)\| \geq \frac{S + 2^{n+1}}{\delta} \delta \\ &\implies \|\phi_{n+1}(x) - \phi_{n+1}(y)\| \geq S + 2^{n+1} \\ &\implies \left\| (\phi_{n+1}(x) - \phi_{n+1}(y)) - \left(\sum_{i=1}^n \phi_i(y) - \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \right) \right\| \\ &\quad \geq S + 2^{n+1} - \left\| \sum_{i=1}^n \phi_i(x) - \sum_{i=1}^n \phi_i(y) \right\| \\ &\implies \left\| \sum_{i=1}^{n+1} \phi_i(x) - \sum_{i=1}^{n+1} \phi_i(y) \right\| \geq 2^{n+1} \end{aligned}$$

et, de même :

$$\begin{aligned} \|x - y\| \geq t_{n+1} &\implies \left\| \frac{\varepsilon'}{r_{n+1}} x - \frac{\varepsilon'}{r_{n+1}} y \right\| \geq \frac{\varepsilon'}{r_{n+1}} t_{n+1} = \Delta \\ &\implies \|\psi_{n+1}(x) - \psi_{n+1}(y)\| \geq S' + 2^{n+1} \\ &\implies \left\| \sum_{i=1}^{n+1} \psi_i(x) - \sum_{i=1}^{n+1} \psi_i(y) \right\| \geq 2^{n+1}. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $(x, y) \in X^2$, on a :

$$\begin{aligned} \|x - y\| \leq t_n &\implies \left\| \frac{\varepsilon}{t_n} x - \frac{\varepsilon}{t_n} y \right\| \leq \varepsilon \\ &\implies \|\phi_{n+1}(x) - \phi_{n+1}(y)\| \leq \frac{S + 2^{n+1}}{\delta} \frac{\delta}{(S + 2^{n+1})2^{n+1}} = 2^{-(n+1)} \end{aligned}$$

et, de même :

$$\|x - y\| \leq r_{n+1} \implies \|\psi_{n+1}(x) - \psi_{n+1}(y)\| \leq 2^{-(n+1)}$$

ce qui achève la récurrence.

Notons que l'on a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = +\infty$ car, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $r_{n+1} > 2t_n > 4r_n$ et $r_1 \geq 2$.

• Montrons que, pour tout $x \in X$, $\sum_{n \geq 1} \phi_n(x)$ et $\sum_{n \geq 1} \psi_n(x)$ sont absolument convergentes.

Soit $x \in X$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|x - 0\| = \|x\| \leq t_{n-1}$, donc :

$$\sum_{i=n}^{\infty} \|\phi_i(x)\| = \sum_{i=n}^{\infty} \|\phi_i(x) - \phi_i(0)\| \leq \sum_{i=n}^{\infty} 2^{-i} < \infty$$

ce qui assure que, pour tout $x \in X$, la série $\sum_{n \geq 1} \phi_n(x)$ est absolument convergente dans l'espace de Banach E . De même, pour tout $x \in X$, la série $\sum_{n \geq 1} \psi_n(x)$ converge absolument dans E .

• On peut alors définir $\phi : \begin{cases} X & \rightarrow E \\ x & \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \end{cases}$ et $\psi : \begin{cases} X & \rightarrow E \\ x & \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x) \end{cases}$.

Montrons que ϕ et ψ sont uniformément continues.

Soit $\alpha > 0$. Il existe un entier $n \geq 2$ tel que $\alpha > 2^{-n+2}$. Puisque $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$ sont uniformément continues par construction, il existe $\beta > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in X^2, \|x - y\| < \beta \implies \sum_{i=1}^{n-1} \|\phi_i(x) - \phi_i(y)\| < \frac{\alpha}{2}.$$

On a alors, pour tout $(x, y) \in X^2$ vérifiant $\|x - y\| < \min(\beta, t_{n-1})$:

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq \sum_{i=1}^{n-1} \|\phi_i(x) - \phi_i(y)\| + \sum_{i=n}^{\infty} \|\phi_i(x) - \phi_i(y)\| < \frac{\alpha}{2} + \sum_{i=n}^{\infty} 2^{-i} < \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$$

ce qui assure que ϕ est uniformément continue. On montre de même que ψ est uniformément continue.

• Finalement, montrons que $\chi = \phi \oplus \psi : \begin{cases} X & \rightarrow E \oplus F = (E \oplus F, \|\cdot\|_1) \\ x & \mapsto (\phi(x), \psi(x)) \end{cases}$ est un plongement grossier uniformément continu.

Puisque ϕ et ψ sont uniformément continues, χ l'est également. En particulier, d'après la proposition 1, χ est bornologique. Il reste seulement à montrer que $\lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = +\infty$ où, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $K(t) = \inf\{\|\chi(a) - \chi(b)\|_1; (a, b) \in X^2, \|a - b\| \geq t\}$.

Il suffit de montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \geq r_m$, $K(t) \geq 2^m - 1$.

Soit $m \in \mathbb{N}$, $t \geq r_m$, $(x, y) \in X^2$ vérifiant $\|x - y\| \geq t$. Il existe $n \geq m$ tel que $r_n \leq \|x - y\| \leq t_n$ ou $t_n \leq \|x - y\| \leq r_{n+1}$.

* Si $r_n \leq \|x - y\| \leq t_n$, on a :

$$\begin{aligned} \|\phi(x) - \phi(y)\| &= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) - \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(y) \right\| \\ &\geq \left\| \sum_{i=1}^n \phi_i(x) - \sum_{i=1}^n \phi_i(y) \right\| - \sum_{i=n+1}^{\infty} \|\phi_i(x) - \phi_i(y)\| \\ &\geq 2^n - 1 \geq 2^m - 1. \end{aligned}$$

* Si $t_n \leq \|x - y\| \leq r_{n+1}$, on a :

$$\begin{aligned} \|\psi(x) - \psi(y)\| &= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x) - \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(y) \right\| \\ &\geq \left\| \sum_{i=1}^n \psi_i(x) - \sum_{i=1}^n \psi_i(y) \right\| - \sum_{i=n}^{\infty} \|\psi_i(x) - \psi_i(y)\| \\ &\geq 2^n - 1 \geq 2^m - 1. \end{aligned}$$

D'où $\|\chi(x) - \chi(y)\|_1 = \|\phi(x) - \phi(y)\| + \|\psi(x) - \psi(y)\| \geq 2^m - 1$.

On a donc bien montré que X admet un plongement grossier uniformément continu dans $E \oplus F$. \square

Théorème 3. *Soit X et E des espaces de Banach, $\sigma : X \rightarrow B_E$ une application non-évanescence uniformément continue.*

Alors X admet un plongement grossier uniformément continu dans $E \oplus E$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme 6 avec $F = E$. \square

On note en particulier que pour tout Banach E étant isomorphe à $E \oplus E$, l'existence d'une application non-évanescence uniformément continue d'un Banach X dans B_E implique l'existence d'un plongement grossier uniformément continu de X dans E . Cependant, tous les espaces ne sont pas isomorphes à leur carré. Un exemple d'un tel espace est donné en annexe.

D'après le théorème 2, si (X, E) est un couple d'espaces de Banach vérifiant : [pour tout 1-réseau \mathcal{N} de X , toute application lipschitzienne $f : \mathcal{N} \rightarrow E$ admet un prolongement $F : X \rightarrow E$ uniformément continu (*)], l'existence d'un plongement grossier de X dans E implique l'existence d'un plongement fort de X dans $\ell_p(E)$, pour tout $p \in [1, +\infty[$. L'hypothèse (*) ne paraissant pas très forte, Rosendal s'est posé la question suivante : tout couple d'espaces de Banach vérifie-t-il (*) ?

La réponse est non, comme l'a montré Naor en donnant un contre-exemple, ce que nous développons dans la prochaine partie.

2 Contre-exemple de Naor

Avons d'énoncer le résultat principal, commençons par démontrer l'inégalité suivante :

Lemme 7. *Pour tout $p \in [2, +\infty[$, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a :*

$$\left| |u|^{\frac{2}{p}} \operatorname{sgn}(u) - |v|^{\frac{2}{p}} \operatorname{sgn}(v) \right|^p \leq 2^{p-2} |u - v|^2.$$

Démonstration. Soit $p \in [2, +\infty[$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Par symétrie, on peut supposer $u \geq v$. Si $u = v$ ou $p = 2$ ou $u = 0$ ou $v = 0$, le résultat est immédiat donc on peut supposer $p > 2$, $u > v$, $u \neq 0$ et $v \neq 0$.

• On pose $\alpha = \frac{2}{p} \in]0, 1[$. Une étude de fonctions montre que les fonctions f, g, h définies par :

$$\begin{aligned} f &: \begin{cases} [1, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2^{1-\alpha}(x-1)^\alpha - x^\alpha + 1 \end{cases} ; \\ g &: \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2^{1-\alpha}(1-x)^\alpha + x^\alpha - 1 \end{cases} ; \\ h &: \begin{cases} [0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2^{1-\alpha}(1+x)^\alpha - x^\alpha - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

sont positives. On distingue désormais trois cas.

• Cas $0 < v < u$:

Comme $\frac{u}{v} \in [1, +\infty[$ et que f est positive, on a :

$$\begin{aligned} \left| |u|^{\frac{2}{p}} \operatorname{sgn}(u) - |v|^{\frac{2}{p}} \operatorname{sgn}(v) \right| &= u^\alpha - v^\alpha = \left(\left(\frac{u}{v} \right)^\alpha - 1 \right) v^\alpha \\ &\leq 2^{1-\alpha} \left(\frac{u}{v} - 1 \right)^\alpha v^\alpha \text{ car } v > 0 \\ &= 2^{1-\alpha} (u - v)^\alpha = 2^{1-\frac{2}{p}} |u - v|^{\frac{2}{p}} \end{aligned}$$

donc $\left| |u|^{\frac{2}{p}} \operatorname{sgn}(u) - |v|^{\frac{2}{p}} \operatorname{sgn}(v) \right|^p \leq 2^{p-2} |u - v|^2$.

• Cas $v < u < 0$:

Comme $\frac{u}{v} \in]0, 1[$ et que g est positive, on a :

$$\begin{aligned} \left| |u|^{\frac{2}{p}} \operatorname{sgn}(u) - |v|^{\frac{2}{p}} \operatorname{sgn}(v) \right| &= (-v)^\alpha - (-u)^\alpha = \left(1 - \left(\frac{u}{v} \right)^\alpha \right) (-v)^\alpha \\ &\leq 2^{1-\alpha} \left(1 - \frac{u}{v} \right)^\alpha (-v)^\alpha \text{ car } -v > 0 \\ &= 2^{1-\alpha} (u - v)^\alpha = 2^{1-\frac{2}{p}} |u - v|^{\frac{2}{p}} \end{aligned}$$

donc $\left| |u|^{\frac{2}{p}} \operatorname{sgn}(u) - |v|^{\frac{2}{p}} \operatorname{sgn}(v) \right|^p \leq 2^{p-2} |u - v|^2$.

• Cas $v < 0 < u$:

Comme $\frac{-u}{v} \in]0, +\infty[$ et que h est positive, on a :

$$\begin{aligned} \left| |u|^{\frac{2}{p}} \operatorname{sgn}(u) - |v|^{\frac{2}{p}} \operatorname{sgn}(v) \right| &= u^\alpha + |v|^\alpha = \left(\left(\frac{-u}{v} \right)^\alpha + 1 \right) |v|^\alpha \\ &\leq 2^{1-\alpha} \left(1 - \frac{u}{v} \right)^\alpha |v|^\alpha \text{ car } |v| > 0 \\ &= 2^{1-\alpha} (u - v)^\alpha = 2^{1-\frac{2}{p}} |u - v|^{\frac{2}{p}} \end{aligned}$$

donc $\left| |u|^{\frac{2}{p}} \operatorname{sgn}(u) - |v|^{\frac{2}{p}} \operatorname{sgn}(v) \right|^p \leq 2^{p-2} |u - v|^2$.

Tous les cas possibles ayant été traités, on a donc bien le résultat. \square

On peut alors énoncer le résultat de Naor, répondant à la question de Rosendal :

Théorème 4. *Il existe deux espaces de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$, un 1-réseau \mathcal{N} de X et une fonction lipschitzienne $f : \mathcal{N} \rightarrow Y$ tels que, pour toute fonction $F : X \rightarrow Y$ uniformément continue, on ait :*

$$\sup_{x \in \mathcal{N}} \|F(x) - f(x)\|_Y = +\infty.$$

En particulier, f n'admet pas de prolongement uniformément continu.

Démonstration. Soit $p \in [2, +\infty[$. Notons M_p l'application de Mazur définie de la façon suivante :

$$M_p : \begin{cases} \ell_2 & \rightarrow \ell_p \\ x & \mapsto (|x_j|^{\frac{2}{p}} \operatorname{sgn}(x_j))_{j \in \mathbb{N}} \end{cases}.$$

D'après le lemme 7, pour tout $(x, y) \in (\ell_2)^2$, on a :

$$\|M_p(x) - M_p(y)\|_p^p \leq 2^{p-2} \|x - y\|_2^2$$

ce qui assure que, pour tout $(x, y) \in (\ell_2)^2$, on a :

$$\|M_p(x) - M_p(y)\|_p \leq 2^{1-\frac{2}{p}} \|x - y\|_2^{\frac{2}{p}} \leq 2 \|x - y\|_2^{\frac{2}{p}}.$$

(pour plus d'informations concernant l'application de Mazur, on pourra consulter [2]).

• On introduit alors les espaces de Banach suivants :

$$X = \left(\bigoplus_{p=2}^{\infty} \ell_2 \right)_{\infty} \quad \text{et} \quad Y = \left(\bigoplus_{p=2}^{\infty} \ell_p \right)_{\infty}.$$

Notons \mathcal{M} un 1-réseau de ℓ_2 et $\mathcal{N} = \prod_{p=2}^{\infty} \mathcal{M}$. On note que \mathcal{N} est un 1-réseau de X .

Posons désormais $f : \begin{cases} \mathcal{N} & \rightarrow Y \\ (x_p)_{p=2}^{\infty} & \mapsto (M_p(x_p))_{p=2}^{\infty} \end{cases}$

L'application f est bien définie et est 2-lipschitzienne car, pour tout $(x_p)_{p=2}^{\infty}, (y_p)_{p=2}^{\infty} \in \mathcal{N}$, pour tout $p \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} \|(f(x))_p - (f(y))_p\|_p &= \|M_p(x_p) - M_p(y_p)\|_p \leq 2 \|x_p - y_p\|_2^{\frac{2}{p}} \\ &\leq 2 \|x_p - y_p\|_2 \quad \text{car} \quad \|x_p - y_p\|_2 \geq 1 \quad \text{et} \quad \frac{2}{p} \leq 1 \\ &\leq 2 \|x - y\|_X. \end{aligned}$$

• Raisonons désormais par l'absurde en supposant qu'il existe $F : X \rightarrow Y$ uniformément continue vérifiant :

$$\gamma = \sup_{x \in \mathcal{N}} \|F(x) - f(x)\|_Y < +\infty.$$

Notons ω le module de continuité uniforme de F . On sait que ω est une fonction croissante, vérifiant $\lim_{s \rightarrow 0} \omega(s) = 0$, et d'après la proposition 1, $\omega : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$.

On peut écrire $F = (F_p)_{p=2}^\infty$ où, pour tout $p \geq 2$, $F_p : \ell_2 \rightarrow \ell_p$ a un module de continuité majoré par ω .

Soit $p \geq 2$.

On note que, par définition de \mathcal{N} et de f , on a : pour tout $y \in \mathcal{M}$, $\|F_p(y) - M_p(y)\|_p \leq \gamma$.

• Montrons que :

$$\sup_{x \in \ell_2} \|F_p(x) - M_p(x)\|_p \leq \omega(1) + \gamma + 2.$$

Pour tout $x \in \ell_2$, il existe $y \in \mathcal{M}$ tel que $\|x - y\|_2 \leq 1$ donc, d'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned} \|F_p(x) - M_p(x)\|_p &\leq \|F_p(x) - F_p(y)\|_p + \|F_p(y) - M_p(y)\|_p + \|M_p(y) - M_p(x)\|_p \\ &\leq \omega(1) + \gamma + 2\|x - y\|_2 \\ &\leq \omega(1) + \gamma + 2 \end{aligned}$$

d'où :

$$\sup_{x \in \ell_2} \|F_p(x) - M_p(x)\|_p \leq \omega(1) + \gamma + 2 \quad (\Delta)$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $J_n : \ell_2^n \rightarrow \ell_2$ l'injection canonique et $Q_n : \ell_p \rightarrow \ell_p^n$ la projection canonique. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on identifie une permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ avec sa matrice de permutation (*i.e.*, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\pi x = (x_{\pi^{-1}(1)}, \dots, x_{\pi^{-1}(n)})$) et on identifie un élément $\varepsilon \in \{-1, 1\}^n$ avec la matrice diagonale correspondante $\tilde{\varepsilon}$ (c'est à dire que, pour tout $i \in [1, n]$, $\tilde{\varepsilon}_{i,i} = \varepsilon_i$), notée ε par la suite.

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. On pose :

$$G_p^n : \begin{cases} \ell_2^n & \rightarrow \ell_p^n \\ x & \mapsto \frac{1}{2^n n!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} (\varepsilon \pi)^{-1} Q_n \circ F_p \circ J_n(\varepsilon \pi x) \end{cases}$$

• Montrons que $G = \{\varepsilon \pi, (\varepsilon, \pi) \in \{-1, 1\}^n \times \mathfrak{S}_n\} \subset GL_n(\mathbb{R})$ forme un groupe d'opérateurs linéaires sur \mathbb{R}^n .

Pour cela, on montre que G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$. On note que G est non vide car $I_n \in G$. Soit $(\varepsilon \pi, \varepsilon' \pi') \in G^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned} (\varepsilon \pi)(\varepsilon' \pi')^{-1} x &= \varepsilon \pi \pi'^{-1} \varepsilon'^{-1} x = \varepsilon \pi \pi'^{-1} \varepsilon' x = \varepsilon \pi \pi'^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 x_1 \\ \vdots \\ \varepsilon'_n x_n \end{pmatrix} \\ &= \varepsilon \pi \begin{pmatrix} \varepsilon'_{\pi'(1)} x_{\pi'(1)} \\ \vdots \\ \varepsilon'_{\pi'(n)} x_{\pi'(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \varepsilon'_{\pi^{-1}\pi'(1)} x_{\pi^{-1}\pi'(1)} \\ \vdots \\ \varepsilon_n \varepsilon'_{\pi^{-1}\pi'(n)} x_{\pi^{-1}\pi'(n)} \end{pmatrix} \\ &= \tilde{\varepsilon} \tilde{\pi} x \end{aligned}$$

avec $\tilde{\pi} = \pi'^{-1} \pi \in \mathfrak{S}_n$ et $\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon_1 \varepsilon'_{\pi^{-1}\pi'(1)}, \dots, \varepsilon_n \varepsilon'_{\pi^{-1}\pi'(n)}) \in \{-1, 1\}^n$.

Donc G est bien un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

• G est un groupe fini et, pour tout $(\varepsilon, \varepsilon') \in (\{-1, 1\}^n)^2$, pour tout $(\pi, \pi') \in \mathfrak{S}_n^2$, si $\varepsilon \pi = \varepsilon' \pi'$ alors $\varepsilon = \varepsilon'$ et $\pi = \pi'$ donc, pour tout $\varepsilon \pi \in G$, l'application $\begin{cases} G & \rightarrow G \\ \varepsilon' \pi' & \mapsto \varepsilon' \pi' \varepsilon \pi \end{cases}$ est bien définie

et est bijective.

On a alors, pour tout $x \in \ell_2^n$, pour tout $(\varepsilon, \pi) \in \{-1, 1\}^n \times \mathfrak{S}_n$:

$$\begin{aligned} G_p^n(\varepsilon\pi x) &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{\pi' \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\varepsilon' \in \{-1, 1\}^n} (\varepsilon' \pi')^{-1} Q_n \circ F_p \circ J_n(\varepsilon' \pi' \varepsilon \pi x) \\ &\stackrel{\tilde{\varepsilon}\tilde{\pi} = \varepsilon' \pi' \varepsilon \pi}{=} \frac{1}{2^n n!} \sum_{\tilde{\pi} \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\tilde{\varepsilon} \in \{-1, 1\}^n} \varepsilon \pi (\tilde{\varepsilon} \tilde{\pi})^{-1} Q_n \circ F_p \circ J_n(\tilde{\varepsilon} \tilde{\pi} x) \\ &= \varepsilon \pi G_p^n(x). \end{aligned}$$

• Montrons qu'il existe des applications $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que, pour tout $A \subset \llbracket 1, n \rrbracket$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on ait $G_p^n(t\mathbb{1}_A) = \alpha_{|A|}(t)\mathbb{1}_A$, où $|A|$ désigne le cardinal de A .

Commençons par montrer qu'il existe deux applications α et β de $\mathbb{R} \times \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ dans \mathbb{R} telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall A \subset \llbracket 1, n \rrbracket, G_p^n(t\mathbb{1}_A) = \alpha(t, A)\mathbb{1}_A + \beta(t, A)\mathbb{1}_{\llbracket 1, n \rrbracket \setminus A}.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$, $A \subset \llbracket 1, n \rrbracket$. Pour toute permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ laissant fixe A , $\pi(t\mathbb{1}_A) = t\mathbb{1}_A$ donc $G_p^n(t\mathbb{1}_A) = G_p^n(\pi t\mathbb{1}_A) = \pi G_p^n(t\mathbb{1}_A)$ par ce qui précède. Soit $(i, j) \in A^2$. Montrons que $(G_p^n(t\mathbb{1}_A))_i = (G_p^n(t\mathbb{1}_A))_j$. La transposition $\pi = (i, j)$ laisse A fixe donc :

$$(G_p^n(t\mathbb{1}_A))_i = (\pi G_p^n(t\mathbb{1}_A))_i = (G_p^n(t\mathbb{1}_A))_j$$

De plus, comme toute permutation laissant fixe A laisse également fixe $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus A$, pour tout $(i, j) \in (\llbracket 1, n \rrbracket \setminus A)^2$, $(G_p^n(t\mathbb{1}_A))_i = (G_p^n(t\mathbb{1}_A))_j$. On définit alors :

$$\alpha(t, A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset \\ (G_p^n(t\mathbb{1}_A))_i & \text{s'il existe } i \in A \end{cases} \quad \text{et } \beta(t, A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \llbracket 1, n \rrbracket \\ (G_p^n(t\mathbb{1}_A))_i & \text{s'il existe } i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus A \end{cases}.$$

On a ainsi défini deux applications α et β de $\mathbb{R} \times \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ dans \mathbb{R} vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall A \subset \llbracket 1, n \rrbracket, G_p^n(t\mathbb{1}_A) = \alpha(t, A)\mathbb{1}_A + \beta(t, A)\mathbb{1}_{\llbracket 1, n \rrbracket \setminus A}.$$

Montrons désormais que $\beta = 0$. Soit $t \in \mathbb{R}$, $A \subset \llbracket 1, n \rrbracket$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in A \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$.

Puisque $(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{\llbracket 1, n \rrbracket \setminus A})(t\mathbb{1}_A) = t\mathbb{1}_A$, on a $\varepsilon(t\mathbb{1}_A) = t\mathbb{1}_A$ donc :

$$\begin{aligned} \alpha(t, A)\mathbb{1}_A + \beta(t, A)\mathbb{1}_{\llbracket 1, n \rrbracket \setminus A} &= G_p^n(t\mathbb{1}_A) = G_p^n(\varepsilon(t\mathbb{1}_A)) = \varepsilon G_p^n(t\mathbb{1}_A) \\ &= \alpha(t, A)\varepsilon\mathbb{1}_A + \beta(t, A)\varepsilon\mathbb{1}_{\llbracket 1, n \rrbracket \setminus A} \\ &= \alpha(t, A)\mathbb{1}_A - \beta(t, A)\mathbb{1}_{\llbracket 1, n \rrbracket \setminus A} \end{aligned}$$

d'où, pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $A \subset \llbracket 1, n \rrbracket$, $\beta(t, A) = 0$. On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall A \subset \llbracket 1, n \rrbracket, G_p^n(t\mathbb{1}_A) = \alpha(t, A)\mathbb{1}_A.$$

Enfin, montrons que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $(A, B) \in (\mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket))^2$ vérifiant $|A| = |B|$, on a $\alpha(t, A) = \alpha(t, B)$. Soit $t \in \mathbb{R}$, $(A, B) \in (\mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket))^2$ vérifiant $|A| = |B|$. Puisque A et B ont même cardinal, il existe une permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\pi(\mathbb{1}_A) = \mathbb{1}_B$. On a alors :

$$\alpha(t, B)\mathbb{1}_B = G_p^n(t\mathbb{1}_B) = G_p^n(\pi(t\mathbb{1}_A)) = \pi(\alpha(t, A)\mathbb{1}_A) = \alpha(t, A)\mathbb{1}_B$$

ce qui assure que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $(A, B) \in (\mathcal{P}([1, n]))^2$ vérifiant $|A| = |B|$, on a $\alpha(t, A) = \alpha(t, B)$. Pour tout $k \in [0, n]$, on pose alors $\alpha_k : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \alpha(t, [1, k]) \end{cases}$, avec $[1, 0] = \emptyset$ par convention. On a alors :

$$\forall A \subset [1, n], \forall t \in \mathbb{R}, G_p^n(t \mathbb{1}_A) = \alpha_{|A|}(t) \mathbb{1}_A.$$

• Montrons que, pour tout $x \in \ell_2^n$, pour tout $(\varepsilon, \pi) \in \{-1, 1\}^n \times \mathfrak{S}_n$, on a :

$$Q_n \circ M_p \circ J_n(\varepsilon \pi x) = \varepsilon \pi Q_n \circ M_p \circ J_n(x).$$

Pour tout $x \in \ell_2^n$, $(\varepsilon, \pi) \in \{-1, 1\}^n \times \mathfrak{S}_n$, $j \in [1, n]$, on a :

$$\begin{aligned} (Q_n \circ M_p \circ J_n(\varepsilon \pi x))_j &= |(\varepsilon \pi x)_j|^{\frac{2}{p}} \operatorname{sgn}((\varepsilon \pi x)_j) \\ &= |\varepsilon_j x_{\pi^{-1}(j)}|^{\frac{2}{p}} \operatorname{sgn}(\varepsilon_j x_{\pi^{-1}(j)}) \\ &= |x_{\pi^{-1}(j)}|^{\frac{2}{p}} \operatorname{sgn}(\varepsilon_j) \operatorname{sgn}(x_{\pi^{-1}(j)}) \\ &= \varepsilon_j |x_{\pi^{-1}(j)}|^{\frac{2}{p}} \operatorname{sgn}(x_{\pi^{-1}(j)}) \\ &= (\varepsilon \pi Q_n \circ M_p \circ J_n(x))_j \end{aligned}$$

d'où :

$$Q_n \circ M_p \circ J_n(\varepsilon \pi x) = \varepsilon \pi Q_n \circ M_p \circ J_n(x).$$

• On en déduit que :

$$\begin{aligned} &\sup_{x \in \ell_2^n} \|G_p^n(x) - Q_n \circ M_p \circ J_n(x)\|_p \\ &= \sup_{x \in \ell_2^n} \left\| \frac{1}{2^n n!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} (\varepsilon \pi)^{-1} Q_n \circ F_p \circ J_n(\varepsilon \pi x) - \frac{1}{2^n n!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} (\varepsilon \pi)^{-1} \varepsilon \pi Q_n \circ M_p \circ J_n(x) \right\|_p \\ &= \sup_{x \in \ell_2^n} \left\| \frac{1}{2^n n!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} (\varepsilon \pi)^{-1} Q_n \circ F_p \circ J_n(\varepsilon \pi x) - \frac{1}{2^n n!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} (\varepsilon \pi)^{-1} Q_n \circ M_p \circ J_n(\varepsilon \pi x) \right\|_p \\ &= \sup_{x \in \ell_2^n} \left\| \frac{1}{2^n n!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} (\varepsilon \pi)^{-1} Q_n \circ (F_p - M_p) \circ J_n(\varepsilon \pi x) \right\|_p \\ &\leq \sup_{x \in \ell_2^n} \left(\frac{1}{2^n n!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} \|(\varepsilon \pi)^{-1}\|_{\ell_p^n \rightarrow \ell_p^n} \|Q_n\|_{\ell_p \rightarrow \ell_p^n} \sup_{y \in \ell_2} \|(F_p - M_p)(y)\|_p \right) \text{ car } J_n(\varepsilon \pi x) \in \ell_2 \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} 1 \times 1 \times \sup_{x \in \ell_2} \|(F_p - M_p)(x)\|_p \\ &\leq \omega(1) + \gamma + 2 \text{ par } (\Delta). \end{aligned}$$

• Pour tout $k \in [1, n-1]$, $t \in]0, +\infty[$, on a :

$$Q_n \circ M_p \circ J_n(t \mathbb{1}_{[n-k+1, n]}) = |t|^{\frac{2}{p}} \operatorname{sgn}(t) \mathbb{1}_{[n-k+1, n]} = t^{\frac{2}{p}} \mathbb{1}_{[n-k+1, n]}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \left\| G_p^n(t\mathbb{1}_{[n-k+1, n]}) - t^{\frac{2}{p}} \mathbb{1}_{[n-k+1, n]} \right\|_p &= \left\| G_p^n(t\mathbb{1}_{[n-k+1, n]}) - Q_n \circ M_p \circ J_n(t\mathbb{1}_{[n-k+1, n]}) \right\|_p \\ &\leq \sup_{x \in \ell_2^n} \left\| G_p^n(x) - Q_n \circ M_p \circ J_n(x) \right\|_p \\ &\leq \omega(1) + \gamma + 2. \end{aligned}$$

De même, pour tout $k \in [1, n-1]$, pour tout $t \in]0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} \left\| G_p^n(t\mathbb{1}_{[1, k]}) - t^{\frac{2}{p}} \mathbb{1}_{[1, k]} \right\|_p &= \left\| G_p^n(t\mathbb{1}_{[1, k]}) - Q_n \circ M_p \circ J_n(t\mathbb{1}_{[1, k]}) \right\|_p \\ &\leq \omega(1) + \gamma + 2. \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $k \in [1, n-1]$ vérifiant $2k < n+1$, pour tout $t \in]0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} t^{\frac{2}{p}}(2k)^{\frac{1}{p}} &= \left\| t^{\frac{2}{p}}(\mathbb{1}_{[n-k+1, n]} - \mathbb{1}_{[1, k]}) \right\|_p \quad \text{car } n-k+1 > k \\ &\leq \left\| t^{\frac{2}{p}} \mathbb{1}_{[n-k+1, n]} - G_p^n(t\mathbb{1}_{[n-k+1, n]}) \right\|_p + \left\| G_p^n(t\mathbb{1}_{[n-k+1, n]}) - G_p^n(t\mathbb{1}_{[1, k]}) \right\|_p + \left\| G_p^n(t\mathbb{1}_{[1, k]}) - t^{\frac{2}{p}} \mathbb{1}_{[1, k]} \right\|_p \\ &\leq \left\| G_p^n(t\mathbb{1}_{[n-k+1, n]}) - G_p^n(t\mathbb{1}_{[1, k]}) \right\|_p + 2\omega(1) + 2\gamma + 4. \end{aligned}$$

• Montrons alors que le module de continuité de G_p^n est majoré par ω .

Soit $s \in \mathbb{R}^+$, $(x, y) \in (\ell_2^n)^2$ vérifiant $\|x - y\|_2 \leq s$. On note que, pour tout $(\varepsilon, \pi) \in \{-1, 1\}^n \times \mathfrak{S}_n$, on a :

$$\|J_n(\varepsilon\pi x) - J_n(\varepsilon\pi y)\|_p \leq \|J_n\|_{\ell_2^n \rightarrow \ell_2^n} \|\varepsilon\pi\|_{\ell_p^n \rightarrow \ell_p^n} \|x - y\|_2 \leq 1 \times 1 \times s = s$$

d'où, comme le module de continuité de F_p est majoré par ω :

$$\begin{aligned} \|G_p^n(x) - G_p^n(y)\|_p &= \frac{1}{2^n n!} \left\| \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} (\varepsilon\pi)^{-1} Q_n(F_p(J_n(\varepsilon\pi x)) - F_p(J_n(\varepsilon\pi y))) \right\|_p \\ &\leq \frac{1}{2^n n!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} \|(\varepsilon\pi)^{-1}\|_{\ell_p^n \rightarrow \ell_p^n} \|Q_n\|_{\ell_p \rightarrow \ell_p^n} \|F_p(J_n(\varepsilon\pi x)) - F_p(J_n(\varepsilon\pi y))\|_p \\ &\leq \frac{1}{2^n n!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} \omega(s) \\ &= \omega(s) \end{aligned}$$

ce qui assure que le module de continuité de G_p^n est majoré par ω .

• On en déduit que, pour tout $t \in]0, +\infty[$, pour tout $k \in [1, n-1]$ vérifiant $2k < n+1$, on a :

$$\begin{aligned} \left\| G_p^n(t\mathbb{1}_{[n-k+1, n]}) - G_p^n(t\mathbb{1}_{[1, k]}) \right\|_p &= \left\| \alpha_k(t) \mathbb{1}_{[n-k+1, n]} - \alpha_k(t) \mathbb{1}_{[1, k]} \right\|_p \\ &= |\alpha_k(t)| \left\| \mathbb{1}_{[n-k+1, n]} - \mathbb{1}_{[1, k]} \right\|_p \\ &= |\alpha_k(t)| (2k)^{\frac{1}{p}} \quad \text{car } k < n - k + 1 \\ &= |\alpha_k(t)| k^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{1}{p}} = |\alpha_k(t)| k^{\frac{1}{p}} \left\| \mathbb{1}_{[1, k]} - \mathbb{1}_{[2, k+1]} \right\|_p \\ &= k^{\frac{1}{p}} \left\| \alpha_k(t) \mathbb{1}_{[1, k]} - \alpha_k(t) \mathbb{1}_{[2, k+1]} \right\|_p \\ &= k^{\frac{1}{p}} \left\| G_p^n(t\mathbb{1}_{[1, k]}) - G_p^n(t\mathbb{1}_{[2, k+1]}) \right\|_p \\ &\leq k^{\frac{1}{p}} \omega(\sqrt{2}t) \end{aligned}$$

car $\|t\mathbb{1}_{[1,k]} - t\mathbb{1}_{[2,k+1]}\|_2 = \sqrt{t^2 + t^2} = \sqrt{2}t$.

On a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, pour tout $t \in]0, +\infty[$:

$$t^{\frac{2}{p}}(2k)^{\frac{1}{p}} \leq k^{\frac{1}{p}}\omega(\sqrt{2}t) + 2\omega(1) + 2\gamma + 4.$$

En particulier, on note que, pour tout $t \in]0, +\infty[$, $\omega(\sqrt{2}t) > 0$ puisque $\lim_{k \rightarrow \infty} t\sqrt{2k} = +\infty$.

• Montrons désormais que, pour tout $t \in]0, \frac{1}{\sqrt{2}e^2}[$, on a $\omega(\sqrt{2}t) \geq \frac{1}{2e}$.

Soit $t \in]0, \frac{1}{\sqrt{2}e^2}[$. On pose :

$$p = \left\lceil \ln \left(\frac{1}{2t^2} \right) \right\rceil \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \text{ et } k = \left\lceil \left(\frac{2\omega(1) + 2\gamma + 4}{\omega(\sqrt{2}t)} \right)^{2\ln\left(\frac{1}{2t^2}\right)} \right\rceil \in \mathbb{N}^*.$$

Notons que $-\ln(2t^2) = \ln\left(\frac{1}{2t^2}\right) \leq p$ par définition de p donc $\frac{1}{p}\ln(2t^2) \geq -1$ d'où, par croissance de la fonction exponentielle, $(2t^2)^{\frac{1}{p}} \geq \frac{1}{e}$.

Montrons que l'on a également l'inégalité $k^{\frac{1}{p}}\omega(\sqrt{2}t) \geq 2\omega(1) + 2\gamma + 4$.

Puisque $\sqrt{2}t < \frac{1}{e^2} \leq 1$, on a :

$$0 < \omega(\sqrt{2}t) \leq \omega(1) \leq 2\omega(1) + 2\gamma + 4 \text{ donc } \frac{2\omega(1) + 2\gamma + 4}{\omega(\sqrt{2}t)} \geq 1$$

et comme $p \geq 2$, on a $p \leq 2p - 2 < 2\ln\left(\frac{1}{2t^2}\right)$ par définition de p , d'où :

$$k^{\frac{1}{p}} \geq \left(\frac{2\omega(1) + 2\gamma + 4}{\omega(\sqrt{2}t)} \right)^{\frac{2}{p}\ln\left(\frac{1}{2t^2}\right)} \geq \frac{2\omega(1) + 2\gamma + 4}{\omega(\sqrt{2}t)}$$

car $k \geq \left(\frac{2\omega(1) + 2\gamma + 4}{\omega(\sqrt{2}t)} \right)^{2\ln\left(\frac{1}{2t^2}\right)}$ par définition de k et que, pour tout $x \in [1, +\infty[$, la fonction $y \mapsto x^y$ est croissante sur \mathbb{R}^+ . On a donc bien $k^{\frac{1}{p}}\omega(\sqrt{2}t) \geq 2\omega(1) + 2\gamma + 4$.

On en déduit que :

$$\frac{k^{\frac{1}{p}}}{e} \leq t^{\frac{2}{p}}(2k)^{\frac{1}{p}} \leq k^{\frac{1}{p}}\omega(\sqrt{2}t) + 2\omega(1) + 2\gamma + 4 \leq 2k^{\frac{1}{p}}\omega(\sqrt{2}t).$$

Or, pour tout $t \in]0, \frac{1}{\sqrt{2}e^2}[$, $k \geq 1$ donc, pour tout $t \in]0, \frac{1}{\sqrt{2}e^2}[$, on a $\omega(\sqrt{2}t) \geq \frac{1}{2e}$.

• Cependant, $\lim_{s \rightarrow 0} \omega(s) = 0$, ce qui est absurde. On a donc bien le résultat. \square

Le théorème 2 ne permet donc pas de prouver que pour tout couple (X, E) de Banach, l'existence d'un plongement grossier entre X et E implique l'existence d'un plongement uniforme entre X et $\ell_p(E)$, puisque certains espaces ne permettent pas toujours de prolonger une application lipschitzienne en une application uniformément continue.

Il existe cependant des espaces E pour lesquels on sait très bien prolonger une application lipschitzienne à valeurs dans E tout en conservant son caractère lipschitzien (et donc uniformément continu). C'est le cas des espaces \mathbb{R} , \mathbb{C} , ℓ_∞ , c_0 et $C(K)$ avec K un espace métrique compact, ce qui fait l'objet de la troisième partie de ce mémoire.

3 Prolongement d'applications lipschitziennes

3.1 Fonctions à valeurs réelles et complexes

Commençons par traiter le cas le plus élémentaire ; celui des fonctions à valeurs réelles. Le résultat est le suivant :

Proposition 3. *Soit (Y, d) un espace métrique, A une partie non vide de Y , $C \in \mathbb{R}^+$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une application C -lipschitzienne.*

Alors $g : \begin{cases} Y & \rightarrow \mathbb{R} \\ y & \mapsto \inf_{x \in A} (f(x) + Cd(x, y)) \end{cases}$ est un prolongement C -lipschitzien de f .

Démonstration. • Montrer que g est bien définie. Soit $y \in Y$. Puisque $A \neq \emptyset$, il existe $a \in A$. Pour tout $x \in A$, on a :

$$f(a) - f(x) \leq Cd(a, x) \leq Cd(a, y) + Cd(y, x)$$

donc, pour tout $x \in A$:

$$f(a) - Cd(a, y) \leq f(x) + Cd(x, y)$$

d'où $\{f(x) + Cd(x, y), x \in A\}$ est une partie non vide minorée de \mathbb{R} , ce qui assure la bonne définition de g .

• Montrons que g est un prolongement de f . Soit $y \in A$.

Comme $y \in A$, $g(y) \leq f(y) + Cd(y, y) = f(y)$. De plus, pour tout $x \in A$, on a $f(y) - f(x) \leq Cd(x, y)$ donc $f(y) \leq \inf_{x \in A} (f(x) + Cd(x, y)) = g(y)$. Donc $f(y) = g(y)$ d'où g est bien un prolongement de f .

• Montrons que g est une application C -lipschitzienne. Soit $(y, z) \in Y^2$. Par symétrie, il suffit de montrer que $g(y) - g(z) \leq Cd(y, z)$. Pour tout $x \in A$, on a :

$$g(y) \leq f(x) + Cd(x, y) \leq f(x) + Cd(x, z) + Cd(z, y)$$

donc $g(y) - Cd(y, z) \leq g(z)$, ce qui assure le résultat. \square

Le cas des fonctions à valeurs complexes s'en déduit alors immédiatement, comme l'affirme le corollaire ci-dessous. Notons cependant que la constante de Lipschitz est multipliée par un facteur $\sqrt{2}$.

Corollaire 5. *Soit (Y, d) un espace métrique, A une partie non vide de Y , $C \in \mathbb{R}^+$, $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ une application C -lipschitzienne.*

Alors f admet un prolongement $g : Y \rightarrow \mathbb{C}$ $\sqrt{2}C$ -lipschitzien.

Démonstration. Les applications $f_1 = \operatorname{Re}(f)$ et $f_2 = \operatorname{Im}(f)$, définies sur A sont C -lipschitziennes à valeurs réelles donc d'après la proposition précédente, f_1 (respectivement f_2) admet un prolongement $g_1 : Y \rightarrow \mathbb{R}$ (respectivement $g_2 : Y \rightarrow \mathbb{R}$) C -lipschitzien. L'application $g = g_1 + ig_2$ est alors un prolongement $\sqrt{2}C$ -lipschitzien de f . \square

On peut alors se demander si le facteur $\sqrt{2}$ est optimal. La situation idéale aurait été la conservation de la constante de Lipschitz. L'exemple suivant montre cependant que, dans le cas des fonctions à valeurs complexes, la multiplication de la constante de Lipschitz par une constante strictement plus grande que 1 lors du prolongement est inévitable.

Exemple. Posons $X = \{e, p_1, p_2, p_3\}$. On munit X d'une distance en posant, pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, $\rho(e, p_i) = 1$, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$ vérifiant $i \neq j$, $\rho(p_i, p_j) = 2$. Considérons $f : \{p_1, p_2, p_3\} \rightarrow \mathbb{C}$ une application isométrique (f est alors 1-lipschitzienne). On note que f envoie p_1, p_2, p_3 sur les sommets d'un triangle équilatéral ABC . Pour prolonger f en une application lipschitzienne g sur X avec la meilleure constante de Lipschitz possible, il faut envoyer e sur le centre de gravité du triangle ABC . La constante de Lipschitz de cette application g est alors $\frac{2}{\sqrt{3}} > 1$.

Le facteur optimal se situe donc entre $\frac{2}{\sqrt{3}}$ et $\sqrt{2}$. Rieffel a montré en 2006 qu'il est égal à $\frac{4}{\pi}$ (cf [7], p.175).

Une preuve similaire permet d'étendre le résultat aux applications lipschitziennes à valeurs dans \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, avec une constante de Lipschitz multipliée par \sqrt{n} si l'on munit \mathbb{R}^n de la norme euclidienne.

Traisons désormais le cas des applications lipschitziennes à valeurs dans un espace de dimension infinie, l'espace ℓ_∞ .

3.2 Fonctions à valeurs dans ℓ_∞

On a le résultat suivant :

Proposition 4. Soit (Y, d) un espace métrique, A une partie non vide de Y , $C \in \mathbb{R}^+$, $f : A \rightarrow (\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ une application C -lipschitzienne.

Alors f admet un prolongement $g : Y \rightarrow (\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ C -lipschitzien.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $g_n : \begin{cases} Y & \rightarrow \mathbb{R} \\ y & \mapsto \inf_{x \in A} (f_n(x) + Cd(x, y)) \end{cases}$. On pose éga-

lement $g : \begin{cases} Y & \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ y & \mapsto (g_n(y))_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$.

D'après la proposition précédente, g est bien définie et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est un prolongement de f_n . Montrons que, pour tout $y \in Y$, $g(y) \in \ell_\infty$. Soit $y \in Y$. Puisque $A \neq \emptyset$, il existe $a \in A$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$|g_n(y)| \leq |f_n(a)| + Cd(a, y) \leq \|f(a)\|_\infty + Cd(a, y)$$

donc, pour tout $y \in Y$, $g(y) \in \ell_\infty$.

De plus, pour tout $(y, z) \in Y^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|g_n(y) - g_n(z)| \leq Cd(y, z)$, d'où $\|g(y) - g(z)\|_\infty \leq Cd(y, z)$, ce qui assure que g est C -lipschitzienne. \square

Notons qu'une preuve similaire assure que le résultat reste vrai si on remplace ℓ_∞ par $\ell_\infty(\Gamma)$, avec Γ un ensemble d'indices quelconque non vide. Le résultat ci-dessus s'étend immédiatement au cas où ℓ_∞ est remplacé par un sous-espace $E \subset \ell_\infty$ complété dans ℓ_∞ avec éventuellement une perte de la conservation de la constante de Lipschitz. Bien que c_0 ne soit pas complété dans ℓ_∞ , on peut tout de même obtenir le résultat pour des fonctions lipschitziennes à valeurs dans c_0 , la constante de Lipschitz étant alors multipliée par 2.

3.3 Fonctions à valeurs dans c_0

Ceci découle de l'existence d'une rétraction 2-lipschitzienne de ℓ_∞ sur c_0 , que nous montrons ci-dessous.

Lemme 8. Soit $x \in \ell_\infty$. On a : $d(x, c_0) = \limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n|$.

Démonstration. • Notons $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la base canonique de c_0 . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n x_k e_k \in c_0 \subset c_0$ donc :

$$d(x, c_0) \leq \left\| x - \sum_{k=0}^n x_k e_k \right\|_\infty \leq \sup_{k \geq n+1} |x_k| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n|$$

donc $d(x, c_0) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n|$.

• Soit $y \in c_0$. Il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_{\varphi(n)}|$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \text{ car } y \in c_0 \\ &\leq \|(x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty \leq \|x - y\|_\infty \end{aligned}$$

d'où $\limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n| \leq d(x, c_0)$, ce qui assure le résultat. \square

Définition 4. Soit (Y, d) un espace métrique, $X \subset Y$, $C \in \mathbb{R}^+$. Une application C -lipschitzienne $r : Y \rightarrow X$ vérifiant $r|_X = Id_X$ est appelée une rétraction C -lipschitzienne de Y sur X .

Proposition 5. Il existe une rétraction 2-lipschitzienne de ℓ_∞ sur c_0 , notée r .

Démonstration. On pose $r : \begin{cases} \ell_\infty & \rightarrow c_0 \\ x & \mapsto (r(x))_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$ où, pour tout $x \in \ell_\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$r(x)_n = \begin{cases} 0 & \text{si } |x_n| < d(x, c_0) \\ (|x_n| - d(x, c_0)) \operatorname{sgn}(x_n) & \text{si } |x_n| \geq d(x, c_0) \end{cases}. \text{ Montrons que } r \text{ est bien définie et est}$$

une rétraction 2-lipschitzienne.

• Montrons que r est bien définie. Soit $x \in \ell_\infty$. Montrons que $r(x) \in c_0$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $d(x, c_0) = \limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n| < \infty$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|x_n| \leq d(x, c_0) + \varepsilon$.

Alors, pour tout $n \geq n_0$, on a :

* si $|x_n| < d(x, c_0)$, $|r(x)_n| = 0 \leq \varepsilon$;

* sinon, $|x_n| \geq d(x, c_0)$ et $|r(x)_n| = |x_n| - d(x, c_0) \leq \varepsilon$.

Donc, pour tout $n \geq n_0$, $|r(x)_n| \leq \varepsilon$, d'où $r(x) \in c_0$, ce qui justifie la bonne définition de r .

• Montrons que $r|_{c_0} = Id_{c_0}$. Soit $x \in c_0$, $d(x, c_0) = 0$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r(x)_n = (|x_n| - 0) \operatorname{sgn}(x_n) = x_n$ donc $r(x) = x$, d'où $r|_{c_0} = Id_{c_0}$.

• Montrons que r est 2-lipschitzienne. Soit $x, y \in \ell_\infty$.

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|r(x)_n - r(y)_n| \leq 2\|x - y\|_\infty$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

* si $|x_n| < d(x, c_0)$ et $|y_n| < d(y, c_0)$, alors $|r(x)_n - r(y)_n| = 0 \leq 2\|x - y\|_\infty$;

* si $|x_n| < d(x, c_0)$ et $|y_n| \geq d(y, c_0)$, alors, comme l'application $z \mapsto d(z, c_0)$ est 1-lipschitzienne sur ℓ_∞ , on a :

$$|r(x)_n - r(y)_n| = |y_n| - d(y, c_0) \leq |y_n| - |x_n| + d(x, c_0) - d(y, c_0) \leq 2\|x - y\|_\infty ;$$

- * si $|x_n| \geq d(x, c_0)$ et $|y_n| < d(y, c_0)$, on a de même : $|r(x)_n - r(y)_n| \leq 2\|x - y\|_\infty$;
- * si $|x_n| \geq d(x, c_0)$ et $|y_n| \geq d(y, c_0)$, alors :

$$\begin{aligned} |r(x)_n - r(y)_n| &= |(|x_n| - d(x, c_0)) \operatorname{sgn}(x_n) - (|y_n| - d(y, c_0)) \operatorname{sgn}(y_n)| \\ &\leq |x_n - y_n| + |d(x, c_0) \operatorname{sgn}(x_n) - d(y, c_0) \operatorname{sgn}(y_n)| \\ &\leq 2\|x - y\|_\infty. \end{aligned}$$

En effet, si $x_n y_n \geq 0$, alors :

$$|d(x, c_0) \operatorname{sgn}(x_n) - d(y, c_0) \operatorname{sgn}(y_n)| = |d(x, c_0) - d(y, c_0)| \leq \|x - y\|_\infty$$

car $d(\cdot, c_0)$ est 1-lipschitzienne, et si $x_n y_n < 0$, alors

$$|d(x, c_0) \operatorname{sgn}(x_n) - d(y, c_0) \operatorname{sgn}(y_n)| = d(x, c_0) + d(y, c_0) \leq |x_n| + |y_n| = |x_n - y_n| \leq \|x - y\|_\infty.$$

Finalement, pour tout $x, y \in \ell_\infty$, $\|r(x) - r(y)\|_\infty \leq 2\|x - y\|_\infty$, ce qui conclut. \square

La remarque suivante montre que la constante 2 obtenue dans le résultat précédent est optimale.

Remarque 3. Si $\rho : \ell_\infty \rightarrow c_0$ est une rétraction λ -lipschitzienne, alors $\lambda \geq 2$. En effet, si on note e la suite constante égale à 1, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|\rho(e) - 2e_n\|_\infty = \|\rho(e) - \rho(2e_n)\|_\infty \leq \lambda\|e - 2e_n\|_\infty = \lambda.$$

Or $\rho(e) \in c_0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\rho(e) - 2e_n\|_\infty = 2$, d'où $\lambda \geq 2$.

On obtient alors le résultat souhaité :

Corollaire 6. Soit (Y, d) un espace métrique, A une partie non vide de Y , $C \in \mathbb{R}^+$, $f : A \rightarrow (c_0, \|\cdot\|_\infty)$ une application C -lipschitzienne.

Alors f admet un prolongement $g : Y \rightarrow (c_0, \|\cdot\|_\infty)$ $2C$ -lipschitzien.

Démonstration. D'après la proposition 4, comme $c_0 \subset \ell_\infty$, f admet un prolongement $\tilde{g} : Y \rightarrow (\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ C -lipschitzien. Posons $g = r \circ \tilde{g}$. Montrons que g est un prolongement $2C$ -lipschitzien de f .

- Pour tout $x \in A$, $g(x) = r(\tilde{g}(x)) = r(f(x)) = f(x)$ car $f(x) \in c_0$, donc g prolonge f .
- Pour tout $(x, y) \in Y^2$, on a :

$$\|g(x) - g(y)\|_\infty = \|r(\tilde{g}(x)) - r(\tilde{g}(y))\|_\infty \leq 2\|\tilde{g}(x) - \tilde{g}(y)\|_\infty \leq 2C\|x - y\|_\infty$$

d'où le résultat. \square

Un autre espace se comporte bien vis-à-vis du prolongement d'applications lipschitziennes, comme l'a montré Kalton en 2007 (cf [3]). Le résultat, que nous admettrons, est le suivant :

Théorème 5. Soit Y un espace métrique, K un espace métrique compact, A une partie non vide de Y , $C \in \mathbb{R}^+$, $f : A \rightarrow (C(K), \|\cdot\|_\infty)$ une application C -lipschitzienne.

Alors f admet un prolongement $g : Y \rightarrow (C(K), \|\cdot\|_\infty)$ $2C$ -lipschitzien.

On note alors que, pour tout espace de Banach X , si $E \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \ell_\infty, c_0, C(K)\}$ ($n \geq 2$, K espace métrique compact), le couple (X, E) vérifie : [pour tout 1-réseau \mathcal{N} de X , toute application lipschitzienne $f : \mathcal{N} \rightarrow E$ admet un prolongement $F : X \rightarrow E$ uniformément continu (*)] donc l'existence d'un plongement grossier de X dans E implique l'existence d'un plongement fort de X dans $\ell_p(E)$, pour tout $p \in [1, +\infty[$.

Pour conclure, les résultats obtenus par Rosendal permettent d'en savoir plus sur les liens entre plongements grossiers et plongements uniformes entre espaces de Banach, bien que l'existence d'une implication entre les assertions " X se plonge uniformément dans E " et " X se plonge grossièrement dans E ", où X et E sont des espaces de Banach, reste inconnue.

Le contre exemple fourni par Naor montre que si, pour tout couple de Banach (X, E) , l'existence d'un plongement grossier de X dans E implique l'existence d'un plongement fort dans $\ell_p(E)$, $1 < p < +\infty$ l'hypothèse [pour tout 1-réseau \mathcal{N} de X , toute application lipschitzienne $f : \mathcal{N} \rightarrow E$ admet un prolongement $F : X \rightarrow E$ uniformément continu (*)] doit être assouplie afin de le démontrer.

Pour compléter ce projet, des résultats sur l'espace de James, qui fournit un exemple d'espace non isomorphe à son carré, sont démontrés en annexe.

A L'espace de James J

A.1 Définition et premières propriétés

L'espace de James, défini ci-dessous, a été introduit en 1950 par Robert James. Il fournit de nombreux contre-exemples dans la théorie des espaces de Banach. En particulier, c'est un espace isomorphe à son bidual qui n'est pas réflexif. Nous nous concentrons ici sur quelques propriétés de cet espace. On pourra trouver d'autres résultats dans [1] et [5].

Définition 5. On définit l'espace de James par :

$$J = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{R}); \sup_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ 1 \leq p_0 < p_1 < \dots < p_n \in \mathbb{N}^*}} \sum_{j=1}^n (x_{p_j} - x_{p_{j-1}})^2 < +\infty \right\}.$$

Pour tout $x \in J$, on pose :

$$\|x\|_J = \frac{1}{\sqrt{2}} \sup_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ 1 \leq p_0 < p_1 < \dots < p_n}} \left((x_{p_n} - x_{p_0})^2 + \sum_{k=1}^n (x_{p_k} - x_{p_{k-1}})^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

et :

$$\|x\|_0 = \sup_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ 1 \leq p_0 < p_1 < \dots < p_n}} \left(\sum_{k=1}^n (x_{p_k} - x_{p_{k-1}})^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 4. • Il est clair que J est un \mathbb{R} -espace vectoriel ;

• Notons que, pour tout $x \in J$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \|x\|_0 \leq \|x\|_J \leq \sqrt{2} \|x\|_0.$$

Lorsque J est muni d'une de ces deux normes, c'est un espace de Banach, comme le montrent les deux résultats suivants.

Proposition 6. Les applications $\|\cdot\|_J$ et $\|\cdot\|_0$ définissent des normes sur J .

Démonstration. Montrons que $\|\cdot\|_J$ définit une norme sur X .

• Pour tout $x \in J$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a bien $\|\lambda x\|_J = |\lambda| \|x\|_J$.

• Soit $x \in J$ telle que $\|x\|_J = 0$. Comme $\|x\|_J = 0$ la suite x est constante. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ donc $x = 0$.

• Soit $(x, y) \in J^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $1 \leq p_0 < p_1 < \dots < p_n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} & \left(((x+y)_{p_n} - (x+y)_{p_0})^2 + \sum_{k=1}^n ((x+y)_{p_k} - (x+y)_{p_{k-1}})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(((x_{p_n} - x_{p_0}) + (y_{p_n} - y_{p_0}))^2 + \sum_{k=1}^n ((x_{p_k} - x_{p_{k-1}}) + (y_{p_k} - y_{p_{k-1}}))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left((x_{p_n} - x_{p_0})^2 + \sum_{k=1}^n (x_{p_k} - x_{p_{k-1}})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left((y_{p_n} - y_{p_0})^2 + \sum_{k=1}^n (y_{p_k} - y_{p_{k-1}})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{2} (\|x\|_J + \|y\|_J) \end{aligned}$$

puisque $\|\cdot\|_2$ est une norme sur ℓ_2 .

D'où $\|x + y\|_J \leq \|x\|_J + \|y\|_J$.

Donc $(J, \|\cdot\|_J)$ est un espace vectoriel normé. De même, $(J, \|\cdot\|_0)$ est un espace vectoriel normé. \square

Théorème 6. $(J, \|\cdot\|_0)$ est un espace de Banach.

Démonstration. Soit $(x^k = (x_n^k)_{n \in \mathbb{N}^*})_{k \in \mathbb{N}^*} \subset J$ telle que $\sum_{k=1}^{\infty} \|x^k\|_0 < +\infty$. Montrons que $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} x^k$ converge (dans $(J, \|\cdot\|_0)$).

Pour tout $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $|x_n^k| = \lim_{m \rightarrow \infty} |x_n^k - x_m^k| \leq \|x^k\|_0$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{\infty} |x_n^k| < +\infty$ d'où, comme \mathbb{R} est complet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} x_n^k$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_n^k.$$

Posons également $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Comme $(c_0, \|\cdot\|_{\infty})$ est complet, on a $x \in c_0$. Montrons alors que $x \in J$ et que $x = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} x^k$ (pour $\|\cdot\|_0$).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $1 \leq p_0 < p_1 < \dots < p_n$, on a :

$$\left(\sum_{l=1}^n (x_{p_l} - x_{p_{l-1}})^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} (x_{p_l}^k - x_{p_{l-1}}^k) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^n (x_{p_l}^k - x_{p_{l-1}}^k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x^k\|_0$$

car $\|\cdot\|_2$ vérifie l'inégalité triangulaire. Donc $x \in J$.

Pour la même raison, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{k=1}^m x^k \right\|_0 &= \sup_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ 1 \leq p_0 < p_1 < \dots < p_n}} \left(\sum_{j=1}^n \left(\left(x_{p_j} - \sum_{k=1}^m x_{p_j}^k \right) - \left(x_{p_{j-1}} - \sum_{k=1}^m x_{p_{j-1}}^k \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sup_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ 1 \leq p_0 < p_1 < \dots < p_n}} \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} (x_{p_j}^k - x_{p_{j-1}}^k) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sup_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ 1 \leq p_0 < p_1 < \dots < p_n}} \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^n (x_{p_j}^k - x_{p_{j-1}}^k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \|x^k\|_0 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

ce qui assure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^n x^k \right\|_0 = 0$, et termine la preuve. \square

Remarque 5. La remarque 4 assure que $(J, \|\cdot\|_J)$ est également un espace de Banach.

Cet espace J est séparable et admet pour base de Schauder la base canonique de c_{00} . Cela fait l'objet de la proposition suivante.

Proposition 7. La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une base monotone de $(J, \|\cdot\|_0)$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e_n \in J \setminus \{0\}$ donc il suffit de montrer les deux points suivants :

(i) $J = \overline{\text{Vect}\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}}$;

(ii) $\forall n \geq m \geq 1, \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \left\| \sum_{k=1}^m a_k e_k \right\|_0 \leq \left\| \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\|_0$.

• Montrons le point (i).

Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in J$, $\varepsilon > 0$. Par définition de $\|x\|_0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq p_0 < \dots < p_n \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$\sum_{k=1}^n (x_{p_k} - x_{p_{k-1}})^2 \geq \|x\|_0^2 - \varepsilon^2.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, pour tous $p_n < q_0 < q_1 < \dots < q_m \in \mathbb{N}^*$, on a alors :

$$\|x\|_0^2 - \varepsilon^2 + \sum_{k=1}^m (x_{q_k} - x_{q_{k-1}})^2 \leq \sum_{k=1}^n (x_{p_k} - x_{p_{k-1}})^2 + (x_{q_0} - x_{p_n})^2 + \sum_{k=1}^m (x_{q_k} - x_{q_{k-1}})^2 \leq \|x\|_0^2$$

d'où :

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{p_n+1} x_k e_k \right\|_0 = \sup_{\substack{m \in \mathbb{N}^* \\ p_n < q_0 < q_1 < \dots < q_m}} \left(\sum_{k=1}^m (x_{q_k} - x_{q_{k-1}})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon$$

ce qui assure que $x \in \overline{\text{Vect}\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}}$.

• Montrons le point (ii).

Soit $n \geq m \geq 1$, $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^m a_k e_k \right\|_0 &= \sup_{\substack{N \in \mathbb{N}^* \\ 1 \leq p_0 < p_1 < \dots < p_N \leq m}} \left(\sum_{k=1}^N (a_{p_k} - a_{p_{k-1}})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sup_{\substack{N \in \mathbb{N}^* \\ 1 \leq p_0 < p_1 < \dots < p_N \leq n}} \left(\sum_{k=1}^N (a_{p_k} - a_{p_{k-1}})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\| \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\|_0 \end{aligned}$$

donc (ii) est vérifié.

Finalement, la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une base monotone de $(J, \|\cdot\|_0)$. □

Remarque 6. Une preuve similaire montre que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une base monotone de $(J, \|\cdot\|_J)$.

Avant de prouver que la base duale de cette base de Schauder de J est une base de Schauder de J^* , introduisons quelques notations et une définition.

Notations 1. Soit X un espace de Banach admettant une base de Schauder $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

• Pour tout $1 \leq n \leq m \leq +\infty$, on note $[x_k]_{k=n}^m = \overline{\text{Vect}\{x_k, n \leq k \leq m\}}$;

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n : \begin{cases} X & \rightarrow \overline{\text{Vect}\{x_k, 1 \leq k \leq n\}} \\ x = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} a_k x_k & \mapsto \sum_{k=1}^n a_k x_k \end{cases}$.

Définition 6. Soit X un espace de Banach admettant une base de Schauder $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. On dit que la base $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est contractante si la suite des fonctions coordonnées $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une base de Schauder de X^* .

Afin de prouver qu'une base de Schauder est contractante, nous disposons du critère suivant :

Lemme 9. Soit X un espace de Banach admettant une base de Schauder $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. La base $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est contractante si et seulement si :

$$\forall x^* \in X^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| x^* \Big|_{[x_k]_{k=n}^\infty} \right\|_{([x_k]_{k=n}^\infty)^*} = 0$$

Démonstration. Notons K la constante de base de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

• Supposons la base $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ contractante. Alors, pour tout $x^* \in X^*$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x^* - P_n^* x^*\|_{X^*} = 0.$$

Soit $x^* \in X^*$, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $y \in [x_k]_{k=n}^\infty$. Comme $P_{n-1}y = 0$, on a :

$$|\langle x^*, y \rangle_{X^*, X}| = |\langle x^*, y \rangle_{X^*, X} - \langle x^*, P_{n-1}y \rangle_{X^*, X}| = |\langle x^*, y \rangle_{X^*, X} - \langle P_{n-1}^* x^*, y \rangle_{X^*, X}| \leq \|x^* - P_{n-1}^* x^*\|_{X^*} \|y\|$$

donc :

$$\left\| x^* \Big|_{[x_k]_{k=n}^\infty} \right\|_{([x_k]_{k=n}^\infty)^*} \leq \|x^* - P_{n-1}^* x^*\|_{X^*}$$

d'où, pour tout $x \in X^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| x^* \Big|_{[x_k]_{k=n}^\infty} \right\|_{([x_k]_{k=n}^\infty)^*} = 0$.

• Réciproquement, supposons que, pour tout $x \in X^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| x^* \Big|_{[x_k]_{k=n}^\infty} \right\|_{([x_k]_{k=n}^\infty)^*} = 0$.

Soit $x^* \in X^*$. Pour tout $x \in X$ vérifiant $\|x\| = 1$, on a :

$$\begin{aligned} |\langle x^* - P_n^* x^*, x \rangle_{X^*, X}| &= |\langle x^*, (I - P_n)x \rangle_{X^*, X}| = \left| \left\langle x^* \Big|_{[x_k]_{k=n+1}^\infty}, (I - P_n)x \right\rangle_{X^*, X} \right| \\ &\leq \left\| x^* \Big|_{[x_k]_{k=n+1}^\infty} \right\|_{([x_k]_{k=n+1}^\infty)^*} \|I - P_n\|_{X \rightarrow X} \leq (1 + K) \left\| x^* \Big|_{[x_k]_{k=n+1}^\infty} \right\|_{([x_k]_{k=n+1}^\infty)^*} \end{aligned}$$

donc la base $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est contractante. \square

On peut alors utiliser ce critère pour montrer que J admet une base contractante.

Proposition 8. La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une base contractante de $(J, \|\cdot\|_0)$.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde en supposant que ce n'est pas le cas. D'après le lemme 9, il existe $x^* \in J^*$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| x^* \Big|_{[e_k]_{k=n}^\infty} \right\|_{([e_k]_{k=n}^\infty)^*} \neq 0$. Cela signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$, et une suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{N}^*$ strictement croissante tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \left\| x^* \Big|_{[x_i]_{i=n_k}^\infty} \right\|_{([x_i]_{i=n_k}^\infty)^*} > \varepsilon.$$

On en déduit qu'il existe $(z_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \subset J$ vérifiant : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\|z_k\|_0 = 1$, $z_k \in \text{Vect}\{z_i, i \geq n_k\}$ et $x^*(z_k) > \varepsilon$.

Afin d'obtenir une contradiction, construisons par récurrence une suite $(y_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \subset J$ telle que

$\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k} y_k$ converge dans J et $x^* \left(\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k} y_k \right)$ diverge.

• Initialisation : Posons $m_1 = n_1$. On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=n_1}^n \langle e_i^*, z_1 \rangle_{J^*, J} e_i = z_1 \text{ et } x^*(z_1) > \varepsilon$$

donc il existe $n_r > m_1$ vérifiant :

$$x^* \left(\sum_{i=n_1}^{n_r-1} \langle e_i^*, z_1 \rangle_{J^*, J} e_i \right) > \varepsilon.$$

On pose alors $m_2 = n_r$ et $y_1 = \frac{\sum_{i=n_1}^{m_2-1} \langle e_i^*, z_1 \rangle_{J^*, J} e_i}{\left\| \sum_{i=n_1}^{m_2-1} \langle e_i^*, z_1 \rangle_{J^*, J} e_i \right\|_0}$.

Comme $\left\| \sum_{i=n_1}^{m_2-1} \langle e_i^*, z_1 \rangle_{J^*, J} e_i \right\|_0 \leq \|z_1\|_0 = 1$ car la base $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone, on a :

$$\|y_1\|_0 = 1 \text{ et } x^*(y_1) > \varepsilon.$$

• Hérédité : Supposons ainsi construits $m_1 < m_2 < \dots < m_{k+1} \in \{n_i, i \in \mathbb{N}^*\}$ et $y_1, \dots, y_k \in J$ tels que, pour tout $j \in [1, k]$, on ait :

$$y_j = \sum_{i=m_j}^{m_{j+1}-1} \langle e_i^*, y_j \rangle_{J^*, J} e_i, \|y_j\|_0 = 1 \text{ et } x^*(y_j) > \varepsilon.$$

Par hypothèse, il existe $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $m_{k+1} = n_j$. On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=n_j}^n \langle e_i^*, z_j \rangle_{J^*, J} e_i = z_j \text{ et } x^*(z_j) > \varepsilon$$

donc il existe $n_{j'} > n_j$ vérifiant :

$$x^* \left(\sum_{i=n_j}^{n_{j'}-1} \langle e_i^*, z_j \rangle_{J^*, J} e_i \right) > \varepsilon.$$

Posons $m_{k+2} = n_{j'}$ et $y_{k+1} = \frac{\sum_{i=m_{k+1}}^{m_{k+2}-1} \langle e_i^*, z_j \rangle_{J^*, J} e_i}{\left\| \sum_{i=m_{k+1}}^{m_{k+2}-1} \langle e_i^*, z_j \rangle_{J^*, J} e_i \right\|_0}$. Comme $\left\| \sum_{i=m_{k+1}}^{m_{k+2}-1} \langle e_i^*, z_j \rangle_{J^*, J} e_i \right\|_0 \leq \|z_j\|_0 = 1$

puisque $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une base monotone de J , on a :

$$\|y_{k+1}\|_0 = 1 \text{ et } x^*(y_{k+1}) > \varepsilon.$$

Ceci termine la construction de $(y_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \subset J$ par récurrence.

Posons $\tilde{y} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} y_k \in c_0$. Montrons que $\tilde{y} \in J$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq p_0 < \dots < p_n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, posons $A_i = \{k \in [1, n]; m_i \leq p_{k-1} < p_k \leq m_{i+1} - 1\}$. Posons également $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ et $B = [1, n] \setminus A$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k \in A_i} (\tilde{y}_{p_k} - \tilde{y}_{p_{k-1}})^2 = \sum_{k \in A_i} \left(\frac{y_i(p_k) - y_i(p_{k-1})}{i} \right)^2 = \frac{1}{i^2} \sum_{k \in A_i} (y_i(p_k) - y_i(p_{k-1}))^2 \leq \frac{\|y_i\|_0^2}{i^2} = \frac{1}{i^2}.$$

Soit alors $k \in B$. Il existe $(i, j) = (i(k), j(k)) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $m_i \leq p_{k-1} \leq m_{i+1} - 1$ et $m_j \leq p_k \leq m_{j+1} - 1$ (en particulier $i < j$). On a :

$$(\tilde{y}_{p_k} - \tilde{y}_{p_{k-1}})^2 = \left(\frac{y_j(p_k)}{j^2} - \frac{y_i(p_{k-1})}{i^2} \right)^2 \leq 2 \left(\frac{y_j(p_k)^2}{j^2} + \frac{y_i(p_{k-1})^2}{i^2} \right) \leq 2 \left(\frac{\|y_j\|_0^2}{j^2} + \frac{\|y_i\|_0^2}{i^2} \right) = \frac{2}{j^2} + \frac{2}{i^2}.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (\tilde{y}_{p_k} - \tilde{y}_{p_{k-1}})^2 &= \sum_{k \in A} (\tilde{y}_{p_k} - \tilde{y}_{p_{k-1}})^2 + \sum_{k \in B} (\tilde{y}_{p_k} - \tilde{y}_{p_{k-1}})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k \in A_i} (\tilde{y}_{p_k} - \tilde{y}_{p_{k-1}})^2 + \sum_{k \in B} (\tilde{y}_{p_k} - \tilde{y}_{p_{k-1}})^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} + \sum_{k \in B} \left(\frac{2}{j(k)^2} + \frac{2}{i(k)^2} \right) \end{aligned}$$

Or, pour tout $(k, k') \in B^2$ tel que $k \neq k'$, $j(k) \neq j(k')$. En effet, soit $(k, k') \in B^2$ tel que $k < k'$. Si $j(k) = j(k') = j$, alors :

$$m_j \leq p_k \leq p_{k'-1} < p_{k'} \leq m_{j+1} - 1$$

ce qui contredit $k' \in B$. Donc on a donc le résultat par symétrie. De même, pour tout $(k, k') \in B^2$ tel que $k \neq k'$, $i(k) \neq i(k')$. On en déduit que :

$$\sum_{k \in B} \frac{1}{j(k)^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ et } \sum_{k \in B} \frac{1}{i(k)^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

d'où :

$$\sum_{k=1}^n (\tilde{y}_{p_k} - \tilde{y}_{p_{k-1}})^2 \leq 5 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

ce qui assure que $\tilde{y} \in J$.

Cependant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$x^* \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} y_k \right) > \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

donc $x^* \left(\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k} y_k \right)$ diverge, ce qui est absurde.

Finalement, la base $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une base contractante de $(J, \|\cdot\|_0)$. \square

Remarque 7. On en déduit que la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est également une base contractante de $(J, \|\cdot\|_J)$.

La base contractante $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ayant la particularité d'être monotone, on en déduit que la base $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ l'est également, ce qui fait l'objet du lemme ci-dessous.

Lemme 10. Soit X un espace de Banach admettant une base contractante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base monotone.

La base $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est également une base monotone de X^* .

Démonstration. Soit $n \geq m \geq 1$, $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrons que :

$$\left\| \sum_{k=1}^m a_k x_k^* \right\|_{X^*} \leq \left\| \sum_{k=1}^n a_k x_k^* \right\|_{X^*}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $x = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k x_k \in X$ vérifiant :

$$\|x\| = 1 \text{ et } \left| \left(\sum_{k=1}^m a_k x_k^* \right) (x) \right| \geq \left\| \sum_{k=1}^m a_k x_k^* \right\|_{X^*} - \varepsilon.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^m a_k x_k^* \right\|_{X^*} &\leq \left| \left(\sum_{k=1}^m a_k x_k^* \right) (x) \right| + \varepsilon \\ &= \left| \left(\sum_{k=1}^m a_k x_k^* \right) \left(\sum_{i=1}^m \beta_i x_i \right) \right| + \varepsilon \\ &= \left| \left(\sum_{k=1}^n a_k x_k^* \right) \left(\sum_{i=1}^m \beta_i x_i \right) \right| + \varepsilon \text{ car } n \geq m \\ &\leq \left\| \sum_{k=1}^n a_k x_k^* \right\|_{X^*} \left\| \sum_{i=1}^m \beta_i x_i \right\| + \varepsilon \\ &\leq \left\| \sum_{k=1}^n a_k x_k^* \right\|_{X^*} \|x\| + \varepsilon \text{ car } (x_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ est monotone} \\ &= \left\| \sum_{k=1}^n a_k x_k^* \right\|_{X^*} + \varepsilon \end{aligned}$$

d'où :

$$\left\| \sum_{k=1}^m a_k x_k^* \right\|_{X^*} \leq \left\| \sum_{k=1}^n a_k x_k^* \right\|_{X^*}$$

ce qui assure que la base $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est également une base monotone de X^* . \square

A.2 Non-réflexivité de l'espace de James

Ce résultat, bien qu'intéressant en lui-même sert surtout à démontrer la proposition suivante, ramenant le calcul de la norme d'un élément du bidual de J au calcul de la norme d'un élément de J .

Proposition 9. *On munit J de $\|\cdot\| = \|\cdot\|_J$ ou $\|\cdot\|_0$. Soit $x^{**} \in J^{**}$. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on pose $\xi_i = x^{**}(e_i^*)$. On a :*

$$\|x^{**}\|_{J^{**}} = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right\|.$$

Démonstration. Si $x^{**} = 0$, le résultat est immédiat donc on peut supposer $x^{**} \neq 0$. Montrons que :

$$\|x^{**}\|_{J^{**}} = \sup_{\substack{x^* \in J^* \\ \|x^*\|_{J^*} = 1}} |x^{**}(x^*)| = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \sup_{\substack{x^* \in \text{Vect}\{e_1^*, \dots, e_n^*\} \\ \|x^*\|_{J^*} \leq 1}} |x^{**}(x^*)|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il suffit de montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $x^* \in \text{Vect}\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ vérifiant $\|x^*\|_{J^*} \leq 1$ et $|x^{**}(x^*)| \geq \|x^{**}\|_{J^{**}} - 2\varepsilon$.

Par définition de $\|x^{**}\|_{J^{**}}$, il existe $y^* \in J^*$ vérifiant $\|y^*\|_{J^*} = 1$ et $|x^{**}(y^*)| \geq \|x^{**}\|_{J^{**}} - \varepsilon$. D'après la proposition 8, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1^*, \dots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$\left\| y^* - \sum_{k=1}^n x_k^* e_k^* \right\|_{J^*} \leq \frac{\varepsilon}{\|x^{**}\|_{J^{**}}}.$$

Posons $x^* = \sum_{k=1}^n x_k^* e_k^* \in \text{Vect}\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$. D'après le lemme 10, $\|x^*\|_{J^*} \leq \|y^*\|_{J^*} = 1$ et :

$$|x^{**}(x^*)| = |x^{**}(y^*) - x^{**}(y^* - x^*)| \geq |x^{**}(y^*)| - \|x^{**}\|_{J^{**}} \|x^* - y^*\|_{J^*} \geq \|x^{**}\|_{J^{**}} - 2\varepsilon$$

d'où $\|x^{**}\|_{J^{**}} = \sup_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ x^* \in \text{Vect}\{e_1^*, \dots, e_n^*\} \\ \|x^*\|_{J^*} \leq 1}} |x^{**}(x^*)|$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x^* = \sum_{k=1}^n x_k^* e_k^* \in \text{Vect}\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$, on a :

$$|x^{**}(x^*)| = \left| \sum_{k=1}^n x_k^* x^{**}(e_k^*) \right| = \left| \sum_{k=1}^n x_k^* \xi_k \right| = \left| x^* \left(\sum_{k=1}^n \xi_k e_k \right) \right|$$

donc, d'après le théorème de Hahn-Banach :

$$\|x^{**}\|_{J^{**}} = \sup_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ x^* \in \text{Vect}\{e_1^*, \dots, e_n^*\} \\ \|x^*\|_{J^*} \leq 1}} \left| x^* \left(\sum_{k=1}^n \xi_k e_k \right) \right| = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \right\|$$

ce qui assure le résultat. □

Dans la suite, on munit J de $\|\cdot\|_0$ mais les résultats restent vrais pour $\|\cdot\|_J$. Afin de montrer que J n'est pas réflexif, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 11. Soit $x^{**} \in J^{**}$. On pose $\xi = (x^{**}(e_n^*))_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}$.

On a :

$$\sup_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ 1 \leq p_0 < p_1 < \dots < p_n \in \mathbb{N}^*}} \sum_{j=1}^n (\xi_{p_j} - \xi_{p_{j-1}})^2 < +\infty$$

et ξ converge.

Démonstration. • Commençons par montrer que $\sup_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ 1 \leq p_0 < p_1 < \dots < p_n \in \mathbb{N}^*}} \sum_{j=1}^n (\xi_{p_j} - \xi_{p_{j-1}})^2 < +\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq p_0 < p_1 < \dots < p_n \in \mathbb{N}^*$. D'après la proposition 9, on a :

$$\sum_{k=1}^n (\xi_{p_k} - \xi_{p_{k-1}})^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^{p_n} \xi_k e_k \right\|_0^2 \leq \|x^{**}\|_{J^{**}}^2$$

d'où
$$\sup_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ 1 \leq p_0 < p_1 < \dots < p_n \in \mathbb{N}^*}} \sum_{j=1}^n (\xi_{p_j} - \xi_{p_{j-1}})^2 \leq \|x^{**}\|_{J^{**}}^2 < +\infty.$$

• Montrons désormais que ξ converge. Comme \mathbb{R} est complet, il suffit de montrer que la suite ξ est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$.

D'après la proposition 9, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\left\| \sum_{k=1}^N \xi_k e_k \right\|_0^2 \geq \|x^{**}\|_{J^{**}}^2 - \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Par définition de $\left\| \sum_{k=1}^N \xi_k e_k \right\|_0$, on en déduit l'existence de $1 \leq p_0 < p_1 < \dots < p_n \leq N$ vérifiant :

$$\sum_{k=1}^n (\xi_{p_k} - \xi_{p_{k-1}})^2 \geq \left\| \sum_{k=1}^N \xi_k e_k \right\|_0^2 - \frac{\varepsilon^2}{2} \geq \|x^{**}\|_{J^{**}}^2 - \varepsilon^2.$$

On a alors, toujours d'après la proposition 9, pour tout $p > q > N$:

$$(\xi_p - \xi_q)^2 = \left(\sum_{k=1}^n (\xi_{p_k} - \xi_{p_{k-1}})^2 + (\xi_p - \xi_q)^2 \right) - \sum_{k=1}^n (\xi_{p_k} - \xi_{p_{k-1}})^2 \leq \|x^{**}\|_{J^{**}}^2 - \|x^{**}\|_{J^{**}}^2 + \varepsilon^2$$

ce qui assure le résultat. \square

Notons $\Pi : J \rightarrow J^{**}$ l'injection canonique. Nous avons désormais tous les outils en main pour montrer que J n'est pas réflexif. Pour ce faire, nous montrons le théorème suivant, plus fort, qui nous permettra par la suite de démontrer que J et $J \oplus J$ ne sont pas isomorphes.

Théorème 7. *L'espace $\Pi(J)$ est de codimension 1 dans J^{**} .*

Démonstration. D'après le lemme 11, l'application :

$$T : \begin{cases} J^{**} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x^{**} & \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} x^{**}(e_n^*) \end{cases}$$

est bien définie. On note que T est linéaire.

• Montrons que $\ker(T) = \Pi(J)$.

* Pour tout $x \in J$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Pi(x)(e_n^*) = e_n^*(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ car } x \in J \subset c_0$$

donc $\Pi(J) \subset \ker(T)$.

* Soit $x^{**} \in \ker(T)$. D'après le lemme 11, la suite $\xi = (x^{**}(e_n^*))_{n \in \mathbb{N}^*} \in J$. Puisque $\Pi(\xi) = x^{**}$, on a $\ker(T) \subset \Pi(J)$.

D'où $\ker(T) = \Pi(J)$.

• Montrons que T est surjective.

Par linéarité, il suffit de montrer que $1 \in T(J^{**})$. Posons $E = \text{Vect}\{e_n^*, n \in \mathbb{N}^*\} \subset J^*$ et :

$$x^{**} : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ \sum_{n=1}^N a_n e_n^* & \mapsto \sum_{n=1}^N a_n \end{cases}.$$

Montrons que $x^{**} \in E^*$. Notons que x^{**} est bien linéaire. Pour tout $x^* = \sum_{n=1}^N a_n e_n^* \in E$, on a :

$$|x^{**}(x^*)| = \left| x^* \left(\sum_{n=1}^N e_n \right) \right| \leq \|x^*\|_{J^*} \left\| \sum_{n=1}^N e_n \right\|_0 = \|x^*\|_{J^*}$$

donc $x^{**} \in E^*$.

Or E est dense dans J^* d'après le lemme 10 donc x^{**} s'étend de manière unique en une application $\tilde{x}^{**} \in J^{**}$, encore notée x^{**} . Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x^{**}(e_n^*) = 1$ donc $T(x^{**}) = 1$, ce qui assure la surjectivité de T .

• Montrons que T est continue.

Pour tout $x^{**} \in J^{**}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|x^{**}(e_n^*)| \leq \|x^{**}\|_{J^{**}} \|e_n^*\|_{J^*} = \|x^{**}\|_{J^{**}}$$

donc $|T(x^{**})| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |x^{**}(e_n^*)| \leq \|x^{**}\|_{J^{**}}$, i.e T est continue et $\|T\| \leq 1$.

On en déduit que l'application :

$$\tilde{T} : \begin{cases} J^{**} / \Pi(J) & \rightarrow \mathbb{R} \\ x^{**} + \Pi(J) & \mapsto T(x^{**}) \end{cases}$$

est bien définie, linéaire, continue, bijective. On note également que, pour tout $x^{**} + \Pi(J) \in J^{**} / \Pi(J)$, on a :

$$|\tilde{T}(x^{**} + \Pi(J))| \leq \|x^{**} + \Pi(J)\|_{J^{**} / \Pi(J)}.$$

d'où le résultat. □

Remarque 8. L'application \tilde{T} définie dans la preuve précédente s'avère être une isométrie. En effet, soit $x^{**} + \Pi(J) \in J^{**} / \Pi(J)$. Il reste à montrer qu'on a :

$$|\tilde{T}(x^{**} + \Pi(J))| \geq \|x^{**} + \Pi(J)\|_{J^{**} / \Pi(J)}.$$

Posons $l = T(x^{**}) \in \mathbb{R}$, $y^{**} \in J^{**}$ l'unique prolongement de l'application :

$$\tilde{y}^{**} : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ \sum_{n=1}^N a_n e_n^* & \mapsto \sum_{n=1}^N a_n l \end{cases}.$$

Comme $x^{**} - y^{**} \in \Pi(J)$, la proposition 9 assure que :

$$\|x^{**} + \Pi(J)\|_{J^{**} / \Pi(J)} \leq \|y^{**}\|_{J^{**}} = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \left\| \sum_{i=1}^n l e_i \right\|_0 = |l| = |\tilde{T}(x^{**} + \Pi(J))|$$

d'où le résultat.

Le fait que $\Pi(J)$ soit de codimension 1 dans J admet la conséquence suivante : $J \oplus J$ et J ne peuvent être isomorphes. Par conséquent, pour tout $p \in]1, +\infty[$, J et $\ell_p(J)$ ne peuvent pas l'être non plus. C'est ce que nous montrons dans cette dernière sous-partie.

A.3 Quelques conséquences

Commençons par montrer quelques résultats généraux.

Proposition 10. *Soit X un \mathbb{R} -espace de Banach isomorphe à J . Notons $\Pi_X : X \rightarrow X^{**}$ l'injection canonique de X dans son bidual.*

*Alors $\Pi_X(X)$ est de codimension 1 dans X^{**} .*

Démonstration. Par hypothèse, il existe $T : X \rightarrow J$ un isomorphisme. Alors $T^{**} : X^{**} \rightarrow J^{**}$ est un isomorphisme. Notons $q : J^{**} \rightarrow J^{**} / \Pi(J)$ la surjection canonique. Pour avoir le résultat, d'après le théorème 7, il suffit de montrer que $\ker(q \circ T^{**}) = \Pi_X(X)$. Or, pour tout $x^{**} \in X^{**}$, on a :

$$\begin{aligned} x^{**} \in \ker(q \circ T^{**}) &\Leftrightarrow q \circ T^{**}(x^{**}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists j \in J; T^{**}(x^{**}) = \Pi(j) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in X; T^{**}(x^{**}) = \Pi(T(x)) \text{ car } T \text{ est surjective} \\ &\Leftrightarrow \exists x \in X; x^{**} \circ T^* = T^{**} \circ x^{**} = \Pi(T(x)) = \Pi_X(x) \circ T^* \\ &\Leftrightarrow \exists x \in X; x^{**} = \Pi_X(x) \text{ car } T^* \text{ est surjective} \\ &\Leftrightarrow x^{**} \in \Pi_X(X) \end{aligned}$$

d'où $\Pi_X(X)$ est de codimension 1 dans X^{**} . □

Proposition 11. *Soit X et Y des espaces de Banach sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .*

L'application $I : \begin{cases} X^ \oplus_2 Y^* & \rightarrow (X \oplus_2 Y)^* \\ (x^*, y^*) & \mapsto \begin{cases} X \oplus_2 Y & \rightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) & \mapsto x^*(x) + y^*(y) \end{cases} \end{cases}$ est une isométrie linéaire surjective.*

Démonstration. • Commençons par montrer que I est bien définie.

Soit $(x^*, y^*) \in X^* \oplus_2 Y^*$. L'application $\begin{cases} X \oplus_2 Y & \rightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) & \mapsto x^*(x) + y^*(y) \end{cases}$ est linéaire et, pour tout $(x, y) \in X \oplus_2 Y$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz assure que :

$$|x^*(x) + y^*(y)| \leq \|x^*\|_{X^*} \|x\|_X + \|y^*\|_{Y^*} \|y\|_Y \leq \|(x^*, y^*)\|_{X^* \oplus_2 Y^*} \|(x, y)\|_{X \oplus_2 Y}$$

donc I est bien définie et $\|I(x^*, y^*)\|_{(X \oplus_2 Y)^*} \leq \|(x^*, y^*)\|_{X^* \oplus_2 Y^*}$.

• Comme I est linéaire, elle est donc continue.

• On note que I est surjective car si $\varphi \in (X \oplus_2 Y)^*$, alors :

$$x^* : \begin{cases} X & \rightarrow \mathbb{K} \\ x & \mapsto \varphi(x, 0) \end{cases} \in X^* \text{ et } y^* : \begin{cases} Y & \rightarrow \mathbb{K} \\ y & \mapsto \varphi(0, y) \end{cases} \in Y^* \text{ et } \varphi = I(x^*, y^*).$$

• Il reste à montrer que, pour tout $(x^*, y^*) \in X^* \oplus_2 Y^*$, $\|I(x^*, y^*)\|_{(X \oplus_2 Y)^*} \geq \|(x^*, y^*)\|_{X^* \oplus_2 Y^*}$. Soit $(x^*, y^*) \in X^* \oplus_2 Y^*$, $\varepsilon > 0$. Il existe $(x, y) \in X \oplus_2 Y$ vérifiant : $\|x\|_X = 1$, $\|y\|_Y = 1$ et $|x^*(\|x^*\|_{X^*} x)| \geq \|x^*\|_{X^*}^2 - \varepsilon$, $|y^*(\|y^*\|_{Y^*} y)| \geq \|y^*\|_{Y^*}^2 - \varepsilon$. On a alors :

$$\begin{aligned} I(x^*, y^*)(\|x^*\|_{X^*} x, \|y^*\|_{Y^*} y) &\geq \|(x^*, y^*)\|_{X^* \oplus_2 Y^*}^2 - 2\varepsilon \\ &= \|(x^*, y^*)\|_{X^* \oplus_2 Y^*} \|(\|x^*\|_{X^*} x, \|y^*\|_{Y^*} y)\|_{X \oplus_2 Y} - 2\varepsilon \end{aligned}$$

ce qui assure le résultat. □

Proposition 12. Soit X et Y des espaces de Banach sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Notons $\Pi_X : X \rightarrow X^{**}$, $\Pi_Y : Y \rightarrow Y^{**}$ et $\Pi_{X \oplus_2 Y} : X \oplus_2 Y \rightarrow (X \oplus_2 Y)^{**}$ les injections canoniques. Les espaces $\Pi_{X \oplus_2 Y}(X \oplus_2 Y)$ et $\Pi_X(X) \oplus_2 \Pi_Y(Y)$ sont isomorphes.

Démonstration. D'après la proposition 11, les applications $I^* : (X \oplus_2 Y)^{**} \rightarrow (X^* \oplus_2 Y^*)^*$ et :

$$K : \begin{cases} X^{**} \oplus_2 Y^{**} & \rightarrow & (X^* \oplus_2 Y^*)^* \\ (x^{**}, y^{**}) & \mapsto & \begin{cases} X^* \oplus_2 Y^* & \rightarrow & \mathbb{K} \\ (x^*, y^*) & \mapsto & x^{**}(x^*) + y^{**}(y^*) \end{cases} \end{cases}$$

sont des isomorphismes. Donc $T = K^{-1} \circ I^* : (X \oplus_2 Y)^{**} \rightarrow X^{**} \oplus_2 Y^{**}$ est un isomorphisme d'après le théorème d'isomorphisme de Banach. Il suffit alors de montrer que $\Pi_X(X) \oplus_2 \Pi_Y(Y) = T \circ \Pi_{X \oplus_2 Y}(X \oplus_2 Y)$ pour conclure. Pour cela, montrons que, pour tout $(x, y) \in X \oplus_2 Y$, on a $T \circ \Pi_{X \oplus_2 Y}(x, y) = (\Pi_X(x), \Pi_Y(y))$. Soit $(x, y) \in X \oplus_2 Y$. Soit $(x^*, y^*) \in X^* \oplus_2 Y^*$. Il suffit de montrer qu'on a :

$$K(T \circ \Pi_{X \oplus_2 Y}(x, y))(x^*, y^*) = K(\Pi_X(x), \Pi_Y(y))(x^*, y^*).$$

Or :

$$\begin{aligned} K(T \circ \Pi_{X \oplus_2 Y}(x, y))(x^*, y^*) &= I^*(\Pi_{X \oplus_2 Y}(x, y))(x^*, y^*) = \Pi_{X \oplus_2 Y}(x, y)(I(x^*, y^*)) \\ &= I(x^*, y^*)(x, y) = x^*(x) + y^*(y) = \Pi_X(x)(x^*) + \Pi_Y(y)(y^*) \\ &= K(\Pi_X(x), \Pi_Y(y))(x^*, y^*) \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Proposition 13. Soit X et Y des espaces de Banach sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Notons $\Pi_X : X \rightarrow X^{**}$, $\Pi_Y : Y \rightarrow Y^{**}$ et $\Pi_{X \oplus_2 Y} : X \oplus_2 Y \rightarrow (X \oplus_2 Y)^{**}$ les injections canoniques. Les espaces $(X \oplus_2 Y)^{**} / \Pi_{X \oplus_2 Y}(X \oplus_2 Y)$ et $(X^{**} / \Pi_X(X)) \oplus_2 (Y^{**} / \Pi_Y(Y))$ sont isomorphes.

Démonstration. Reprenons les notations de la preuve précédente. Notons $q_X : X^{**} \rightarrow X^{**} / \Pi_X(X)$ et $q_Y : Y^{**} \rightarrow Y^{**} / \Pi_Y(Y)$ les surjections canoniques. On pose :

$$q : \begin{cases} X^{**} \oplus_2 Y^{**} & \rightarrow & (X^{**} / \Pi_X(X)) \oplus_2 (Y^{**} / \Pi_Y(Y)) \\ (x^{**}, y^{**}) & \mapsto & (q_X(x^{**}), q_Y(y^{**})) \end{cases}$$

et $S = q \circ T$:

L'application $S : (X \oplus_2 Y)^{**} \rightarrow (X^{**} / \Pi_X(X)) \oplus_2 (Y^{**} / \Pi_Y(Y))$ est linéaire, continue, surjective donc il suffit de montrer que $\ker(S) = \Pi_{X \oplus_2 Y}(X \oplus_2 Y)$. Or :

$$\ker(S) = T^{-1}(\Pi_X(X) \oplus_2 \Pi_Y(Y)) = \Pi_{X \oplus_2 Y}(X \oplus_2 Y)$$

d'où le résultat. □

Ces résultats permettent d'obtenir le corollaire que nous souhaitons :

Corollaire 7. Notons $\Pi_{J \oplus_2 J} : J \oplus_2 J \rightarrow (J \oplus_2 J)^{**}$ la surjection canonique. L'espace $\Pi_{J \oplus_2 J}(J \oplus_2 J)$ est de codimension 2 dans $(J \oplus_2 J)^{**}$. En particulier, J et $J \oplus_2 J$ ne sont pas isomorphes.

Démonstration. D'après la proposition 13 et le théorème 7, on a :

$$(\mathbb{J} \oplus_2 \mathbb{J})^{**} / \Pi_{\mathbb{J} \oplus_2 \mathbb{J}}(\mathbb{J} \oplus_2 \mathbb{J}) \simeq (\mathbb{J}^{**} / \Pi(\mathbb{J})) \oplus_2 (\mathbb{J}^{**} / \Pi(\mathbb{J})) \simeq \mathbb{R}^2$$

donc $\Pi_{\mathbb{J} \oplus_2 \mathbb{J}}(\mathbb{J} \oplus_2 \mathbb{J})$ est de codimension 2 dans $(\mathbb{J} \oplus_2 \mathbb{J})^{**}$.

La proposition 10 assure alors que \mathbb{J} et $\mathbb{J} \oplus_2 \mathbb{J}$ ne sont pas isomorphes. \square

On obtient alors le corollaire immédiat suivant :

Corollaire 8. *Soit $p \in [1, +\infty[$.*

Les espaces \mathbb{J} et $\ell_p(\mathbb{J})$ ne sont pas isomorphes.

Démonstration. Si \mathbb{J} et $\ell_p(\mathbb{J})$ sont isomorphes alors, comme \mathbb{N} et \mathbb{N}^2 sont en bijection, on a :

$$\mathbb{J} \oplus \mathbb{J} \simeq \ell_p(\mathbb{J}) \oplus \ell_p(\mathbb{J}) \simeq \ell_p(\mathbb{J}) \simeq \mathbb{J}$$

ce qui contredit le résultat précédent. Donc \mathbb{J} et $\ell_p(\mathbb{J})$ ne sont pas isomorphes. \square

On peut même montrer le résultat suivant, plus fort :

Corollaire 9. *Soit $1 < p < +\infty$. Notons $\Pi_{\ell_p(\mathbb{J})} : \ell_p(\mathbb{J}) \rightarrow (\ell_p(\mathbb{J}))^{**}$ la surjection canonique.*

*L'espace $\Pi_{\ell_p(\mathbb{J})}(\ell_p(\mathbb{J}))$ est de codimension infinie dans $(\ell_p(\mathbb{J}))^{**}$.*

En particulier, \mathbb{J} et $\ell_p(\mathbb{J})$ ne sont pas isomorphes.

Démonstration. D'après le lemme 4 et le théorème 7, on a :

$$\ell_p(\mathbb{J})^{**} \equiv \ell_p(\mathbb{J}^{**}) \equiv \ell_p(\mathbb{J} \oplus \mathbb{R}) \simeq \ell_p(\mathbb{J}) \oplus \ell_p$$

Notons $V : \ell_p(\mathbb{J})^{**} \rightarrow \ell_p(\mathbb{J}) \oplus \ell_p$ un tel isomorphisme.

On vérifie que $V(\Pi_{\ell_p(\mathbb{J})}(\ell_p(\mathbb{J}))) = \ell_p(\mathbb{J})$, d'où $\ell_p(\mathbb{J})^{**} / \Pi_{\ell_p(\mathbb{J})}(\ell_p(\mathbb{J})) \simeq \ell_p$, avec ℓ_p de dimension infinie, ce qui assure que $\Pi_{\ell_p(\mathbb{J})}(\ell_p(\mathbb{J}))$ est de codimension infinie dans $(\ell_p(\mathbb{J}))^{**}$.

La proposition 10 assure alors que \mathbb{J} et $\ell_p(\mathbb{J})$ ne sont pas isomorphes. \square

On a donc montré que $\mathbb{J} \oplus \mathbb{J}$ n'est pas isomorphe à \mathbb{J} . On peut également montrer que tout sous-espace X de \mathbb{J} est réflexif ou quasi-réflexif d'ordre 1 (*i.e* $\dim(X^{**} / \Pi_X(X)) = 1$), ce qui implique que $\mathbb{J} \oplus \mathbb{J}$ ne se plonge pas linéairement dans \mathbb{J} . De plus, $\mathbb{J} \oplus \mathbb{J}$ étant séparable et \mathbb{J} ayant la propriété de Radon-Nikodým (*i.e* toute application lipschitzienne de \mathbb{R} dans X est différentiable presque-partout), un théorème de différentiabilité assure que, comme $\mathbb{J} \oplus \mathbb{J}$ ne se plonge pas linéairement dans \mathbb{J} , il n'existe pas de plongement lipschitzien de $\mathbb{J} \oplus \mathbb{J}$ dans \mathbb{J} . Une question naturelle est alors la suivante : peut-on trouver un plongement grossier ou uniforme de $\mathbb{J} \oplus \mathbb{J}$ dans \mathbb{J} ?

Références

- [1] Fernando Albiac and Nigel J. Kalton. *Topics in Banach Space Theory*. 2006.
- [2] Yoav Benyamini and Joram Lindenstrauss. *Geometric Nonlinear Functional Analysis*. AMS, 1999.
- [3] Nigel J. Kalton. Extending lipschitz maps into $c(k)$ -spaces. *Israel Journal of Mathematics*, 162 :275–315, 2007.
- [4] Assaf Naor. Uniform nonextendability from nets. 2015.
- [5] Helga Fetter Nathansky and Berta Gamboa De Buen. *Introducción al Análisis Funcional y a la Geometría de Espacios de Banach*. 2008.
- [6] Christian Rosendal. Equivariant geometry of banach spaces and topological groups. *Forum of Mathematics, Sigma*, 5 :e22, 2017.
- [7] Nik Weaver. *Lipschitz algebras, Second edition*. World Scientific, 2018.