FONCTIONS DÉFINIES POSITIVES

Sujet proposé par: Yulia Kuznetsova

Ce sujet paraît très analytique, mais il a des liens étroits avec l'algèbre et aussi la topologie. L'exemple le plus simple d'une fonction définie positive (FDP) est $\phi(x) = e^{itx}$, où t est un paramètre réel. En général, on peut définir les FDP comme des fonctions telles que la matrice $\left(\phi(x_j - x_k)\right)_{1\le j,k\le n}$ est définie positive, quels que soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ (à vérifier déjà pour l'exponentielle ci-citée!). Ou encore, ce sont les transformées de Fourier de mesures positives (on parle beaucoup de la transformée de Fourier au semestre de printemps).

La notion a du sens aussi sur des groupes quelconques, et on peut montrer que les FDP sont exactement les fonctions de type $\phi(x) = \langle \pi(x)\xi, \xi\rangle$, où π est une représentation du groupe sur un espace de Hilbert H et $\xi \in H$.

Les FDP sont le plus présentes dans le contexte de l'analyse harmonique et de la théorie des représentations, mais elles se trouvent des applications ailleurs également. Nous pourrons traiter deux résultats qui se démontrent à l'aide des FDP:

- Soit T un opérateur de norme $\|T\| \le 1$ sur un espace de Hilbert. Soit $P(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k z^k$ un polynôme dans $\mathbb{C}[x]$ qui est borné par 1, $|P(z)| \le 1$, sur le disque $\{z : |z| \le 1\}$. Alors $\|P(T)\| = \|\sum\limits_{k=1}^{n} p_k T^k\| \le 1$.
- La fonction ζ de Riemann (définie par $\zeta(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^z}$ pour $\mathrm{Re} z > 1$) n'a pas de zéros sur la droite $\mathrm{Re} z = 1$. À rappeler, la fameuse hypothèse de Riemann affirme que tous les zéros nontriviaux de ζ se trouvent sur la droite $\mathrm{Re} z = \frac{1}{2}$.