L'espace libre de l'espace de Pełczyński est isomorphe à l'espace libre d'un compact

Tony Procházka
collaboration avec L. C. García Lirola (Murcia)

LmB, Université Bourgogne Franche-Comté

8 juin, 2018
SMF 2018, Lille

Définition

Soit (M, d) ... un espace métrique, $0 \in M$ ... un point.

Définition

Soit (M, d) ... un espace métrique, $0 \in M$ ... un point.
On pose
$\mathrm{Lip}_0(M) := \{f : M \to \mathbb{R}\ \text{Lipschitz},\ f(0) = 0\}$

$$\|f\|_L := \sup_{x \neq y} \frac{f(x) - f(y)}{d(x, y)}$$

M se plonge canoniquement isométriquement dans $\mathrm{Lip}_0(M)^*$

$$\begin{aligned}\delta : M &\to \mathrm{Lip}_0(M)^* \\ x &\mapsto \delta(x) = (f \mapsto f(x))\end{aligned}$$

M se plonge canoniquement isométriquement dans $\mathrm{Lip}_0(M)^*$

$$\begin{aligned} \delta : M &\to \mathrm{Lip}_0(M)^* \\ x &\mapsto \delta(x) = (f \mapsto f(x)) \end{aligned}$$

Définition

L'*espace Lipshitz libre sur M* est

$$\mathcal{F}(M) := \overline{\mathrm{vect}}\,\delta(M) \subset \mathrm{Lip}_0(M)^*$$

Remarque

- $\delta(M)$ est famille libre

Remarque

- $\delta(M)$ est famille libre
- $\mathrm{dens}(M) = \mathrm{dens}(\mathcal{F}(M))$ quand M est infini

Remarque

- $\delta(M)$ est famille libre
- $\mathrm{dens}(M) = \mathrm{dens}(\mathcal{F}(M))$ quand M est infini
- $0 \in N \subset M \Rightarrow \mathcal{F}(N) \subseteq \mathcal{F}(M)$

Propriété universelle

Pour tout Banach X et tout $f : M \to X$ lipschitzienne t.q. $f(0) = 0$ il existe un unique $\hat{f} : \mathcal{F}(M) \to X$ linéaire t.q.

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta"'] & X \\
\mathcal{F}(M) \arrow[ur, "\widehat{f}"'] &
\end{tikzcd}
$$

De plus $\left\|\hat{f}\right\| = \|f\|_L$.

Corollaire

- $\mathcal{F}(M)^* = Lip_0(M)$

Corollaire

- $\mathcal{F}(M)^* = Lip_0(M)$
- $Si\ M \sim N\ alors\ \mathcal{F}(M) \simeq \mathcal{F}(N)$

Corollaire

- $\mathcal{F}(M)^* = Lip_0(M)$
- *Si* $M \sim N$ *alors* $\mathcal{F}(M) \simeq \mathcal{F}(N)$
- *Si* $N \hookrightarrow M$ *alors* $\mathcal{F}(N) \underset{\sim}{\subset} \mathcal{F}(M)$

Corollaire

- $\mathcal{F}(M)^* = Lip_0(M)$
- *Si* $M \sim N$ *alors* $\mathcal{F}(M) \simeq \mathcal{F}(N)$
- *Si* $N \hookrightarrow M$ *alors* $\mathcal{F}(N) \underset{\sim}{\subset} \mathcal{F}(M)$
- *Si* N *est un rétract lipschitzien de* M*, alors* $\mathcal{F}(N) \subset_c \mathcal{F}(M)$

Exemples

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}) = L_1(\mathbb{R})$$

Exemples

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}) = L_1(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{F}([0,1]) = L_1([0,1])$$

Exemples

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}) = L_1(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{F}([0,1]) = L_1([0,1])$$

Donc $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \mathcal{F}([0,1])$ isométriquement.

Exemples

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}) = L_1(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{F}([0,1]) = L_1([0,1])$$

Donc $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \mathcal{F}([0,1])$ isométriquement.

Pareil : $\mathcal{F}(\mathbb{N}) = \ell_1 = \mathcal{F}(\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\})$.

Donc

$$\mathcal{F}(M) = \mathcal{F}(N) \not\Rightarrow M \sim N.$$

Et pour les espaces de Banach ?

Et pour les espaces de Banach ?

Théorème (Dutrieux-Ferenczi 2005)

Pour tout compact métrique K infini on a

$$\mathcal{F}(c_0) \simeq \mathcal{F}(C(K)).$$

Comment distinguer $\mathcal{F}(X)$ de $\mathcal{F}(Y)$?

Théorème (Godefroy-Kalton 2003)

Pour tout Banach X séparable

$$X \subset_c \mathcal{F}(X).$$

Comment distinguer $\mathcal{F}(X)$ de $\mathcal{F}(Y)$?

Théorème (Godefroy-Kalton 2003)

Pour tout Banach X séparable

$$X \subset_c \mathcal{F}(X).$$

Théorème (Bourgain 1986)

$\mathcal{F}(\ell_1)$ *n'a pas cotype.*

Comment distinguer $\mathcal{F}(X)$ de $\mathcal{F}(Y)$?

Théorème (Godefroy-Kalton 2003)

Pour tout Banach X séparable

$$X \subset_c \mathcal{F}(X).$$

Théorème (Bourgain 1986)

$\mathcal{F}(\ell_1)$ n'a pas cotype.

Théorème (Naor-Schechtman 2007)

$\mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ ne se plonge pas dans aucun $L_1(\mu)$.

Pour l'instant il n'est pas exclu...

...que $\mathcal{F}(X) \simeq \mathcal{F}(Y)$ si X, Y espaces de Banach séparables de dim ≥ 2.

Pour l'instant il n'est pas exclu...

...que $\mathcal{F}(X) \simeq \mathcal{F}(Y)$ si X, Y espaces de Banach séparables de dim ≥ 2.

Mais si !

Théorème (Godefroy-Kalton 2003)

Banach X a la propriété d'approximation bornée (BAP) ssi et seulement si $\mathcal{F}(X)$ a BAP.

Alors il n'est pas exclu...

...que $\mathcal{F}(\ell_1) \simeq \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$.

Alors il n'est pas exclu...

...que $\mathcal{F}(\ell_1) \simeq \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$.

En effet, c'est ouvert, et par exemple on ne sait pas si $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ a cotype (non-)trivial.

Combien d’espaces Lipschitz libres différents il y a ?

Combien d'espaces Lipschitz libres différents il y a ?

Théorème (Hájek-Lancien-Pernecká 2016)

Il y a une infinité d'espaces de Banach séparables $(X_i)_{i<\omega_1}$ *tels que* $\mathcal{F}(X_i)$ *sont 2-à-2 non-isomorphes.*

Théorème (Hájek-Lancien-Pernecká 2016)

Il y a une infinité d'espaces de Banach séparables $(X_i)_{i<\omega_1}$ tels que $\mathcal{F}(X_i)$ sont 2-à-2 non-isomorphes.

Démonstration.

- Soit X_1 votre espace de Banach séparable préféré.

Théorème (Hájek-Lancien-Pernecká 2016)

Il y a une infinité d'espaces de Banach séparables $(X_i)_{i<\omega_1}$ tels que $\mathcal{F}(X_i)$ sont 2-à-2 non-isomorphes.

Démonstration.

- Soit X_1 votre espace de Banach séparable préféré.
- $\mathcal{F}(X_1)$ est séparable

Théorème (Hájek-Lancien-Pernecká 2016)

Il y a une infinité d'espaces de Banach séparables $(X_i)_{i<\omega_1}$ *tels que* $\mathcal{F}(X_i)$ *sont 2-à-2 non-isomorphes.*

Démonstration.

- Soit X_1 votre espace de Banach séparable préféré.
- $\mathcal{F}(X_1)$ est séparable
- Johnson-Szankowski : il existe un Banach séparable Y tel que $Y \not\subset_c \mathcal{F}(X_1)$.

Théorème (Hájek-Lancien-Pernecká 2016)

Il y a une infinité d'espaces de Banach séparables $(X_i)_{i<\omega_1}$ tels que $\mathcal{F}(X_i)$ sont 2-à-2 non-isomorphes.

Démonstration.

- Soit X_1 votre espace de Banach séparable préféré.
- $\mathcal{F}(X_1)$ est séparable
- Johnson-Szankowski : il existe un Banach séparable Y tel que $Y \not\subset_c \mathcal{F}(X_1)$.
- Posez $X_2 = Y \oplus X_1$.

Théorème (Hájek-Lancien-Pernecká 2016)

Il y a une infinité d'espaces de Banach séparables $(X_i)_{i<\omega_1}$ tels que $\mathcal{F}(X_i)$ sont 2-à-2 non-isomorphes.

Démonstration.

- Soit X_1 votre espace de Banach séparable préféré.
- $\mathcal{F}(X_1)$ est séparable
- Johnson-Szankowski : il existe un Banach séparable Y tel que $Y \not\subset_c \mathcal{F}(X_1)$.
- Posez $X_2 = Y \oplus X_1$.
- Alors $Y \subset_c \mathcal{F}(X_2)$, donc $\mathcal{F}(X_2) \not\simeq \mathcal{F}(X_1)$

Théorème (Hájek-Lancien-Pernecká 2016)

Il y a une infinité d'espaces de Banach séparables $(X_i)_{i<\omega_1}$ tels que $\mathcal{F}(X_i)$ sont 2-à-2 non-isomorphes.

Démonstration.

- Soit X_1 votre espace de Banach séparable préféré.
- $\mathcal{F}(X_1)$ est séparable
- Johnson-Szankowski : il existe un Banach séparable Y tel que $Y \not\subset_c \mathcal{F}(X_1)$.
- Posez $X_2 = Y \oplus X_1$.
- Alors $Y \subset_c \mathcal{F}(X_2)$, donc $\mathcal{F}(X_2) \not\simeq \mathcal{F}(X_1)$
- et suite suite...

$\square$

On ne sait pas si $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2) \not\simeq \mathcal{F}(\ell_1)$ mais il serait plus naturel demander si

$$\dim(X) < \infty \text{ et } \dim(Y) = \infty \overset{?}{\Longrightarrow} \mathcal{F}(X) \not\simeq \mathcal{F}(Y)$$

Peut être utile

Théorème (Kaufmann 2015)

Pour tout espace de Banach X

$$\mathcal{F}(X) \simeq \mathcal{F}(B_X).$$

Peut être utile

Théorème (Kaufmann 2015)

Pour tout espace de Banach X

$$\mathcal{F}(X) \simeq \mathcal{F}(B_X).$$

Donc si $\dim(X) < \infty$, alors il existe un compact K tel que

$$\mathcal{F}(X) \simeq \mathcal{F}(K).$$

Peut être utile

Théorème (Kaufmann 2015)

Pour tout espace de Banach X

$$\mathcal{F}(X) \simeq \mathcal{F}(B_X).$$

Donc si $\dim(X) < \infty$, alors il existe un compact K tel que

$$\mathcal{F}(X) \simeq \mathcal{F}(K).$$

Question naturelle

Est-ce possible pour X avec $\dim(X) = \infty$?

Comment montrer que 2 Banachs sont isomorphes ?

Comment montrer que 2 Banachs sont isomorphes ?

Théorème (Méthode de décomposition de Pełczyński)

Si $X \subset_c Y$ *et* $Y \subset_c X$ *et* $X \simeq \ell_1(X)$ *alors* $X \simeq Y$.

Comment montrer que 2 Banachs sont isomorphes ?

Théorème (Méthode de décomposition de Pełczyński)

Si $X \subset_c Y$ *et* $Y \subset_c X$ *et* $X \simeq \ell_1(X)$ *alors* $X \simeq Y$.

C'est l'arme de choix pour les espaces Lipschitz libres car

Théorème (Kaufmann 2015)

Soit X *un espace de Banach. Alors* $\mathcal{F}(X) \simeq \ell_1(\mathcal{F}(X))$.

Stratégie pour que pour X existe K tel que $\mathcal{F}(X) \simeq \mathcal{F}(K)$.

1.

Soit $K \subset X$ rétract lipschitzien. Alors $\mathcal{F}(K) \subset_c \mathcal{F}(X)$.

Stratégie pour que pour X existe K tel que $\mathcal{F}(X) \simeq \mathcal{F}(K)$.

1. Soit $K \subset X$ rétract lipschitzien. Alors $\mathcal{F}(K) \subset_c \mathcal{F}(X)$.
2. Si de plus K est convexe et $\overline{\text{vect}}(K) = X$ alors $X \subset_c \mathcal{F}(K)$. (Théorème de Dutrieux-Lancien (2008)).

Stratégie pour que pour X existe K tel que $\mathcal{F}(X) \simeq \mathcal{F}(K)$.

1. Soit $K \subset X$ rétract lipschitzien. Alors $\mathcal{F}(K) \subset_c \mathcal{F}(X)$.
2. Si de plus K est convexe et $\overline{\text{vect}}(K) = X$ alors $X \subset_c \mathcal{F}(K)$. (Théorème de Dutrieux-Lancien (2008)).
3. Ah oui, mais on veut $\mathcal{F}(X) \subset_c \mathcal{F}(K)$!

Stratégie pour que pour X existe K tel que $\mathcal{F}(X) \simeq \mathcal{F}(K)$.

1.

Soit $K \subset X$ rétract lipschitzien. Alors $\mathcal{F}(K) \subset_c \mathcal{F}(X)$.

2.

Si de plus K est convexe et $\overline{\text{vect}}(K) = X$ alors $X \subset_c \mathcal{F}(K)$. (Théorème de Dutrieux-Lancien (2008)).

3.

Ah oui, mais on veut $\mathcal{F}(X) \subset_c \mathcal{F}(K)$!

Existe-t-il un Banach X tel que $X \simeq \mathcal{F}(X)$?

Pełczyński

Pełczyński

Théorème (Pełczyński 1969, 1971)

Il existe un unique espace de Banach $\mathbb{P}$ *tel que* $\mathbb{P}$ *a une base et pour tout espace* X *à base on a* $X \subset_c \mathbb{P}$.

De plus pour tout X *avec BAP on a* $X \subset_c \mathbb{P}$.

Proposition (Godefroy-Kalton 2003)

$$\mathbb{P} \simeq \mathcal{F}(\mathbb{P})$$

Proposition (Godefroy-Kalton 2003)

$$\mathbb{P} \simeq \mathcal{F}(\mathbb{P})$$

Démonstration.

- $\mathbb{P} \subset_c \mathcal{F}(\mathbb{P})$

Proposition (Godefroy-Kalton 2003)

$$\mathbb{P} \simeq \mathcal{F}(\mathbb{P})$$

Démonstration.

- $\mathbb{P} \subset_c \mathcal{F}(\mathbb{P})$
- $\mathbb{P}$ a base $\Rightarrow$ BAP $\Rightarrow$ $\mathcal{F}(\mathbb{P})$ a BAP $\Rightarrow$ $\mathcal{F}(\mathbb{P}) \subset_c \mathbb{P}$.

Proposition (Godefroy-Kalton 2003)

$$\mathbb{P} \simeq \mathcal{F}(\mathbb{P})$$

Démonstration.

- $\mathbb{P} \subset_c \mathcal{F}(\mathbb{P})$
- $\mathbb{P}$ a base $\Rightarrow$ BAP $\Rightarrow$ $\mathcal{F}(\mathbb{P})$ a BAP $\Rightarrow$ $\mathcal{F}(\mathbb{P}) \subset_c \mathbb{P}$.
- $\mathbb{P} \simeq \ell_1(\mathbb{P})$

Proposition (Godefroy-Kalton 2003)

$$\mathbb{P} \simeq \mathcal{F}(\mathbb{P})$$

Démonstration.

- $\mathbb{P} \subset_c \mathcal{F}(\mathbb{P})$
- $\mathbb{P}$ a base $\Rightarrow$ BAP $\Rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{P})$ a BAP $\Rightarrow$ $\mathcal{F}(\mathbb{P}) \subset_c \mathbb{P}$.
- $\mathbb{P} \simeq \ell_1(\mathbb{P})$

- $\Rightarrow \mathbb{P} \simeq \mathcal{F}(\mathbb{P})$.

$\square$

Est-ce qu'il existe un rétract lipschitzien convexe compact $K \subset \mathbb{P}$ tel que $\overline{\mathrm{vect}}(K) = \mathbb{P}$?

Est-ce qu'il existe un rétract lipschitzien convexe compact $K \subset \mathbb{P}$ tel que $\overline{\text{vect}}(K) = \mathbb{P}$?

Nous ne savons pas.

Est-ce qu'il existe un rétract lipschitzien convexe compact $K \subset \mathbb{P}$ tel que $\overline{\text{vect}}(K) = \mathbb{P}$?

Nous ne savons pas.

Mais il suffit trouver un compact convexe K tel que $\overline{\text{vect}}(K) = \mathbb{P}$ et que $\mathcal{F}(K)$ a BAP (car alors $\mathcal{F}(K) \subset_c \mathbb{P} \simeq \mathcal{F}(\mathbb{P})$).

Définition

Soit $\lambda > 0$. Un Banach X a λ-BAP si pour tous $x_1, \ldots, x_n \in X$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $T : X \to X$ du rank fini tel que $\|T\| \leq \lambda$ et $\|x_i - Tx_i\| < \varepsilon$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Proposition

Soit $0 \in K \subset X$ *compact et convexe. S'il existe* $\lambda \geq 1$ *et une suite* $(T_n)_n \subset \mathcal{B}(X)$ *du rank fini telle que*

- $\|T_n\| \leq \lambda$
- $T_n(K) \subset K$
- $\lim T_n = Id$ *simplement sur* K

alors $\mathcal{F}(K)$ *a* λ*-BAP.*

Preuve de la proposition :

Soient $x_1, \ldots, x_n \in K$ et $\varepsilon > 0$. Soit n tel que $\|x_i - T_n x_i\| < \varepsilon$. On a

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{T_n} & T_n(K) \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\ \mathcal{F}(K) & \xrightarrow[\widehat{T}_n]{} & \mathcal{F}(T_n(K)) \end{array}$$

$T_n(K)$ compact, convexe, $\dim \operatorname{vect}(T_n(K)) < \infty$
$\Rightarrow \mathcal{F}(T_n(K))$ a 1-BAP (Pernecká-Smith 2015).

Preuve de la proposition :

Soient $x_1, \ldots, x_n \in K$ et $\varepsilon > 0$. Soit n tel que $\|x_i - T_n x_i\| < \varepsilon$. On a

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\ T_n\ } & T_n(K) \\ \Big\downarrow \delta & & \Big\downarrow \delta \\ \mathcal{F}(K) & \xrightarrow[\widehat{T}_n]{} & \mathcal{F}(T_n(K)) \end{array}$$

$T_n(K)$ compact, convexe, $\dim \operatorname{vect}(T_n(K)) < \infty$ $\Rightarrow \mathcal{F}(T_n(K))$ a 1-BAP (Pernecká-Smith 2015). Donc il existe $S\colon \mathcal{F}(T_n(K)) \to \mathcal{F}(T_n(K))$ tel que $\|S\| = 1$ et $\left\| S\widehat{T}_n\delta(x_i) - \widehat{T}_n(\delta(x_i))\right\| < \varepsilon$.

Preuve de la proposition :

Soient $x_1, \ldots, x_n \in K$ et $\varepsilon > 0$. Soit n tel que $\|x_i - T_n x_i\| < \varepsilon$. On a

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\quad T_n \quad} & T_n(K) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \delta} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \delta} \\ \mathcal{F}(K) & \xrightarrow[\widehat{T}_n]{} & \mathcal{F}(T_n(K)) \end{array}$$

$T_n(K)$ compact, convexe, $\dim \operatorname{vect}(T_n(K)) < \infty$ $\Rightarrow \mathcal{F}(T_n(K))$ a 1-BAP (Pernecká-Smith 2015). Donc il existe $S\colon \mathcal{F}(T_n(K)) \to \mathcal{F}(T_n(K))$ tel que $\|S\| = 1$ et $\left\| S\widehat{T}_n\delta(x_i) - \widehat{T}_n(\delta(x_i))\right\| < \varepsilon$.

Alors $T = S\widehat{T}_n : \mathcal{F}(K) \to \mathcal{F}(T_n(K)) \subset \mathcal{F}(K)$ marche. $\square$

Il existe $K \subset \mathbb{P}$ tel que $\mathcal{F}(K) \simeq \mathcal{F}(\mathbb{P})$.

Démonstration.

Soit (e_n) une base normalisée de $\mathbb{P}$.

Il existe $K \subset \mathbb{P}$ tel que $\mathcal{F}(K) \simeq \mathcal{F}(\mathbb{P})$.

Démonstration.

Soit (e_n) une base normalisée de $\mathbb{P}$.
On pose $K = \overline{\operatorname{conv}} \left\{ \frac{e_n}{n} \right\}$.

Il existe $K \subset \mathbb{P}$ tel que $\mathcal{F}(K) \simeq \mathcal{F}(\mathbb{P})$.

Démonstration.

Soit (e_n) une base normalisée de $\mathbb{P}$.

On pose $K = \overline{\mathrm{conv}}\left\{\frac{e_n}{n}\right\}$.

Alors K est compact, convexe, $\overline{\mathrm{vect}}(K) = \mathbb{P}$.

Il existe $K \subset \mathbb{P}$ tel que $\mathcal{F}(K) \simeq \mathcal{F}(\mathbb{P})$.

Démonstration.

Soit (e_n) une base normalisée de $\mathbb{P}$.
On pose $K = \overline{\text{conv}} \left\{ \frac{e_n}{n} \right\}$.
Alors K est compact, convexe, $\overline{\text{vect}}(K) = \mathbb{P}$.
Les projections basiques P_n satisfont

- $P_n(K) \subset K$

Il existe $K \subset \mathbb{P}$ tel que $\mathcal{F}(K) \simeq \mathcal{F}(\mathbb{P})$.

Démonstration.

Soit (e_n) une base normalisée de $\mathbb{P}$.
On pose $K = \overline{\mathrm{conv}}\left\{\frac{e_n}{n}\right\}$.
Alors K est compact, convexe, $\overline{\mathrm{vect}}(K) = \mathbb{P}$.
Les projections basiques P_n satisfont

- $P_n(K) \subset K$
- $\sup \|P_n\| < \infty$

Il existe $K \subset \mathbb{P}$ tel que $\mathcal{F}(K) \simeq \mathcal{F}(\mathbb{P})$.

Démonstration.

Soit (e_n) une base normalisée de $\mathbb{P}$.
On pose $K = \overline{\text{conv}} \left\{ \frac{e_n}{n} \right\}$.
Alors K est compact, convexe, $\overline{\text{vect}}(K) = \mathbb{P}$.
Les projections basiques P_n satisfont

- $P_n(K) \subset K$
- $\sup \|P_n\| < \infty$
- $\lim P_n = Id_{\mathbb{P}}$.

$\square$

Il existe $K \subset \mathbb{P}$ tel que $\mathcal{F}(K) \simeq \mathcal{F}(\mathbb{P})$.

Démonstration.

Soit (e_n) une base normalisée de $\mathbb{P}$.
On pose $K = \overline{\text{conv}} \left\{ \frac{e_n}{n} \right\}$.
Alors K est compact, convexe, $\overline{\text{vect}}(K) = \mathbb{P}$.
Les projections basiques P_n satisfont

- $P_n(K) \subset K$
- $\sup \|P_n\| < \infty$
- $\lim P_n = Id_{\mathbb{P}}$.

$\square$

Question

Est-ce que pour tout X séparable il existe K tel que $\mathcal{F}(K) \simeq \mathcal{F}(X)$?

Merci pour votre attention !