L'Hypothèse de Riemann

N. Jacon

Université de Franche-Comté

19 Novembre 2009

1- Introduction

Enrico Bombieri (Princeton, USA) “L’hypothèse de Riemann n’est pas seulement un problème. C’est le plus important problème en mathématiques pures. Il est l’indication qu’il y a quelque chose d’extrêmement profond et fondamental que nous n’arrivons pas à saisir”.

Qu'est ce qu'un nombre premier ?

Qu'est ce qu'un nombre premier ?

C'est un entier naturel strictement supérieur à 1, n'admettant que deux entiers naturels diviseurs distincts : 1 et lui-même.

Qu'est ce qu'un nombre premier ?

C'est un entier naturel strictement supérieur à 1, n'admettant que deux entiers naturels diviseurs distincts : 1 et lui-même.

Tout entier naturel peut se décomposer en produit d'un ou de plusieurs facteurs premiers.

Qu'est ce qu'un nombre premier ?

C'est un entier naturel strictement supérieur à 1, n'admettant que deux entiers naturels diviseurs distincts : 1 et lui-même.

Tout entier naturel peut se décomposer en produit d'un ou de plusieurs facteurs premiers.

Par exemple, 42 est égale à $3 \times 7 \times 2$ ou $180 = 3^2 \times 2^2 \times 5$.

Qu'est ce qu'un nombre premier ?

C'est un entier naturel strictement supérieur à 1, n'admettant que deux entiers naturels diviseurs distincts : 1 et lui-même.

Tout entier naturel peut se décomposer en produit d'un ou de plusieurs facteurs premiers.

Par exemple, 42 est égale à $3 \times 7 \times 2$ ou $180 = 3^2 \times 2^2 \times 5$.

Les nombres premiers peuvent donc être vus comme les composantes de base des nombres entiers.

De grands mathématiciens se sont penchés sur des questions liées à ces nombres : Euclide, Fermat, Pascal, Euler, Gauss, Legendre, Riemann, Hilbert, ... Turing.

De grands mathématiciens se sont penchés sur des questions liées à ces nombres : Euclide, Fermat, Pascal, Euler, Gauss, Legendre, Riemann, Hilbert, ... Turing.

Voici la liste des nombres premiers inférieur à 100 :

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71,$$

$$73, 79, 83, 89, 97$$

Problème naturel :

De grands mathématiciens se sont penchés sur des questions liées à ces nombres : Euclide, Fermat, Pascal, Euler, Gauss, Legendre, Riemann, Hilbert, ... Turing.

Voici la liste des nombres premiers inférieur à 100 :

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71,$$

$$73, 79, 83, 89, 97$$

Problème naturel : Combien y a t-il de nombres premiers ?

De grands mathématiciens se sont penchés sur des questions liées à ces nombres : Euclide, Fermat, Pascal, Euler, Gauss, Legendre, Riemann, Hilbert, ... Turing.

Voici la liste des nombres premiers inférieur à 100 :

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71,$$

$$73, 79, 83, 89, 97$$

Problème naturel : Combien y a t-il de nombres premiers ?
Réponse : Une infinité ! (Euclide)

De grands mathématiciens se sont penchés sur des questions liées à ces nombres : Euclide, Fermat, Pascal, Euler, Gauss, Legendre, Riemann, Hilbert, ... Turing.

Voici la liste des nombres premiers inférieur à 100 :

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71,$$

$$73, 79, 83, 89, 97$$

Problème naturel : Combien y a t-il de nombres premiers ?
Réponse : Une infinité ! (Euclide)

Un autre problème naturel :

Un autre problème naturel : Y a t-il une règle gouvernant la succession des nombres premiers ?

Réponse: Cette question est reliée à l'Hypothèse de Riemann. Les plus grands mathématiciens se sont confrontés à cette conjecture depuis plus d'un siècle ...

Un autre problème naturel : Y a t-il une règle gouvernant la succession des nombres premiers ?

Réponse: Cette question est reliée à l'Hypothèse de Riemann. Les plus grands mathématiciens se sont confrontés à cette conjecture depuis plus d'un siècle ... sans succès.

Définition simple mais problèmes difficiles, les deux problèmes suivants, par exemple, restent (également) des problèmes ouverts :

Un autre problème naturel : Y a t-il une règle gouvernant la succession des nombres premiers ?

Réponse: Cette question est reliée à l'Hypothèse de Riemann. Les plus grands mathématiciens se sont confrontés à cette conjecture depuis plus d'un siècle ... sans succès.

Définition simple mais problèmes difficiles, les deux problèmes suivants, par exemple, restent (également) des problèmes ouverts :

La conjecture de Goldbach : tout nombre pair strictement supérieur à 2, peut-il s'écrire comme somme de deux nombres premiers ?

Un autre problème naturel : Y a t-il une règle gouvernant la succession des nombres premiers ?

Réponse: Cette question est reliée à l'Hypothèse de Riemann. Les plus grands mathématiciens se sont confrontés à cette conjecture depuis plus d'un siècle ... sans succès.

Définition simple mais problèmes difficiles, les deux problèmes suivants, par exemple, restent (également) des problèmes ouverts :

La conjecture de Goldbach : tout nombre pair strictement supérieur à 2, peut-il s'écrire comme somme de deux nombres premiers ?

La conjecture des nombres premiers jumeaux : un couple de nombres premiers jumeaux est une paire de nombres premiers dont la différence est égale à 2. Existe-t-il une infinité de jumeaux premiers ?

La conjecture des nombres premiers jumeaux : un couple de nombres premiers jumeaux est une paire de nombres premiers dont la différence est égale à 2. Existe-t-il une infinité de jumeaux premiers ?

Paul Erdös (1913-1996) “Dieu ne joue peut-être pas aux dés avec l’univers, mais il se passe quelque chose d’étrange avec les nombres premiers”

2 - Les premiers pas des nombres premiers

Les plus anciennes traces des nombres premiers ont été trouvées près du lac Edouard au Zaïre sur un os de plus de 20.000 ans, appelé l'os d'Ishango et recouvert d'entailles marquant les nombres 11, 13, 17 et 19. Ces nombres sont premiers.

2 - Les premiers pas des nombres premiers

Les plus anciennes traces des nombres premiers ont été trouvées près du lac Edouard au Zaïre sur un os de plus de 20.000 ans, appelé l'os d'Ishango et recouvert d'entailles marquant les nombres 11, 13, 17 et 19. Ces nombres sont premiers.

Plus tard, les grecs de l'Ecole Pythagoricienne, passionnés par l'Arithmétique, étudieront la notion de diviseur et de nombre parfait (nombre égal à la somme de ses diviseurs propres).

2 - Les premiers pas des nombres premiers

Les plus anciennes traces des nombres premiers ont été trouvées près du lac Edouard au Zaïre sur un os de plus de 20.000 ans, appelé l'os d'Ishango et recouvert d'entailles marquant les nombres 11, 13, 17 et 19. Ces nombres sont premiers.

Plus tard, les grecs de l'Ecole Pythagoricienne, passionnés par l'Arithmétique, étudieront la notion de diviseur et de nombre parfait (nombre égal à la somme de ses diviseurs propres).

Par exemple, 6 est un nombre parfait, car $6 = 1 + 2 + 3$, 1, 2 et 3 étant les diviseurs de 6.

Mais c'est avec Euclide ($\simeq$300 ans avant J-C) que les bases de l'Arithmétique (et même des Mathématiques !) vont être posées avec ses *"Eléments"*. Voici un extrait du livre Septième :

Mais c'est avec Euclide ($\simeq$300 ans avant J-C) que les bases de l'Arithmétique (et même des Mathématiques !) vont être posées avec ses *"Eléments"*. Voici un extrait du livre Septième :

- "L'unité est ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une

Mais c'est avec Euclide ($\simeq$300 ans avant J-C) que les bases de l'Arithmétique (et même des Mathématiques !) vont être posées avec ses *"Eléments"*. Voici un extrait du livre Septième :

- "L'unité est ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une
- Un nombre est un assemblage composé d'unité,

Mais c'est avec Euclide ($\simeq$300 ans avant J-C) que les bases de l'Arithmétique (et même des Mathématiques !) vont être posées avec ses *"Eléments"*. Voici un extrait du livre Septième :

- "L'unité est ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une
- Un nombre est un assemblage composé d'unité,
- Un nombre est une partie d'un nombre, le plus petit du plus grand, lorsque le plus petit mesure le plus grand,

Mais c'est avec Euclide ($\simeq$300 ans avant J-C) que les bases de l'Arithmétique (et même des Mathématiques !) vont être posées avec ses *"Eléments"*. Voici un extrait du livre Septième :

- "L'unité est ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une
- Un nombre est un assemblage composé d'unité,
- Un nombre est une partie d'un nombre, le plus petit du plus grand, lorsque le plus petit mesure le plus grand,
- Le nombre premier est celui qui est mesuré par l'unité seul,

Mais c'est avec Euclide ($\simeq$300 ans avant J-C) que les bases de l'Arithmétique (et même des Mathématiques !) vont être posées avec ses *"Eléments"*. Voici un extrait du livre Septième :

- "L'unité est ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une
- Un nombre est un assemblage composé d'unité,
- Un nombre est une partie d'un nombre, le plus petit du plus grand, lorsque le plus petit mesure le plus grand,
- Le nombre premier est celui qui est mesuré par l'unité seul,
- Le nombre composé est celui qui est mesuré par quelques nombres."

Un peu plus tard, le mathématicien grec Eratostène ($\simeq$200 ans avant J-C) donnera une méthode élégante pour déterminer tous les nombres premiers entre 1 et n (n étant quelconque). C'est le crible d'Eratostène.

Un peu plus tard, le mathématicien grec Eratostène ($\simeq$200 ans avant J-C) donnera une méthode élégante pour déterminer tous les nombres premiers entre 1 et n (n étant quelconque). C'est le crible d'Eratostène.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

	<u>2</u>	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

	2	3		5		7		9	
11		13		15		17		19	
21		23		25		27		29	
31		33		35		37		39	
41		43		45		47		49	
51		53		55		57		59	
61		63		65		67		69	
71		73		75		77		79	
81		83		85		87		89	
91		93		95		97		99	

	2	3		5		7		9	
11		13		15		17		19	
21		23		25		27		29	
31		33		35		37		39	
41		43		45		47		49	
51		53		55		57		59	
61		63		65		67		69	
71		73		75		77		79	
81		83		85		87		89	
91		93		95		97		99	

	2	3		5		7		9	
11		13		15		17		19	
21		23		25		27		29	
31		33		35		37		39	
41		43		45		47		49	
51		53		55		57		59	
61		63		65		67		69	
71		73		75		77		79	
81		83		85		87		89	
91		93		95		97		99	

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23		25				29	
31				35		37			
41		43				47		49	
		53		55				59	
61				65		67			
71		73				77		79	
		83		85				89	
91				95		97			

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23		25				29	
31				35		37			
41		43				47		49	
		53		55				59	
61				65		67			
71		73				77		79	
		83		85				89	
91				95		97			

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23		25				29	
31				35		37			
41		43				47		49	
		53		55				59	
61				65		67			
71		73				77		79	
		83		85				89	
91				95		97			

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23						29	
31						37			
41		43				47		49	
		53						59	
61						67			
71		73				77		79	
		83						89	
91						97			

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23						29	
31						37			
41		43				47		49	
		53						59	
61						67			
71		73				77		79	
		83						89	
91						97			

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23						29	
31						37			
41		43				47		49	
		53						59	
61						67			
71		73				77		79	
		83						89	
91						97			

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23						29	
31						37			
41		43				47			
		53						59	
61						67			
71		73						79	
		83						89	
						97			

“ Ceux qui ne se laissent mesurer d’aucune façon, échappant ainsi à la mesure, sont les nombres premiers et non composés, qui se trouvent ainsi séparés du reste comme par un crible”

2 - Gauss et Riemann

Un siècle après Euler suit Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

2 - Gauss et Riemann

Un siècle après Euler suit Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Tres précoce, il est vite repéré par le duc de Brünswick qui finance ses études. Il travaillera ensuite à Göttingen en Basse Saxe.

2 - Gauss et Riemann

Un siècle après Euler suit Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Tres précoce, il est vite repéré par le duc de Brünswick qui finance ses études. Il travaillera ensuite à Göttingen en Basse Saxe.

A 15 ans (!), il étudie les tables connus de nombres premiers et il découvre de nombreuses erreurs ...
A 18 ans, il réussit à dessiner un polygône régulier à 17 cotés uniquement à la règle et au compas,
A 22 ans, il soutient une thèse où figure la première démonstration rigoureuse du théorème :

"Un polynôme de degré n possède exactement n racines dans $\mathbb{C}$ (comptées avec multiplicité)"

Au lieu de se demander :

"Quel est l'emplacement exact des nombres premiers dans une table de nombres ?"

Il pose le problème :

"Peut-on estimer le nombre de nombres premiers entre 1 et un nombre N quelconque ?"

Au lieu de se demander :

"Quel est l'emplacement exact des nombres premiers dans une table de nombres ?"

Il pose le problème :

"Peut-on estimer le nombre de nombres premiers entre 1 et un nombre N quelconque ?"

Par exemple, il y a 25 nombres premiers compris entre 1 et 100, *i.e* parmi les 100 premiers nombres, 1 nombre sur 4 est premier.

Comment cette quantité se modifie pour les nombres de 1 à 1000 ? 1 à 10000 ? etc ...

Au lieu de se demander :

“Quel est l’emplacement exact des nombres premiers dans une table de nombres ?”

Il pose le problème :

“Peut-on estimer le nombre de nombres premiers entre 1 et un nombre N quelconque ?”

Par exemple, il y a 25 nombres premiers compris entre 1 et 100, *i.e* parmi les 100 premiers nombres, 1 nombre sur 4 est premier.

Comment cette quantité se modifie pour les nombres de 1 à 1000 ? 1 à 10000 ? etc ...

Soit $\Pi(N)$ le nombre de premiers entre 1 et N. En quoi connaître Π permet de trouver tous les nombres premiers ?

Soit $\Pi(N)$ le nombre de premiers entre 1 et N. En quoi connaître Π permet de trouver tous les nombres premiers ?

$$\Pi(N+1) = \Pi(N) + 1 \iff N+1 \text{ est premier}$$

Table tirée du livre de Marcus de Sautoy

Nombre entier N	Repartition des nombres premiers (environ)
10	1 sur 2,5
100	1 sur 4
1000	1 sur 6
10.000	1 sur 8,1
1.000.000	1 sur 12,7
1.000.000.000	1 sur 19,7

Table tirée du livre de Marcus de Sautoy (cf. reférence).

Nombre entier N	Repartition des nombres premiers (environ)	ln N
10	1 sur 2,5	2,3
100	1 sur 4	4,6
1000	1 sur 6	6,9
10.000	1 sur 8,1	9,2
1.000.000	1 sur 12,7	13,8
1.000.000.000	1 sur 19,7	20,7

Table tirée du livre de Marcus de Sautoy (cf. reférence).

Nombre entier N	Repartition des nombres premiers (environ)	ln N
10	1 sur 2,5	2,3
100	1 sur 4	4,6
1000	1 sur 6	6,9
10.000	1 sur 8,1	9,2
1.000.000	1 sur 12,7	13,8
1.000.000.000	1 sur 19,7	20,7

Une estimation donnée par Gauss est donc que le nombre de nombres premiers entre 1 et N est voisin de $N/ln(N)$.

Cette découverte (rapport entre $\Pi(N)$ et logarithme) pourtant fondamental n'a jamais été annoncée publiquement par Gauss, réticent à l'idée de dévoiler une idée sans démonstrations.

Cette découverte (rapport entre $\Pi(N)$ et logarithme) pourtant fondamental n'a jamais été annoncée publiquement par Gauss, réticent à l'idée de dévoiler une idée sans démonstrations.

A partir de la deuxième partie du XIXème, les efforts de nombre de mathématiciens se concentrent sur les problèmes soulevés par Gauss.

En Allemagne, l'étude des mathématiques dans les Universités prend une part primordiale sous l'impulsion de Guillaume Von Humboldt (alors ministre de l'Education du royaume de Prusse, 1809).

> "L'enseignement universitaire ne permet pas seulement de comprendre l'unité de la science, il la facilite".

Le regard face aux mathématiques change : on les étudie pour elles-mêmes.

Voici un extrait d'une lettre de Carl Jacobi qui illustre bien ce propos :

"L'unique objet de la science est d'honorer l'esprit humain, et à cet égard un problème de la théorie des nombres a autant de valeur qu'un problème sur le système du monde"

Voici un extrait d'une lettre de Carl Jacobi qui illustre bien ce propos :

"L'unique objet de la science est d'honorer l'esprit humain, et à cet égard un problème de la théorie des nombres a autant de valeur qu'un problème sur le système du monde"

C'est dans ce contexte qu'un des (rares) étudiants de Gauss, Riemann, va permettre une avancée décisive dans le problème de répartition des nombres premiers.

Bernhard Riemann est né le 17 septembre 1826 à Hanovre. Il se passionne vite pour les mathématiques, et avec l'autorisation de son père, il s'inscrit à la faculté de philosophie.

Bernhard Riemann est né le 17 septembre 1826 à Hanovre. Il se passionne vite pour les mathématiques, et avec l'autorisation de son père, il s'inscrit à la faculté de philosophie.

Il prépare donc à Göttingen sa Dissertation inaugurale (selon la terminologie allemande) sous la direction de Gauss.

Bernhard Riemann est né le 17 septembre 1826 à Hanovre. Il se passionne vite pour les mathématiques, et avec l'autorisation de son père, il s'inscrit à la faculté de philosophie.

Il prépare donc à Göttingen sa Dissertation inaugurale (selon la terminologie allemande) sous la direction de Gauss.

Il la soutient en 1851 : elle concerne principalement la théorie des fonctions d'une variable complexe, dont il s'intéresse particulièrement aux propriétés géométriques.

Tout part de la fonction dite “fonction zéta” :

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + ... + \frac{1}{n^s} + ...$$

Tout part de la fonction dite “fonction zéta” :

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots.$$

où s est un nombre réel supérieur strictement à 1. Cette fonction avait été utilisée par Dirichlet (qui succédait alors à Gauss à Göttingen) juste avant Riemann.

Tout part de la fonction dite “fonction zéta” :

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots.$$

où s est un nombre réel supérieur strictement à 1. Cette fonction avait été utilisée par Dirichlet (qui succédait alors à Gauss à Göttingen) juste avant Riemann. Quel est le lien avec les nombres premiers ?

Tout part de la fonction dite “fonction zéta” :

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + ... + \frac{1}{n^s} + ...$$

où s est un nombre réel supérieur strictement à 1. Cette fonction avait été utilisée par Dirichlet (qui succédait alors à Gauss à Göttingen) juste avant Riemann. Quel est le lien avec les nombres premiers ?

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - 1/p^s}$$

Cette identité était en fait déjà connue d’Euler mais ceci donne une idée de l’implication qu’elle peut avoir sur le comportement des nombres premiers.

Il est possible de “prolonger” cette fonction sur l’ensemble des nombres réels positifs (différents de 1) puis sur l’ensemble des nombres complexes (de partie réelle différente de 1).

Riemann s’intéressera aux “zéros” de cette fonction, c’est à dire aux nombres complexes z tels que $\zeta(z) = 0$.

Il est possible de “prolonger” cette fonction sur l’ensemble des nombres réels positifs (différents de 1) puis sur l’ensemble des nombres complexes (de partie réelle différente de 1).

Riemann s’intéressera aux “zéros” de cette fonction, c’est à dire aux nombres complexes z tels que $\zeta(z) = 0$.

La fonction ζ a des zéros aux points entiers négatifs pairs $z = -2, -4, \ldots$, on les appelle les zéros triviaux. Mais cette fonction possède d’autres zéros appelés zéros non triviaux.

En termes simples, mieux on connaît l’emplacement de ces zeros, mieux on connaît la fonction de repartitions des nombres premiers.

Il est possible de “prolonger” cette fonction sur l’ensemble des nombres réels positifs (différents de 1) puis sur l’ensemble des nombres complexes (de partie réelle différente de 1).

Riemann s’intéressera aux “zéros” de cette fonction, c’est à dire aux nombres complexes z tels que $\zeta(z) = 0$.

La fonction ζ a des zéros aux points entiers négatifs pairs $z = -2, -4, ...$, on les appelle les zéros triviaux. Mais cette fonction possède d’autres zéros appelés zéros non triviaux.

En termes simples, mieux on connaît l’emplacement de ces zeros, mieux on connaît la fonction de repartitions des nombres premiers.

Par exemple, l'essentiel de la démonstration de Vallée Poussin et Hadamard prouvant les observations de Gauss ("$\Pi(N)$ est proche de $N/\ln(N)$") est de montrer que ces zeros ne sont jamais situés sur la droite $x = 1$.

Par exemple, l'essentiel de la démonstration de Vallée Poussin et Hadamard prouvant les observations de Gauss ("$\Pi(N)$ est proche de $N/\ln(N)$") est de montrer que ces zeros ne sont jamais situés sur la droite $x = 1$.

Conjecture (Hypothèse de Riemann)

Les zéros non triviaux de la fonction zeta sont tous de la forme $x = 1/2 + iy$.

Conjecture (Hypothèse de Riemann)

Les zéros non triviaux de la fonction zeta sont tous de la forme $x = 1/2 + iy$.

Si cette hypothèse est vrai, ceci montre en particulier l'encadrement :

$$|\pi(N) - \mathrm{Li}(N)| \leqslant C\sqrt{N}\ln(N)$$

où $\mathrm{Li}(N)$ est une certaine fonction sensée "approcher" la fonction de répartition des nombres premiers.

En quoi cette hypothèse est-elle intéressante ?

- Elle est liée à d'autres questions importantes par exemple une de ses formes généralisées entraineraît l'existence d'un algorithme efficace pour tester la primalité d'un nombre. Beaucoup de problèmes en théorie des nombres sont liés à cette hypothèse.

- Elle est liée à d'autres questions importantes par exemple une de ses formes généralisées entraineraît l'existence d'un algorithme efficace pour tester la primalité d'un nombre. Beaucoup de problèmes en théorie des nombres sont liés à cette hypothèse.
- C'est une sorte de défi pour chaque génération de mathématicien (cf théorème de Wiles-Fermat).

- Elle est liée à d'autres questions importantes par exemple une de ses formes généralisées entraineraît l'existence d'un algorithme efficace pour tester la primalité d'un nombre. Beaucoup de problèmes en théorie des nombres sont liés à cette hypothèse.
- C'est une sorte de défi pour chaque génération de mathématicien (cf théorème de Wiles-Fermat).
- Elle induit l'invention de nouveaux concepts en mathématiques (cf théorème de Wiles-Fermat encore).

- Elle est liée à d'autres questions importantes par exemple une de ses formes généralisées entraineraît l'existence d'un algorithme efficace pour tester la primalité d'un nombre. Beaucoup de problèmes en théorie des nombres sont liés à cette hypothèse.
- C'est une sorte de défi pour chaque génération de mathématicien (cf théorème de Wiles-Fermat).
- Elle induit l'invention de nouveaux concepts en mathématiques (cf théorème de Wiles-Fermat encore). D'après Hilbert, la plus grande réussite technologique serait d'attraper une mouche sur la lune "parce que pour parvenir à ce résultat, il faudrait résoudre des problèmes auxiliaires tels que cela signifierait que nous aurions trouvé la solutions à presque tous les problèmes matériels de l'humanité".

Dans les années qui suivent l'énoncé de cette conjecture, de nombreux mathématiciens de renoms se sont acharnés à la prouver .... sans résultat. Ce problème deviendra même un des fameux 23 problèmes de Hilbert.

Certains Mathématiciens commencèrent alors à supposer la véracité de cette conjecture pour avancer dans leur recherche ....

Dans les années qui suivent l'énoncé de cette conjecture, de nombreux mathématiciens de renoms se sont acharnés à la prouver .... sans résultat. Ce problème deviendra même un des fameux 23 problèmes de Hilbert.

Certains Mathématiciens commencèrent alors à supposer la véracité de cette conjecture pour avancer dans leur recherche ....
.... en risquant le fait que la découverte d'un zéro en dehors de la droite détruise tout l'édifice.

Quand on fait des calculs numériques de $\mathrm{Li}(N)$, il semble que l'on ait l'inégalité suivante :

$$\Pi(N) \leqslant \mathrm{Li}(N)$$

Quand on fait des calculs numériques de $\mathrm{Li}(N)$, il semble que l'on ait l'inégalité suivante :

$$\Pi(N) \leqslant \mathrm{Li}(N)$$

Pourtant un mathématicien britannique Littelwood a montré que $\Pi(N) - \mathrm{Li}(N)$ changeait de signe une infinité de fois !

Quand on fait des calculs numériques de $\mathrm{Li}(N)$, il semble que l'on ait l'inégalité suivante :

$$\Pi(N) \leqslant \mathrm{Li}(N)$$

Pourtant un mathématicien britannique Littelwood a montré que $\Pi(N) - \mathrm{Li}(N)$ changeait de signe une infinité de fois !

L'assertion "$\Pi(N) \leqslant \mathrm{Li}(N)$ pour tout entier N" est donc fausse (on sait que le premier contre exemple N à cette conjecture est majoré par 10^{371} et tous les entiers inférieurs à 10^{20} vérifient l'inégalité !!!).

Devant l'incapacité de prouver la conjecture de Riemann, certains mathématiciens commençaient à ne plus y croire réellement :

Devant l'incapacité de prouver la conjecture de Riemann, certains mathématiciens commençaient à ne plus y croire réellement :

Littlewood : "Je crois que c'est faux. Il n'en existe aucune preuve. Or il ne faut pas accorder de crédit à ce qui n'a pas de preuve. Je dois par ailleurs reconnaître que je ne vois aucune raison imaginable venant à l'appui de sa véracité".

Deuxième problème de Hilbert : Démontrer la consistance des axiomes de l'arithmétique.

Deuxième problème de Hilbert : Démontrer la consistance des axiomes de l'arithmétique.

C'est à dire :

"Sommes-nous certains que l'on ne puisse pas démontrer qu'une affirmation est vrai et fausse ?"

Dans sa thèse, Gödel ("Herr Warum") montre que quelque soit les axiomes choisis, ils ne pourraient jamais servir à prouver qu'aucune contradiction ne ferait jour.

Dans sa thèse, Gödel ("Herr Warum") montre que quelque soit les axiomes choisis, ils ne pourraient jamais servir à prouver qu'aucune contradiction ne ferait jour.

Ce résultat génère un véritable choc dans la communauté mathématique, André Weil résuma la situation par :

Dans sa thèse, Gödel ("Herr Warum") montre que quelque soit les axiomes choisis, ils ne pourraient jamais servir à prouver qu'aucune contradiction ne ferait jour.

Ce résultat génère un véritable choc dans la communauté mathématique, André Weil résuma la situation par :

"Dieu existe puisque l'univers mathématiques est consistant,

Dans sa thèse, Gödel ("Herr Warum") montre que quelque soit les axiomes choisis, ils ne pourraient jamais servir à prouver qu'aucune contradiction ne ferait jour.

Ce résultat génère un véritable choc dans la communauté mathématique, André Weil résuma la situation par :

"Dieu existe puisque l'univers mathématiques est consistant, et le diable existe puisque l'on ne peut pas le prouver"

Dans sa thèse, Gödel ("Herr Warum") montre que quelque soit les axiomes choisis, ils ne pourraient jamais servir à prouver qu'aucune contradiction ne ferait jour.

Ce résultat génère un véritable choc dans la communauté mathématique, André Weil résuma la situation par :

"Dieu existe puisque l'univers mathématiques est consistant, et le diable existe puisque l'on ne peut pas le prouver"

Le deuxième résultat de Gödel est encore plus déstablilisant : tout système d'axiomes consistants est nécessairement incomplet dans la mesure où il y aura des énoncés qui ne pourront ni être démontrés ni réfutés grâce aux axiomes.

En fait, il démontre que si on construit un système logique pour formaliser la théorie des nombres entiers, ce système contiendra au moins une formule A qui est telle que ni A, ni sa négation non-A ne pourront être formellement démontrées dans le cadre du système.

En fait, il démontre que si on construit un système logique pour formaliser la théorie des nombres entiers, ce système contiendra au moins une formule A qui est telle que ni A, ni sa négation non-A ne pourront être formellement démontrées dans le cadre du système.

Conséquence :

En fait, il démontre que si on construit un système logique pour formaliser la théorie des nombres entiers, ce système contiendra au moins une formule A qui est telle que ni A, ni sa négation non-A ne pourront être formellement démontrées dans le cadre du système.

Conséquence : peut-etre que l'hypothèse de Riemann ne peut pas être démontrée ?!!!

En fait, il démontre que si on construit un système logique pour formaliser la théorie des nombres entiers, ce système contiendra au moins une formule A qui est telle que ni A, ni sa négation non-A ne pourront être formellement démontrées dans le cadre du système.

Conséquence : peut-etre que l'hypothèse de Riemann ne peut pas être démontrée ?!!!

En fait, le théorème d'incomplétude de Gödel montre surtout que les mathématiques se doivent de faire évoluer ses fondations : ses axiomes de façon à faire évoluer cette science en elle-même.

En fait, il démontre que si on construit un système logique pour formaliser la théorie des nombres entiers, ce système contiendra au moins une formule A qui est telle que ni A, ni sa négation non-A ne pourront être formellement démontrées dans le cadre du système.

Conséquence : peut-etre que l'hypothèse de Riemann ne peut pas être démontrée ?!!!

En fait, le théorème d'incomplétude de Gödel montre surtout que les mathématiques se doivent de faire évoluer ses fondations : ses axiomes de façon à faire évoluer cette science en elle-même.

A partir de la deuxième guerre mondiale, rentre en scène un outil qui va révolutionner le monde des nombres premiers : l'ordinateur avec Alan Turing.

Grâce au développement des ordinateurs, on a pu tester plus facilement l'hypothèse de Riemann, en 1975, Brent annonça que les 75 premiers millions de zéros se trouvent bien sur la bonne droite conjecturée par Riemann .... un peu plus tard, on arriva à 300 millions ....

Grâce au développement des ordinateurs, on a pu tester plus facilement l'hypothèse de Riemann, en 1975, Brent annonça que les 75 premiers millions de zéros se trouvent bien sur la bonne droite conjecturée par Riemann .... un peu plus tard, on arriva à 300 millions ....

Ces calculs ne permettent pas seulement une vérification, dans les années 80, elles ont permis de démontrer la fausseté d'un proche parent de la conjecture de Riemann : la conjecture de Mertens. Le contre-exemple est l'oeuvre ...

Grâce au développement des ordinateurs, on a pu tester plus facilement l'hypothèse de Riemann, en 1975, Brent annonça que les 75 premiers millions de zéros se trouvent bien sur la bonne droite conjecturée par Riemann .... un peu plus tard, on arriva à 300 millions ....

Ces calculs ne permettent pas seulement une vérification, dans les années 80, elles ont permis de démontrer la fausseté d'un proche parent de la conjecture de Riemann : la conjecture de Mertens. Le contre-exemple est l'oeuvre ... d'une compagnie de téléphone $AT\&T$

C'est à partir de ce moment que l'on va s'apercevoir de "l'utilité" de la théorie des nombres dans la vie de tous les jours et en particulier en cryptographie.

Les grands compagnies privées (banques, assurances etc ...) se sont alors mis à s'intéresser aux problèmes liés aux nombres premiers.

C'est à partir de ce moment que l'on va s'apercevoir de "l'utilité" de la théorie des nombres dans la vie de tous les jours et en particulier en cryptographie.

Les grands compagnies privées (banques, assurances etc ...) se sont alors mis à s'intéresser aux problèmes liés aux nombres premiers.

Depuis quelques années, on cherche par exemple à déterminer de grands nombres premiers, la EFF (Electronic Frontier Foundation), association de défense et de promotion de l'utilisation du réseau Internet, offre de belles récompenses :

C'est à partir de ce moment que l'on va s'apercevoir de "l'utilité" de la théorie des nombres dans la vie de tous les jours et en particulier en cryptographie.

Les grands compagnies privées (banques, assurances etc ...) se sont alors mis à s'intéresser aux problèmes liés aux nombres premiers.

Depuis quelques années, on cherche par exemple à déterminer de grands nombres premiers, la EFF (Electronic Frontier Foundation), association de défense et de promotion de l'utilisation du réseau Internet, offre de belles récompenses :

- 100 000 $ pour un nombre premier de 10 millions de chiffres (trouvé en 2008 !),
- 150 000 $ pour 100 millions de chiffres,
- 250 000 $ pour un milliard de chiffres.

D'apres Peter Sarnak (Princeton, USA): "Si Gauss vivait de nos jours, il serait pirate informatique"

BIBLIOGRAPHIE.

C. K. CALDWELL : "*La page des nombres premiers*", http://www.utm.edu/research/primes/.

A. DAHAN-DALMEDICO : "*Une histoire des mathématiques*", Poche, 1986.

P. DAMPHOUSSE : "*L'Arithmétique ou l'art de compter*", Broché, 2002.

J-P DELAHAYE : "*Merveilleux nombres premiers, voyage au coeur de l'arithmétique*", BELIN, Pour la science, 2000.

G. DUBERTRET : "*Initiation à la cryptographie*", Broché, 2002.

A. GRANVILLE : "*Nombres premiers et chaos quantiques*", Gazette des mathématiciens, Juillet 2003, SMF.

M. DE SAUTOY : "*La symphonie des nombres premiers*", éd. Héloïse d'Ormesson, 2004.