PETITS POINTS DES HYPERSURFACES D'UNE VARIÉTÉ ABELIENNE

par

Aurélien Galateau

Résumé. — On minore le minimum essentiel des hypersurfaces d'une variété abelienne, dans la lignée des résultats de [**9**]. La borne obtenue est optimale "à ε près" en le degré de l'hypersurface.

Abstract. — We give a lower bound for the essential minimum of hypersurfaces in an abelian variety, completing the results of [**9**]. This lower bound is optimal "up to an ε" in the degree of the hypersurface.

1. Introduction

1.1. Conjecture de Bogomolov sur les variétés abeliennes. — Les résultats de cet article concernent les points de petite hauteur sur les variétés abeliennes. Les variétés considérées seront toujours *irréductibles* et sauf mention explicite *définies sur* $\bar{\mathbb{Q}}$. Soit A une variété abelienne de dimension $g \geq 2$, munie d'un fibré en droites $\mathcal{L}$ ample et symétrique, et soit $\hat{h}_{\mathcal{L}}$ la hauteur de Néron-Tate associée à ce fibré. Le Théorème suivant, conjecturé par Bogomolov, précise la répartition des points de petite hauteur dans les sous-variétés de A.

Théorème 1.1 **(Ullmo [22], Zhang [25]).** — *Soit V une sous-variété stricte de A, qui n'est pas le translaté d'une sous-variété abelienne par un point de torsion. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$\{x \in V(\bar{\mathbb{Q}}), \hat{h}_{\mathcal{L}}(x) \leq \varepsilon\}$$

ne soit pas Zariski-dense dans V.

Le résultat analogue est vrai si on remplace A par un tore (cf. [**24**]) ou plus généralement par une variété semi-abélienne (cf. [**5**]).

Définition 1.1. — *Le minimum essentiel de V est :*

$$\hat{\mu}_{\mathcal{L}}^{\mathrm{ess}}(V) = \inf\{\theta > 0, \overline{V(\theta)}^{Z} = V(\bar{\mathbb{Q}})\},$$

où $V(\theta) = \{x \in V(\bar{\mathbb{Q}}), \hat{h}_{\mathcal{L}}(x) \leq \theta\}$ et $\overline{V(\theta)}^{Z}$ est son adhérence de Zariski.

Une version quantitative du problème de Bogomolov consiste à préciser ε dans le Théorème 1.1, ce qui revient à minorer le minimum essentiel de certaines sous-variétés de A. Bombieri et Zannier (voir [**2**]) ont montré qu'on pouvait obtenir une borne ne dépendant que de $\deg_{\mathcal{L}}(V)$, le degré de l'image de V par le plongement projectif associé à $\mathcal{L}$, et de la variété abélienne A, si V n'est pas un translaté de sous-variété abelienne. La meilleure estimation inconditionnelle jusqu'ici est le Théorème principal de [**6**].

Dans le contexte torique, Amoroso et David obtiennent une minoration quasi-optimale en le degré de V. Par le plongement standard $\mathbb{G}_m^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, auquel on peut associer un fibré en droite $\mathcal{L}$ très ample, on dispose d'une hauteur projective sur $\mathbb{G}_m^n(\bar{\mathbb{Q}})$, et d'un minimum essentiel $\hat{\mu}_{\mathcal{L}}^{\mathrm{ess}}$ sur les sous-variétés de $\mathbb{G}_m^n$. Une version faible de leur Théorème est la suivante.

Théorème 1.2 **(Amoroso, David** [**1**]**).** — *Soit V une sous-variété stricte de $\mathbb{G}_m^n$ de codimension k qui n'est contenue dans aucun translaté d'un sous-tore strict de $\mathbb{G}_m^n$. On a :*

$$\hat{\mu}_{\mathcal{L}}^{\mathrm{ess}}(V) \geq \frac{c(n)}{\deg_{\mathcal{L}}(V)^{1/k}} \times \Big(\log\big(3\deg_{\mathcal{L}}(V)\big)\Big)^{-\lambda(k)},$$

où $c(n)$ est un réel strictement positif et $\lambda(k) = (9(3k)^{(k+1)})^k$.

Ce Théorème est optimal aux facteurs logarithmiques près (voir la remarque qui suit la Conjecture 1.2 de [**1**]).

1.2. Résultats. — Dans [**9**], on a montré qu'on pouvait obtenir une minoration semblable à celle du Théorème 1.2 dans le contexte abelien, à condition que la variété abelienne vérifie une hypothèse portant sur ses idéaux de bonne réduction. Cette hypothèse permettait d'obtenir des estimations p-adiques optimales concernant certains points de p-torsion de A. Grâce à une nouvelle approche diophantienne, on peut ici utiliser des propriétés p-adiques plus faibles et inconditionnelles. Notre Théorème concerne les hypersurfaces.

Théorème 1.3. — *Soit V une hypersurface de A, qui n'est pas le translaté d'une sous-variété abelienne de A. On a :*

$$\hat{\mu}_{\mathcal{L}}^{\mathrm{ess}}(V) \geq \frac{C(A,\mathcal{L})}{\deg_{\mathcal{L}}(V)} \times \Big(\log\big(\deg_{\mathcal{L}}(V)\big)\Big)^{-2g},$$

où $C(A,\mathcal{L}) > 0$ ne dépend que de $(A,\mathcal{L})$.

La minoration précise du minimum essentiel s'applique à l'étude de l'intersection d'une sous-variété de A avec ses sous-groupes algébriques de codimension prescrite, en direction de conjectures formulées indépendamment par Zilber sur les variétés semi-abeliennes et Pink sur les variétés de Shimura mixtes, et qui se spécialisent en l'énoncé suivant :

***Conjecture 1.4* (Pink [17]).** — *Soit C une courbe algébrique incluse dans A, qui n'est pas incluse dans un sous-groupe algébrique strict de A et $\mathcal{H}_2$ la réunion des sous-groupes algébriques de A de codimension au moins 2. Alors $C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{H}_2(\bar{\mathbb{Q}})$ est fini.*

D'après les travaux de Rémond et Viada (voir [**18**] et [**23**]), la Conjecture 1.4 suivrait de l'analogue du Théorème 1.3 pour les courbes. D'après le résultat principal de [**9**], elle est connue dans chacun des cas suivants : A est un produit de courbes elliptiques et de surfaces abeliennes, A est de type CM, A vérifie les hypothèses du Theorem de [**12**] ou celles du Theorem 7.1 de [**16**]. Si A est simple, elle se spécialise en la conjecture de Manin-Mumford, démontrée par Raynaud. Le premier cas ouvert de cette conjecture est celui d'une variété A de dimension 4, produit d'une courbe elliptique et d'une variété abelienne simple de dimension 3.

1.3. Plan de l'article. — Après avoir rappelé quelques faits classiques sur les variétés abeliennes, on donne dans la troisième partie de nouvelles estimations p-adiques sur certains groupes de p-torsion des variétés abeliennes. Celles-ci vont dans deux directions différentes. On commence par donner des estimations inconditionnelles sur le noyau de la réduction modulo $\mathfrak{p}$ (où $\mathfrak{p}|p$ est un idéal de bonne réduction de la variété abelienne) en utilisant la théorie des groupes formels. Puis pour un ensemble de premiers p de densité 1, on construit un sous-groupe de p-torsion de A pour lequel on obtient des estimations p-adiques au moins aussi bonnes que dans le cas ordinaire. Dans la dernière partie, on combine le premier de ces résultats avec une construction diophantienne qui mène à la preuve du Théorème 1.3. La principalité de l'idéal de définition d'une hypersurface est utilisée de façon cruciale pour faire contribuer collectivement les points d'un sous-groupe de p-torsion dans les estimations p-adiques.

2. Préliminaires sur les variétés abeliennes

2.1. Plongements projectifs et hauteurs. — On se donne pour la suite une variété abelienne A, définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$, de dimension $g \geq 2$, munie d'un fibré en droites $\mathcal{L}_0$ ample et symétrique. Le fibré $\mathcal{L} := \mathcal{L}_0^{\otimes 4}$ définit un plongement projectivement normal de A dans un espace projectif $\mathbb{P}^n$ sur $\bar{\mathbb{Q}}$ (où $n \in \mathbb{N}^*$).

Soit K un corps de nombres et $x := [x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^n(K)$. On définit la *hauteur de Weil* de x :

$$h(x) := \sum_{v \in M(K)} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \max\left(\{|x_0|_v, \ldots, |x_n|_v\}\right),$$

où $M(K)$ désigne l'ensemble des places de K. Cette expression ne dépend ni du choix d'un corps de définition, ni du choix des coordonnées projectives pour x. On en déduit, via le plongement projectif, une hauteur $h_{\mathcal{L}}$ sur $A(\bar{\mathbb{Q}})$. Si $x \in A(\bar{\mathbb{Q}})$, on définit sa hauteur *de Néron-Tate* ou hauteur *canonique* (associée au fibré $\mathcal{L}$) :

$$\hat{h}_{\mathcal{L}}(x) := \lim_{m \to \infty} \frac{h_{\mathcal{L}}([m]x)}{m^2},$$

où $[m]$ est la multiplication par m sur A, pour $m \in \mathbb{N}$. Les propriétés suivantes sont bien connues.

- On a $\hat{h}_{\mathcal{L}}(x) = 0$ si et seulement si x est un point de torsion de $A(\bar{\mathbb{Q}})$.
- La hauteur est quadratique : $\forall x \in A(\bar{\mathbb{Q}}), \forall n \in \mathbb{N} : \quad \hat{h}_{\mathcal{L}}([n]x) = n^2 \hat{h}_{\mathcal{L}}(x)$.

2.2. Paramètres et dérivations algébriques. — On se donne pour la suite un corps de nombres K sur lequel A est définie. Le choix de ce corps n'est pas déterminant en vue du Théorème 1.3 et on le remplacera librement par une extension finie.

Soit $(y_\nu)_{0 \le \nu \le n}$ une base de $H^0(A, \mathcal{L})$ telle que $y_0(0) \neq 0$. Quitte à remplacer y_ν par $y_\nu + y_0$ dès que $y_\nu(0) = 0$, on peut supposer :

$$\forall 0 \le \nu \le n \quad : \quad y_\nu(0) \neq 0 \text{ et } y_\nu(0) \in K.$$

Soit $0 \le \nu \le n$ et U_ν l'ouvert de A défini par $y_\nu \neq 0$. Soit $\mathfrak{A}$ l'anneau des fonctions régulières sur U_0 et $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal du localisé de $\mathfrak{A}$ en 0. Le fibré $\mathcal{L}$ étant très ample, on peut trouver des indices $\nu_1, \ldots, \nu_g$ deux-à-deux distincts tels que la famille

$$\left(t_{\nu,i} := \frac{y_{\nu_i}}{y_\nu} - \frac{y_{\nu_i}}{y_\nu}(0) \right)_{1 \le i \le g}$$

soit un *système de paramètres* en 0 (c'est-à-dire une base de l'espace vectoriel $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$). On obtient par dualité une base du tangent t_A de A en 0, qu'on note $(\partial_{\nu,1}, \ldots, \partial_{\nu,g})$. Ces dérivations sont *algébriques* dans le sens suivant. Soit $0 \le \nu \le n$ et $1 \le i \le g$. Le fibré $\mathcal{L}$ définissant un plongement projectivement normal de A, il existe des nombres algébriques $a_{\alpha,\beta}^{i,j,\nu}$ tels que :

$$\forall\ 0 \le j \le n \quad : \quad y_\nu^2 \partial_{\nu,i} \left(\frac{y_j}{y_\nu} \right) = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}^{i,j,\nu} y_\alpha y_\beta.$$

On fixe également une isogénie (voir [**11**], §19, Theorem 1) :

$$\prod_{1\leq\kappa\leq k} A_\kappa \xrightarrow{\psi} A, \tag{1}$$

où A_κ, pour $1 \leq \kappa \leq k$, est une sous-variété abelienne simple de A, de dimension g_κ, qu'on peut supposer définie sur K. On a une décomposition du tangent t_A de A en 0 :

$$t_A = t_{A_1} \oplus \cdots \oplus t_{A_k},$$

où t_{A_κ} ($1 \leq \kappa \leq k$) désigne le tangent de A_κ en 0. En choisissant une base quelconque de chaque t_{A_κ}, on obtient par dualité un système de paramètres $(u_1, \ldots, u_g)$ en 0 tel que, pour $1 \leq \kappa \leq k$, le g_κ-uplet $(u_{g_1+\cdots+g_{\kappa-1}}, \ldots, u_{g_1+\cdots+g_\kappa})$ soit un système de paramètres de A_κ en 0.

Lemme 2.1. — *Il existe un ensemble $\mathcal{P}_1(A)$ d'idéaux premiers de $\mathcal{O}_K$ de densité* 1 *tel que pour tout idéal $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_1(A)$:*

- *pour $0 \leq \nu \leq n$, les paramètres $(t_{\nu,1}, \ldots, t_{\nu,g})$ se réduisent sur un système de paramètres modulo $\mathfrak{p}$;*
- *pour $0 \leq \nu \leq n$, la matrice de passage de $(u_1, \ldots, u_g)$ vers $(t_{\nu,1}, \ldots, t_{\nu,g})$ est inversible modulo $\mathfrak{p}$ et à coefficients $\mathfrak{p}$-entiers ;*
- *l'addition sur A est donnée par des formes bi-homogènes sur les $(y_\nu)_\nu$ dont les coefficients sont $\mathfrak{p}$-entiers.*

Remarques.

- Chacune de ces clauses exclut un nombre fini de premiers de $\mathcal{O}_K$. Pour la preuve de la troisième, on renvoie par exemple à [**6**], Proposition 3.7.
- Pour alléger la suite de l'article, on se ramènera toujours à $\nu = 0$, quitte à permuter les variables, et on omettra l'indice 0 dans les notations. Par exemple, les dérivations $(\partial_{0,1}, \ldots, \partial_{0,g})$ seront notées $(\partial_1, \ldots, \partial_g)$.

2.3. Le plongement étiré. — Celui-ci nous servira à rendre négligeable la constante de comparaison entre hauteur projective et hauteur de Néron-Tate sur A, ce qui est nécessaire pour obtenir des résultats précis sur les points de petite hauteur canonique. Soit M un entier strictement positif. L'isogénie de multiplication par M sur A étant notée $[M]$, on définit ϕ_M :

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & A^2 \\ x & \rightarrow & (x, [M]x). \end{array}$$

On a le fibré en droites $\mathcal{M} := \pi_1^*\mathcal{L} \otimes \pi_2^*\mathcal{L}$ sur A^2, où π_1 (resp. π_2) est la projection canonique de A^2 sur le premier (resp. le second) facteur. Ce fibré induit par tiré en arrière un fibré ample et symétrique sur A, qu'on note encore $\mathcal{M}$. La variation de la hauteur et du degré sous ϕ_M est donnée par le Lemme suivant (voir [**15**], Proposition 7).

Lemme 2.2. — *Si x est un point de $A(\bar{\mathbb{Q}})$, on a :*

$$\hat{h}_{\mathcal{M}}(x) = (M^2+1)\hat{h}_{\mathcal{L}}(x).$$

Si V est une sous-variété de A, on a :

$$\deg_{\mathcal{M}}(V) = (M^2+1)^{\dim(V)}\deg_{\mathcal{L}}(V).$$

Le fibré $\mathcal{M} \simeq (\pi_1^*\mathcal{L}_0 \otimes \pi_2^*\mathcal{L}_0)^{\otimes 4}$ définit un plongement normal de A^2 dans un espace projectif $\mathbb{P}^m$ (où $m \in \mathbb{N}^*$). Par Segre, on dispose d'une base $(y_i \otimes y'_j)_{0 \le i,j \le n}$ de $H^0(A^2, \mathcal{M})$, où on a dédoublé la base de $H^0(A, \mathcal{L})$ fixée précédemment. On note $(z_\mu)_{0 \le \mu \le m}$ cette base, avec la convention $z_0 := y_0 \otimes y'_0$.

Pour $1 \le i \le g$, on pose $\delta_i := \phi_{M*}(\partial_i)$. La famille $(\delta_1, \ldots, \delta_g)$ forme une base du tangent t_{A_M} de $\phi_M(A)$ en 0, et comme l'application induite par $[M]$ sur t_A est la multiplication par M, on a :

$$\forall 1 \le i \le g : \quad \delta_i = \partial_i + M\partial_{g+i},$$

où, par abus de langage, on a noté ∂_i (resp. ∂_{g+i}) l'image de ∂_i par l'inclusion : $A \times \{0\} \subset A^2$ (resp. $\{0\} \times A \subset A^2$). Si $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_g) \in \mathbb{N}^g$, on pose $|\mathbf{k}| := k_1 + \cdots + k_g$ et :

$$\delta^{\mathbf{k}} := \frac{1}{k_1! \cdots k_g!}\delta_1^{k_1} \circ \cdots \circ \delta_g^{k_g}.$$

Si $x \in A^2(\bar{K})$, on note τ_x la translation par x sur $A^2(\bar{K})$. Soit $l \in \mathbb{N}^*$ et $s \in H^0(A^2, \mathcal{M}^{\otimes l})$. L'addition sur A^2 étant donnée par des formes de bi-degré $(2,2)$, pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^g$:

$$x \mapsto \delta^{\mathbf{k}}\left(\frac{s \circ \tau_x}{z_0^{2l}}\right)$$

définit un élément de $H^0(A^2, \mathcal{M}^{\otimes 2l})$, qu'on notera $\delta^{\mathbf{k}}s$.

3. Groupes de p-torsion des variétés abeliennes et propriétés p-adiques

Dans [**8**] §2, on a donné des estimations p-adiques précises pour certains groupes de p-torsion de A, noyaux de la réduction modulo $\mathfrak{p}$ (pour $\mathfrak{p}|p$ un idéal premier de $\mathcal{O}_K$ où A a bonne réduction). On a obtenu les meilleurs résultats pour des premiers de réduction ordinaire, les principales obstructions dans le cas général étant dûes à la partie nilpotente de la fonction de Hasse-Witt. On montre ici deux résultats nouveaux. Le premier, utilisant la théorie des groupes formels, donne une borne valable pour tous les points de p-torsion se réduisant sur 0 modulo $\mathfrak{p}$, dépendant du p-rang de la fibre spéciale de A en $\mathfrak{p}$. Le second montre l'existence, pour un ensemble de premiers p de densité 1, d'un sous-groupe de p-torsion de A, défini sur une extension non ramifiée au-dessus de p et d'ordre au moins p, pour lequel les propriétés p-adiques sont au moins aussi bonnes que dans le cas ordinaire.

3.1. Le p-rang d'une variété abelienne. — On choisit un modèle $\mathcal{A}$ de A sur $\mathcal{O}_K$. Pour toute extension finie K' de K, le schéma $\mathcal{A} \times_{O_K} \mathcal{O}_{K'}$ est un modèle de A sur $\mathcal{O}_{K'}$. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_K$, la fibre spéciale :

$$A_{\mathfrak{p}} := \mathcal{A} \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$$

au-dessus de $\mathfrak{p}$ est lisse sauf pour un ensemble fini de premiers $\mathfrak{p}$. Si B est une sous-variété abelienne de A, on note $\mathcal{B}$ l'adhérence schématique de B dans $\mathcal{A}$ et $B_{\mathfrak{p}}$ sa réduction modulo $\mathfrak{p}$.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_K$ tel que $A_{\mathfrak{p}}$ soit lisse. L'idéal $\mathfrak{p}$ étant donné, on notera toujours k le corps $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ et p sa caractéristique. Si B est une sous-variété abelienne de A (définie sur K), on note $B[p]$ (resp. $B_{\mathfrak{p}}[p]$) le noyau de la multiplication par p sur B (resp. $B_{\mathfrak{p}}$). C'est un *groupe fini sur* K (resp. k), c'est-à-dire un schéma en groupes fini et plat sur K (resp. k). Le groupe $B_{\mathfrak{p}}[p](\bar{k})$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\alpha}$, pour un entier $0 \leq \alpha \leq \dim(B)$ qu'on appelle le *p-rang* de $B_{\mathfrak{p}}$.

Proposition 3.1. — *Quitte à étendre K, il existe un ensemble $\mathcal{P}_2(A)$ d'idéaux premiers de $\mathcal{O}_K$ de densité 1 tel que l'indice de ramification $e_{\mathfrak{p}|p} = 1$, où $(p) = \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$; et tel que, pour $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_2(A)$ et $1 \leq \kappa \leq k$, la variété $A_{\kappa,\mathfrak{p}}$ soit lisse de p-rang non-nul.*

Preuve. La première condition et la lissité de $A_{\mathfrak{p}}$ sont assurés sauf pour un nombre fini d'idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_K$. Si B est une sous-variété abelienne de A définie sur K, on note $\mathcal{P}_B$ l'ensemble des premiers $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_K$ tels que $B_{\mathfrak{p}}$ est lisse et a un p-rang non-nul. Le Corollary 2.8 de [**13**] nous assure que pour chaque $1 \leq \kappa \leq k$, quitte à remplacer K par une extension finie, l'ensemble $\mathcal{P}_{A_\kappa}$ est de densité 1. Les A_κ étant en nombre fini, on peut remplacer K par une extension finie de telle sorte que les ensembles $\mathcal{P}_{A_\kappa}$ soient tous de densité 1. La Proposition est donc démontrée en prenant :

$$\mathcal{P}_2(A) := \bigcap_{1 \leq \kappa \leq k} \mathcal{P}_{A_\kappa},$$

qui est encore de densité 1. □

On fixe jusqu'à la fin de cette partie un idéal premier

$$\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_A := \mathcal{P}_1(A) \cap \mathcal{P}_2(A).$$

Pour $1 \leq \kappa \leq k$, on note $\alpha_{\kappa,\mathfrak{p}}$ le p-rang de $A_{\kappa,\mathfrak{p}}$, et $\alpha_{\mathfrak{p}}$ le p-rang de $A_{\mathfrak{p}}$. Soit $\mathbb{Q}_p$ la complétion p-adique de $\mathbb{Q}$ et $K_{\mathfrak{p}}$ la complétion $\mathfrak{p}$-adique de K. Par choix de $\mathfrak{p}$, l'extension $\mathbb{Q}_p \subset K_{\mathfrak{p}}$ est non-ramifiée. Soit $K_{\mathfrak{p}}^{nr}$ la plus grande extension non-ramifiée de $K_{\mathfrak{p}}$; son anneau d'entiers sera noté R et son idéal maximal sera encore noté $\mathfrak{p}$.

3.2. Groupe formel en caractéristique p. — On fixe $1 \leq \kappa \leq k$, et pour simplifier les notations, on le suppose égal à 1, quitte à permuter les indices. On note $(\widetilde{u_1}, \dots, \widetilde{u_{g_1}})$ le système de paramètres de $A_{1,\mathfrak{p}}$ en 0 obtenu par réduction modulo $\mathfrak{p}$ de $(u_1, \dots, u_{g_1})$, et $\widetilde{[p]}$ la multiplication par p sur le groupe formel associé à ce système de paramètres.

Lemme 3.2. — *Il existe un g_1-uplet $f := (f_1, \dots, f_{g_1}) \in k[[T_1, \dots, T_{g_1}]]^{g_1}$ tel que $(\partial f_i/\partial T_j(0))_{1\leq i,j\leq g_1}$ soit inversible et :*

$$\widetilde{[p]} = f\left(\widetilde{u_1}^{p^{n_1}}, \dots, \widetilde{u_{g_1}}^{p^{n_{g_1}}}\right), \quad \text{avec : } n_1, \dots, n_{g_1} \leq g_1 - \alpha_{1,\mathfrak{p}} + 1.$$

Preuve. Soit $A_{1,\mathfrak{p}}^{(p)}$ le tiré en arrière de $A_{1,\mathfrak{p}}$ par l'action du Frobenius sur $\mathrm{Spec}(k)$. On a la décomposition :

$$\widetilde{[p]} = V \circ F,$$

où $F : A_{1,\mathfrak{p}} \to A_{1,\mathfrak{p}}^{(p)}$ est le morphisme de Frobenius, purement inséparable, de degré p^{g_1}, et $V : A_{1,\mathfrak{p}}^{(p)} \to A_{1,\mathfrak{p}}$ est le *Verschiebung* (voir [**7**], VII A.4). De plus, les degrés séparable et inséparable de V sont donnés par

$$\deg_s(V) = p^{\alpha_{1,\mathfrak{p}}} \text{ et } \deg_i(V) = p^{g_1 - \alpha_{1,\mathfrak{p}}}.$$

Soit k^s la clôture séparable de $V^*k\left(A_{1,\mathfrak{p}}\right)$ dans $k\big(A_{1,\mathfrak{p}}^{(p)}\big)$. La famille $(\widetilde{u_1}, \dots, \widetilde{u_{g_1}})$ est un système de paramètres de $A_{1,\mathfrak{p}}^{(p)}$ en 0, et l'extension

$$k(\widetilde{u_1}, \dots, \widetilde{u_{g_1}}) \subset k\big(A_{1,\mathfrak{p}}^{(p)}\big)$$

est séparable. Comme $k^s \subset k\big(A_{1,\mathfrak{p}}^{(p)}\big)$ est purement inséparable, on en déduit :

$$k^s(\widetilde{u_1}, \dots, \widetilde{u_{g_1}}) = k\big(A_{1,\mathfrak{p}}^{(p)}\big).$$

Pour tout $1 \leq i \leq g_1$, le paramètre $\widetilde{u_i}$ est purement inséparable sur k^s, de degré p^{m_i}, pour un entier $m_i \geq 0$, et on a :

$$g_1 - \alpha_{1,\mathfrak{p}} = m_1 + \cdots + m_{g_1}.$$

Le morphisme V se factorise donc de la manière suivante sur le groupe formel associé à $(\widetilde{u_1}, \dots, \widetilde{u_{g_1}})$:

$$V = f\big(\widetilde{u_1}^{p^{m_1}}, \dots, \widetilde{u_{g_1}}^{p^{m_{g_1}}}\big),$$

où $f := (f_1, \dots, f_{g_1}) \in \bar{k}[[T_1, \dots, T_{g_1}]]^{g_1}$. De plus, f est séparable donc la matrice $(\partial f_i/\partial T_j(0))_{1\leq i,j\leq g_1}$ est inversible. Le Lemme suit en composant avec le Frobenius et en remarquant que $\widetilde{[p]}$, donc f, est défini sur k. □

On revient maintenant en caractéristique nulle. Soit $X_{1,\mathfrak{p}}$ le groupe fini sur K, noyau de la réduction modulo $\mathfrak{p}$: $A_1[p] \longrightarrow A_{1,\mathfrak{p}}[p]$. On note $K' := K_{\mathfrak{p}}(X_{1,\mathfrak{p}}(\bar{K}))$ et $\mathfrak{q}|\mathfrak{p}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{K'}$.

Proposition 3.3. — *Soit $\xi \in X_{1,\mathfrak{p}}(\bar{K}) \cap U$. On a :*

$$\forall\ 1 \leq i \leq g : \quad |t_i(\xi)|_{\mathfrak{q}} \leq p^{-1/p^{g_1-\alpha_{1,\mathfrak{p}}+1}}.$$

Preuve. On note $[p]$ la multiplication par p sur le groupe formel défini par $(u_1, \ldots, u_{g_1})$. Comme $\xi \in X_{1,\mathfrak{p}}$, les séries formelles définissant $[p]$ convergent en ξ et on a : $[p](\xi) = 0$ (voir [**10**], Theorem C.2.6).

Par le Lemme 3.2, il existe des séries formelles $\phi_1, \ldots, \phi_{g_1} \in \mathcal{O}_K[[T_1, \ldots, T_{g_1}]]$ et $\psi_1, \ldots, \psi_{g_1} \in \mathfrak{p}\mathcal{O}_K[[T_1, \ldots, T_{g_1}]]$ telles que $(\partial\phi_i/\partial T_j)_{i,j}$ soit inversible modulo $\mathfrak{p}$ et :

$$\forall\ 1 \leq i \leq g_1\ :\ \phi_i\big(u_1(\xi)^{p^{n_1}}, \ldots, u_{g_1}(\xi)^{p^{n_{g_1}}}\big) = \psi_i\big(u_1(\xi), \ldots, u_{g_1}(\xi)\big),$$

avec $n_i \leq g_1 - \alpha_{1,\mathfrak{p}} + 1$. Soit $1 \leq j \leq g_1$ tel que $|u_j(\xi)^{p^{n_j}}|_{\mathfrak{q}}$ soit maximale. On inverse $(\partial\phi_i/\partial T_j)_{i,j}$ en remarquant que les monômes d'ordre supérieur apparaîssant dans $\phi_1, \ldots, \phi_{g_1}$ ont une norme $\mathfrak{q}$-adique strictement inférieure à $|u_j(\xi)^{p^{n_j}}|_{\mathfrak{q}}$ et on obtient :

$$|u_j(\xi)^{p^{n_j}}|_{\mathfrak{q}} \leq p^{-1/e_{\mathfrak{p}|p}} = p^{-1}.$$

La même inégalité est encore vraie pour tout $1 \leq i \leq g_1$ et on a :

$$|u_i(\xi)|_{\mathfrak{q}} \leq p^{-1/p^{n_i}} \leq p^{-1/p^{g_1-\alpha_{1,\mathfrak{p}}+1}}.$$

Vu le Lemme 2.1, pour $1 \leq i \leq g$, on peut remplacer u_i par t_i dans cette inégalité. $\square$

3.3. Sous-groupes peu ramifiés de $A[p]$. — On construit maintenant un sous-groupe non-nul $G_{\mathfrak{p}}$ de $A[p]$, défini sur $K_{\mathfrak{p}}^{nr}$, pour lequel on dispose d'estimations p-adiques plus fines.

Lemme 3.4. — *Il existe un sous-groupe $G_{\mathfrak{p}}$ de $A[p]$ sur $K_{\mathfrak{p}}^{nr}$ isomorphe à $\mu_p :=$ Spec $K_{\mathfrak{p}}^{nr}[X]/(X^p - 1)$.*

Preuve. Par la Proposition 3.1, on a : $\alpha_{\mathfrak{p}} \geq 1$. Le corps $K_{\mathfrak{p}}^{nr}$ a pour corps résiduel $\bar{k}$ et la réduction modulo $\mathfrak{p}$:

$$A(K_{\mathfrak{p}}^{nr}) \longrightarrow A_{\mathfrak{p}}(\bar{k})$$

est surjective par le Lemme de Hensel ; le groupe $A[p]$ contient donc un sous-groupe X_1 isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur $K_{\mathfrak{p}}^{nr}$. Pour tout entier $n \geq 1$, le même argument montre que $A[p^n]$ contient un sous-groupe X_n isomorphe à $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ sur $K_{\mathfrak{p}}^{nr}$ (voir [**11**], §15 pour les propriétés du p-rang).

Soit $\widehat{A}$ la duale de A (cf. [**11**], §8). On a une isogénie sur K :

$$\phi_{\mathcal{L}} : A \longrightarrow \widehat{A}.$$

Pour $n \geq 1$ assez grand, on a $X_n \cap \ker \phi_{\mathcal{L}} = 0$ et $\widehat{A}$ contient un sous-groupe isomorphe à X_n. Si x_n est un générateur de X_n, le point $p^{n-1}x_n$ est non-nul, annulé par p et défini sur $K_{\mathfrak{p}}^{nr}$. Par le Theorem 1 de [**11**], §15 (voir aussi [**14**]) et l'isomorphisme entre A et sa biduale, on en déduit qu'il existe un sous-groupe $G_{\mathfrak{p}}$ de $A[p]$, Cartier dual de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Sur $K_{\mathfrak{p}}^{nr}$, on a donc :

$$G_{\mathfrak{p}} \simeq \widehat{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} = \mu_p.$$

□

Le groupe $G_{\mathfrak{p}}$ est trivialisé par l'extension modérément ramifiée $K_{\mathfrak{p}}^{nr} \subset K'$ de degré $p-1$ (cf. [**21**], IV, §4 ou [**20**], Proposition 8). Soit $\mathfrak{q}|\mathfrak{p}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{K'}$.

Corollaire 3.5. — *Soit $\xi \in G_{\mathfrak{p}}(\bar{K}) \cap U$. Alors :*

$$\forall\ 1 \leq i \leq g \ : \ |t_i(\xi)|_{\mathfrak{q}} \leq p^{-1/(p-1)}.$$

Preuve. Le groupe $G_{\mathfrak{p}}$ est local sur $K_{\mathfrak{p}}^{nr}$, donc appartient au noyau de la réduction modulo $\mathfrak{p}$. Par le Theorem C.2.6 de [**10**] et le Lemme 2.1, on en déduit, pour $1 \leq i \leq g$, que $t_i(\xi) \in \mathfrak{q}\mathcal{O}_{K'}$, puis que :

$$|t_i(\xi)|_{\mathfrak{q}} \leq p^{-1/e_{\mathfrak{q}|\mathfrak{p}}} = p^{-1/(p-1)}.$$

□

On peut en fait trouver un système de paramètres adapté au groupe $G_{\mathfrak{p}}$, pour lequel les propriétés p-adiques sont sensiblement meilleures :

Proposition 3.6. — *Il existe un indice $1 \leq \iota(\mathfrak{p}) \leq g$ et des éléments $a_{i,j}(\mathfrak{p})$ (pour $i \neq \iota$ et $1 \leq j \leq p-1$) de R tels que, si on pose :*

$$x_\iota = t_\iota \ \text{ et : } \ x_i = t_i - \sum_{1 \leq j \leq p-1} a_{i,j} t_\iota^j \ \text{ pour } i \neq \iota, \tag{2}$$

on a, pour tout $\xi \in G_{\mathfrak{p}}(\bar{K}) \cap U$:

$$|x_\iota(\xi)|_{\mathfrak{q}} \leq p^{-1/(p-1)} \ \text{ et : } \ |x_i(\xi)|_{\mathfrak{q}} \leq p^{-1} \ \text{ pour } i \neq \iota.$$

Preuve. Soit $\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}$ l'adhérence schématique de $G_{\mathfrak{p}}$ dans $\mathcal{A} \times_{\mathcal{O}_K} R$; c'est un schéma en groupes isomorphe au groupe multiplicatif d'ordre p sur R. Soit $\mathcal{I}$ l'idéal de définition dans $R[\frac{y_1}{y_0}, \ldots, \frac{y_n}{y_0}]$ du schéma affine associé à $\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}$ sur l'ouvert $\mathcal{U} := \{y_0 \neq 0\}$. L'idéal $\mathfrak{I} := \mathcal{I} \otimes_R \bar{k}$ de $\bar{k}[\frac{y_1}{y_0}, \ldots, \frac{y_n}{y_0}]$ est l'idéal de définition de

$\mathcal{G}_{\mathfrak{p}} \times_R \bar{k}$, puisque ce schéma est local de point $0 \in A_{\mathfrak{p}}$. Si on note $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$ l'anneau des fonctions régulières de l'ouvert $\mathcal{U} \times_R \bar{k}$ de $A_{\mathfrak{p}}$, le morphisme de restriction :

$$\phi_{\mathfrak{J}} : \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \bar{k}\Big[\frac{y_1}{y_0}, \ldots, \frac{y_n}{y_0}\Big]/\mathfrak{J}$$

envoie surjectivement l'idéal maximal $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$ du localisé de $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$ en 0 sur l'unique idéal maximal de $\bar{k}[\frac{y_1}{y_0}, \ldots, \frac{y_n}{y_0}]/\mathfrak{J}$. Il existe donc un indice $1 \leq \iota \leq g$ tel que l'image de t_ι modulo $\mathfrak{J}$ engendre cet idéal maximal. Comme $\mathcal{G}_{\mathfrak{p}}$ est de type multiplicatif, on en déduit un isomorphisme d'algèbres :

$$\bar{k}\Big[\frac{y_1}{y_0}, \ldots, \frac{y_n}{y_0}\Big]/\mathfrak{J} \simeq \bar{k}[x]/(x^p),$$

où $x := \phi_{\mathfrak{J}}(t_\iota)$. Pour $i \neq \iota$, il existe donc $\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,p-1} \in \bar{k}$ tels que :

$$\phi_{\mathfrak{J}}(t_i) = \sum_{1 \leq j \leq p-1} \alpha_{i,j} x^j.$$

On choisit maintenant, pour tous $i \neq \iota$ et $1 \leq j \leq p-1$, un élément $a_{i,j} \in R$ tel que $a_{i,j} \otimes_R \bar{k} = \alpha_{i,j}$.

La famille $(x_1, \ldots, x_g)$ donnée par (2) est bien définie sur U. Elle forme encore un système de paramètres de A en 0, qui se réduit modulo $\mathfrak{p}$ sur un système de paramètres de $A_{\mathfrak{p}}$ en 0, qu'on note $(\widetilde{x_1}, \ldots, \widetilde{x_g})$. Soit $i \neq \iota$. Par construction, on a : $\widetilde{x_i} \in \mathfrak{J}$. Comme la tensorisation :

$$\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I} \otimes_R \bar{k} = \mathfrak{J}$$

est surjective, il existe $z_i \in \mathcal{I}$ tel que $x_i - z_i := s_i$ se réduit sur 0 modulo $\mathfrak{p}$. Par les propriétés du groupe formel associé à $(t_1, \ldots, t_g)$ (voir la preuve de [**10**], Theorem C.2.6), on a :

$$s_i \in \mathfrak{p}R\Big[\frac{y_1}{y_0}, \ldots, \frac{y_n}{y_0}\Big] \subset \mathfrak{p}R[[t_1, \ldots, t_g]].$$

On en déduit d'une part, pour tout $\xi \in G_{\mathfrak{p}}(\bar{K}) \cap U$:

$$|x_\iota(\xi)|_{\mathfrak{q}} = |t_\iota(\xi)|_{\mathfrak{q}} \leq p^{-1/(p-1)};$$

d'autre part, dès que $i \neq \iota$, comme $z_i(\xi) = 0$ et $\mathfrak{p}$ n'est pas ramifié dans R :

$$|x_i(\xi)|_{\mathfrak{q}} = |s_i(\xi)|_{\mathfrak{q}} \leq p^{-1}.$$

□

4. Approximation diophantienne

Ce paragraphe est consacré à la démonstration du Théorème 1.3. Soit V une hypersurface de A qui n'est pas le translaté d'une sous-variété abelienne. En supposant son minimum essentiel anormalement petit, on construit d'abord une section d'une puissance de $\mathcal{M}$ nulle sur le translaté V' de V par un groupe de torsion bien choisi. Puis en utilisant les estimations p-adiques de la partie précédente, on montre que cette section s'annule sur V' à un ordre important, ce qui permet de conclure.

4.1. Choix des paramètres. — En vue du Théorème 1.3, on peut supposer que $\deg_{\mathcal{L}}(V) \geq 3$, le Théorème principal de [**5**] donnant une minoration en petit degré qu'on fera rentrer dans la constante $C(A, \mathcal{L})$. Le stabilisateur $\mathrm{Stab}(V)$ de V est de codimension au moins 2. On note $\mathrm{Stab}(V)^0$ sa composante neutre. Il existe en particulier $1 \leq \kappa \leq k$ tel que :

$$\mathrm{Stab}(V)^0 \cap A_\kappa \subsetneq A_\kappa,$$

et cette intersection est réduite à $\{0\}$ par simplicité de A_κ. Quitte à permuter les indices, on suppose que $\kappa = 1$. On se donne un réel $c(A, \mathcal{L}) > 0$, ne dépendant que de $(A, \mathcal{L})$, suffisamment grand dans un sens que la suite du texte permettra de clarifier.

Lemme 4.1. — *Soit $P := c(A, \mathcal{L})\log(\deg_{\mathcal{L}}(V))$. Il existe $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_A$ au-dessus d'un nombre premier p tel que :*

$$P/2 \leq p \leq P \ \textit{et}\ X_{1,\mathfrak{p}} \cap \mathrm{Stab}(V) = \{0\}.$$

Preuve. Par construction, il suffit de trouver $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_A$ au-dessus d'un nombre premier $P/2 \leq p \leq P$ tel que $p \nmid R := [\mathrm{Stab}(V) : \mathrm{Stab}(V)^0]$. Si ce n'est pas le cas, le Théorème des nombres premiers donne (l'ensemble $\mathcal{P}_A$ étant de densité 1) :

$$\log(R) = \sum_{p \in \mathcal{P}} v_p(R)\log(p) \geq \frac{P\log(P/2)}{3\log(P)} \geq \frac{P}{4}.$$

On a d'autre part (voir [**3**], Lemme 2.1) :

$$\log(R) \leq g\log(\deg_{\mathcal{L}}(V)),$$

et on en déduit : $P \leq 4g\log(\deg_{\mathcal{L}}(V))$, ce qui contredit le choix de $c(A, \mathcal{L})$. □

Soit $V' := V + X_{1,\mathfrak{p}}$. On fait l'hypothèse suivante sur V :

$$\theta := \frac{1}{\deg_{\mathcal{L}}(V')} > \hat{\mu}^{\mathrm{ess}}_{\mathcal{L}}(V), \tag{3}$$

et on définit des entiers M (plongement étiré), L (degré) et un réel T (multiplicité) :

$$M := 2[\theta^{-1/2}],\ L := [\theta^{-1}] \text{ et } T := \frac{\log(P)}{P}\theta^{-1}.$$

4.2. Lemme de Siegel. — Soit $N \geq 1$ un entier et $S \subset \bar{K}^N$ un $\bar{K}$-espace vectoriel de dimension $d \leq N$. On définit la hauteur L_2 de S :

$$h_{L_2}(S) := \sum_{v \in M(K')} \frac{[K'_v : \mathbb{Q}_v]}{[K' : \mathbb{Q}]} \log||x_1 \wedge \cdots \wedge x_d||_v,$$

où $(x_1, \ldots, x_d)$ est une base de S à coefficients dans un corps de nombres K' (le résultat obtenu ne dépend pas du choix de cette base par la formule du produit) ; et $||\cdot||_v$ est la norme du sup aux places finies, la norme euclidienne aux places archimédiennes. Si $S^\perp$ désigne l'orthogonal de S pour le produit scalaire euclidien classique, on a :

$$h_{L_2}(S) \quad = \quad h_{L_2}(S^\perp). \tag{4}$$

Pour $x \in \bar{K}^N$, on notera aussi $h_{L_2}(x) := h_{L_2}(\langle x \rangle)$, où $\langle x \rangle \in \mathbb{P}^N(\bar{K})$ est la droite engendrée par x. On renvoie à [**19**], Ch.1, § 8 pour plus de détails.

On utilisera le résultat suivant, qui donne l'existence d'un point non nul de S de hauteur bornée indépendamment d'un corps de définition de S.

Lemme 4.2. — *Si $d \geq 1$, il existe $s \in S \setminus \{0\}$ tel que :*

$$h_{L_2}(s) \quad \leq \quad \frac{h_{L_2}(S)}{d} + \frac{\log(d)}{2} + 1. \tag{5}$$

Preuve. Voir [**4**], Lemme 4.7. Notons que c'est une conséquence assez directe du Théorème des minima successifs de Zhang. □

Si $t \in \mathbb{R}$, on définit :

$$S(t) := \left\{ s \in H^0(A^2, \mathcal{M}^{\otimes L}), \forall x \in V'(\bar{K}), \forall k \in \mathbb{N}^g, |k| \leq t-1 : \delta^k s(x) = 0 \right\},$$

puis on pose $S := S(T)$ et on note $d := \dim(S)$. Via la base $(Q_l)_{1 \leq l \leq N}$, on peut voir S comme un sous-espace vectoriel de $\bar{K}^N$.

Proposition 4.3. — *Il existe un élément $s \in S \setminus \{0\}$ tel que :*

$$h(s) \leq L.$$

Preuve. L'astuce de Philippon-Waldschmidt, le Théorème de Chardin et le choix des paramètres nous donnent d'abord (voir [**3**], Lemme 5.1) :

$$N - d = \dim(S^\perp) \leq \frac{2^{g-1}}{(g-1)!} T L^{g-1} \deg_{\mathcal{M}}(V') \leq \frac{10^{g-1}}{(g-1)!} T L^{2g-2} \deg_{\mathcal{L}}(V').$$

Par Riemann-Roch et le choix des paramètres, on en déduit :

$$\frac{N-d}{N} \leq g10^{g-1}\frac{T\deg_{\mathcal{L}}(V')}{L^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Il suit : $d \geq N/2 \geq 1$, et par le Lemme 4.2, il existe $s \in S \setminus \{0\}$ vérifiant (5).

La majoration de la hauteur de S est classique. Pour $D \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble :

$$V'_{\theta,D} := \{x \in V'(\overline{\mathbb{Q}}), \hat{h}_{\mathcal{L}}(x) \leq \theta \text{ et } [\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] \leq D\},$$

qui est fini par le Théorème de Northcott. La suite de $\overline{\mathbb{Q}}$-espaces vectoriels de dimension finie :

$$\big(S(V'_{\theta,D}, T)\big)_{D\in\mathbb{N}}$$

est décroissante et chacun de ses éléments contient S. Il existe donc $D_0 \in \mathbb{N}$ tel que cette suite soit constante pour $D \geq D_0$. Par définition du minimum essentiel et l'hypothèse (3), on a en fait : $S = S(V'_{\theta,D_0}, T)$. L'espace vectoriel $S^{\perp}$ est donc engendré par :

$$\left\{\delta^k Q_l(x)\ ,\ 0 \leq |k| \leq T,\ 1 \leq l \leq N,\ x \in V'_{\theta,D_0}\right\}.$$

Leur hauteur L_2 est majorée par (voir [**3**], Lemme 5.4 (18)) :

$$c'(A,\mathcal{L})\Big(2LM^2\theta + T\log(T+L) + T\log(M)\Big),$$

pour une constante $c'(A,\mathcal{L})$ ne dépendant que de $(A,\mathcal{L})$. Par (4), par le choix des paramètres et pour $c(A,\mathcal{L})$ suffisamment grand, on a :

$$\begin{aligned} h_{L_2}(S) &= h_{L_2}(S^{\perp}) \\ &\leq c'(A,\mathcal{L})(N-d)\big(2LM^2\theta + T\log(T+L) + T\log(M)\big) \\ &\leq c(A,\mathcal{L})L\log(P)(N-d). \end{aligned}$$

De plus, par Riemann-Roch : $\log(d) \leq \log(N) \leq P$. L'inégalité (5) nous donne finalement :

$$h(s) \leq h_{L_2}(s) \quad \leq \quad 2c(A,\mathcal{L})L\log(P)\frac{N-d}{N} + P + 1 \leq L.$$

□

4.3. Extrapolation aux dérivées et fin de la preuve. — On va maintenant montrer que la section s s'annule sur V' à un ordre bien plus grand que T. Commençons par donner quelques précisions sur s.

Soit $t \in \mathbb{N}$ tel que $s \in S(t)$ et $\xi \in X_{1,\mathfrak{p}}$. On note $\mathfrak{P}_{\xi}$ (resp. $\mathfrak{B}$) l'idéal de définition de $\phi_M(V+\xi)$ (resp. $\phi_M(A)$) dans $\bar{\mathbb{Q}}[z_0,\ldots,z_m]$. Comme $V+\xi$ est une hypersurface de A, il existe un polynôme homogène $f_{\xi} \in \bar{\mathbb{Q}}[z_0,\ldots,z_m]$ tel que :

$$\mathfrak{P}_{\xi}\bar{\mathbb{Q}}[z_0,\ldots,z_m]/\mathfrak{B} = (f_{\xi})\bar{\mathbb{Q}}[z_0,\ldots,z_m]/\mathfrak{B}.$$

Si on fixe $f := f_0$, on peut choisir $f_\xi = \tau^*_{-(\xi,[M]\xi)} f$. De plus, le polynôme f est non nul sur A^2 et définit par passage au quotient un élément de $H^0(A^2, \mathcal{M}^{\otimes l_f})$ (pour un certain entier l_f). On en fixe implicitement une base, formée de monômes unitaires en les $(z_\mu)_\mu$ et on note $(f_i)_i$ les coefficients de f sur cette base. Vu le choix des paramètres et en prenant $c(A,\mathcal{L})$ assez grand, on a :

$$M^2 \geq 2(\sqrt{L}-1)^2 \geq L+1,$$

puisqu'on peut rendre $c(A,\mathcal{L})$, donc L, suffisamment grand. On en déduit que la section s, qui est une forme bi-homogène de bi-degré (L,L) sur A^2, n'est pas identiquement nulle sur $\phi_M(A)$. Par construction, on a : $s \in \bigcap_{\xi\in X_{1,\mathfrak{p}}} \mathfrak{P}_\xi^t$, et comme les $V+\xi$ sont deux-à-deux distincts :

$$\begin{aligned} (s)\bar{\mathbb{Q}}[z_0,\ldots,z_m]/\mathfrak{B} &\subset \bigcap_{\xi\in X_{1,\mathfrak{p}}} (f_\xi)^t \bar{\mathbb{Q}}[z_0,\ldots,z_m]/\mathfrak{B} \\ &= \prod_{\xi\in X_{1,\mathfrak{p}}} (f_\xi)^t \bar{\mathbb{Q}}[z_0,\ldots,z_m]/\mathfrak{B}. \end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe $g \in \bar{\mathbb{Q}}[z_0,\ldots,z_m]\setminus\mathfrak{B}$, dont les coefficients sur la base canonique seront notés $(g_j)_j$, et $h \in \mathfrak{B}$ tels que :

$$s = g \prod_{\xi\in X_{1,\mathfrak{p}}} f_\xi^t + h.$$

Proposition 4.4. — *Si $t \leq \deg_{\mathcal{L}}(V)^{c(A,\mathcal{L})}$, alors $s \in S(t)$.*

Preuve. On suppose par l'absurde qu'il existe un entier $0 \leq t < \deg_{\mathcal{L}}(V)^{c(A,\mathcal{L})}$ tel que $s \notin S(t+1)$, et on prend t minimal pour cette propriété. On sait déjà que $t \geq T$. Il existe donc $k \in \mathbb{N}^g$ tel que $|k| = t$, des points $v \in V(\bar{K})$ et $\xi_0 \in X_{1,\mathfrak{p}}(\bar{K})$ tels que $\delta^k s\big(v+\xi_0\big) \neq 0$.

Par les propriétés du minimum essentiel et l'hypothèse (3), on peut supposer : $\hat{h}_{\mathcal{L}}(v) \leq \theta$. Soit K' une extension finie de K sur laquelle v, ξ_0 et les $(f_i)_i$, $(g_j)_j$ sont définis, et soit $\mathfrak{q}|\mathfrak{p}$ dans $\mathcal{O}_{K'}$. On peut sans perte de généralité supposer que les coordonnées projectives de $\phi_M(v)$, de $\phi_M(\xi)$, pour $\xi \in X_{1,\mathfrak{p}}$, et que les $(f_i)_i$, $(g_j)_j$ sont dans $\mathcal{O}_{K'}$ (les propriétés d'annulation et la hauteur de s sont invariantes sous la multiplication par un entier).

Par la formule de Leibniz et les propriétés d'annulation de s et de h, on a :

$$\begin{aligned} \delta^k s(v+\xi_0) &= \Big(g \prod_{\xi\neq\xi_0} f_\xi^t\Big) \circ \phi_M(v+\xi_0) \cdot \delta^k(f_{\xi_0}^t)(v+\xi_0) + \delta^k h(v+\xi_0) \\ &= \Big(g \prod_{\xi\neq\xi_0} f_\xi^t\Big) \circ \phi_M(v+\xi_0) \cdot \delta^k(f_{\xi_0}^t)(v+\xi_0). \end{aligned}$$

Pour $\xi \neq \xi_0$, la fonction $\tilde{f}_\xi$:

$$x \mapsto \frac{f\big(\phi_M(v+x)\big)}{z_0\big(\phi_M(x+\xi)\big)^{2l_f}},$$

rationnelle sur A, est bien définie en $\xi_0 - \xi$ quitte à permuter chaque paquet de variables projectives, et elle est régulière sur un voisinage de 0. Elle définit donc un élément de l'anneau local $\mathfrak{A}_\mathfrak{m} \hookrightarrow \widehat{\mathfrak{A}}_\mathfrak{m}$. Par lissité de A en 0, on a une égalité formelle :

$$\tilde{f}_\xi(x) = \sum_{k=(k_1,\ldots,k_g)\in\mathbb{N}^g} \big(\delta^k \tilde{f}_\xi\big) t_1^{k_1}(x)\cdots t_g^{k_g}(x). \tag{6}$$

Montrons dans un premier temps que $\delta^k(\tilde{f}_\xi)$ est $\mathfrak{q}$-entier pour tout $k \in \mathbb{N}^g$. On sait que pour $1 \leq i \leq g$: $\delta_i = \partial/\partial x_i + M\partial/\partial x_{g+i}$. De plus, les coordonnées projectives de $\phi_M(v)$ sont dans $\mathcal{O}_{K'}$; il suit alors du Lemme 2.1 que $\tilde{s}$ est à coefficients $\mathfrak{q}$-entiers sur les monômes unitaires de degré $2l_f$ en les $(z_\mu/z_0)_\mu$. En itérant la formule de Leibniz pour chaque monôme différentiel, on se ramène par récurrence au cas des monômes de degré 1. Soit $0 \leq i \leq n$; il suffit de montrer que les :

$$\frac{1}{k_1!\cdots k_g!}\partial_1^{k_1}\circ\cdots\circ\partial_g^{k_g}\left(\frac{y_i}{y_0}\right)$$

sont $\mathfrak{q}$-entiers, pour $(k_1,\ldots,k_g) \in \mathbb{N}^g$. Ce sont les coefficients de la série de Taylor de y_i/y_0 en le système de paramètres $(t_1,\ldots,t_g)$, qui se réduit modulo $\mathfrak{q}$ en un système de paramètres de $A_\mathfrak{p}$ en 0. On a un développement de Taylor de y_i/y_0 modulo $\mathfrak{q}$, à coefficients dans $\bar{k}$, et celui-ci est égal à la réduction modulo $\mathfrak{q}$ de la série de Taylor de y_i/y_0. Ces coefficients sont donc bien $\mathfrak{q}$-entiers.

Par la Proposition 3.3, la série de Taylor de (6) converge en $\xi_0 - \xi$ pour la norme $\mathfrak{q}$-adique, et comme cette fonction s'annule en 0 :

$$\big|\tilde{f}_\xi(\xi_0-\xi)\big|_\mathfrak{q} \leq p^{-1/p^{g_1-\alpha_{1,\mathfrak{p}}+1}}.$$

On vérifie par ailleurs que :

$$\big|\phi_M^* g(v+\xi_0)\big|_\mathfrak{q} \leq 1 \text{ et } \big|\delta^k(f_{\xi_0}^t)(v+\xi_0)\big|_\mathfrak{q} \leq 1.$$

Sur l'ouvert U, on a donc :

$$\big|\delta^k s(v+\xi_0)\big|_\mathfrak{q} \leq p^{-t|G_{1,\mathfrak{p}}|/p^{g_1-\alpha_{1,\mathfrak{p}}+1}} \leq p^{-tp^{g_1-1}} \leq p^{-tp}.$$

On écrit la formule du produit (logarithmique) avec les majorations évidentes aux places ne divisant pas $\mathfrak{p}$ ([**3**], Lemme 5.4 (18)) :

$$\begin{aligned} tp\log(p) &\leq c'(A,\mathcal{L})\Big(2LM^2\theta + t\log(t+L) + t\log(M)\Big) + h(s) \\ &\leq (8c'(A,\mathcal{L})+1)L + tp + t\log(t) \leq 2tp + t\log(t). \end{aligned}$$

Il vient : $\log(t) \geq p\log(p)/2$, puis : $t \geq 2\deg_{\mathcal{L}}(V)^{c(A,\mathcal{L})}$, ce qui est absurde. □

Preuve du Théorème 1.3. La forme $\phi_M^* s$, qui n'est pas identiquement nulle sur A, s'annule sur V' à un ordre $t \geq \deg_{\mathcal{L}}(V)^{c(A,\mathcal{L})}$. En comparant les degrés, il vient :

$$t\deg_{\mathcal{L}}(V') \leq LM^2 \leq 4\deg_{\mathcal{L}}(V')^2,$$

puis :

$$\deg_{\mathcal{L}}(V)^{c(A,\mathcal{L})} \leq t \leq 4\deg_{\mathcal{L}}(V') \leq 4P^{2g}\deg_{\mathcal{L}}(V).$$

Comme $c(A,\mathcal{L})$ est assez grand, on en déduit que :

$$\log\left(\deg_{\mathcal{L}}(V)^{c(A,\mathcal{L})/4g}\right) = \frac{P}{4g} \geq \deg_{\mathcal{L}}(V)^{c(A,\mathcal{L})/4g},$$

ce qui est impossible. L'hypothèse (3) est donc fausse, et on a :

$$\hat{\mu}_{\mathcal{L}}^{\text{ess}}(V) \geq \frac{1}{\deg_{\mathcal{L}}(V')} \geq \frac{1}{c(A,\mathcal{L})^{2g}\deg_{\mathcal{L}}(V)\log(\deg_{\mathcal{L}}(V))^{2g}},$$

ce qui donne l'inégalité du théorème avec $C(A,\mathcal{L}) := 1/c(A,\mathcal{L})^{2g}$.

□

Références

[1] F. Amoroso & S. David – « Minoration de la hauteur normalisée dans un tore », *J. Inst. Math. Jussieu* **2** (2003), no. 3, p. 335–381.

[2] E. Bombieri & U. Zannier – « Heights of algebraic points on subvarieties of abelian varieties », *Ann. Scuola Norm. Pisa* **23** (1996), no. 4, p. 779–792.

[3] S. David & M. Hindry – « Minoration de la hauteur de Néron-Tate sur les variétés abéliennes de type C.M. », *J. Reine Angew. Math.* **529** (2000), p. 1–74.

[4] S. David & P. Philippon – « Minoration des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **28** (1999), no. 3, p. 489–543.

[5] ———, « Sous-variétés de torsion des variétés semi-abéliennes », *C. R. Acad. Sci. Paris* **331** (2000), no. 1, p. 587–592.

[6] ———, « Minoration des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes II », *Comment. Math. Helv.* **77** (2002), p. 639–700.

[7] M. Demazure & A. Grothendieck – *Séminaire de Géométrie Algébrique (SGA3)*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 151-153, Springer-Verlag, New York, 1970.

[8] A. Galateau – « Le problème de Bogomolov effectif sur les variétés abéliennes », *Algebra and number theory* **4** (2010), no. 5, p. 547–598.

[9] ———, « Une minoration du minimum essentiel sur les variétés abéliennes », *Comment. Math. Helv.* **85** (2010), no. 4, p. 775–812.

[10] M. Hindry & J. Silverman – *Diophantine Geometry : An Introduction*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 201, Springer-Verlag, New York, 2000.

[11] D. Mumford – *Abelian Varieties*, Tata Lecture Notes. Cambridge University Press, 1974.

[12] R. Noot – « Abelian varieties - Galois representations and properties of ordinary reduction », *Compositio Math.* **97** (1995), p. 161–171.

[13] A. Ogus – « Hodge cycles and crystalline cohomology », *Lecture Notes in Mathematics* **900** (1982).

[14] F. Oort – *Commutative Group Schemes*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 15, Springer, Berlin, 1966.

[15] P. Philippon – « Sur des hauteurs alternatives III », *J. Math. Pures Appl.* **74** (1995), no. 4, p. 345–365.

[16] R. Pink – « l-adic algebraic monodromy groups, cocharacters, and the Mumford-Tate conjecture », *J. Reine Angew. Math.* **495** (1998), p. 187–237.

[17] ———, « A common generalization of the conjectures of André-Oort, Manin-Mumford and Mordell-Lang », *Prépublication* (2005).

[18] G. Rémond – « Intersection de sous-groupes et de sous-variétés II », *J. Inst. Math. Jussieu* **6** (2007), p. 317–348.

[19] W. M. Schmidt – « Diophantine approximation and Diophantine equations », *Springer Lecture notes in Mathematics* **1467** (1991).

[20] J. P. Serre – « Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques », *Invent. Math.* **15** (1972), p. 259–331.

[21] J. Serre – *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1968.

[22] E. Ullmo – « Positivité et discrétion des points algébriques des courbes », *Ann. of Math.* **147** (1998), p. 167–179.

[23] E. Viada – « Lower bounds for the normalized height and non-dense subsets of subvarieties of abelian varieties », *Int. J. Num. Th.* **6.3** (2008), p. 471–499.

[24] S. Zhang – « Positive line bundles on arithmetic surfaces », *Ann. of Math.* **136** (1992), p. 569–587.

[25] ———, « Equidistribution of small points on abelian varieties », *Ann. of Math.* **147** (1998), p. 159–165.

Aurélien Galateau, Département de Mathématiques (B.425), Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex (France) • *E-mail :* `aurelien.galateau@math.u-psud.fr`