Systèmes différentiels.
Rappels de cours et exercices

Farid Ammar Khodja

E-mail address: `ammar@math.univ-fcomte.fr`

IUFM de Franche-Comté.

Table des matières

Partie 1

Rappels de cours

CHAPîTRE 1

Résultats généraux

1. Systèmes différentiels linéaires

NOTATION 1. • $\mathbb{M}_{nm}(\mathbb{K})$ *est l'ensembles des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans le corps* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

$\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ *est l'ensembles des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients dans le corps* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

- $\mathbb{M}_{nm}(\mathbb{K})$ *est isomorphe à* $\mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$*, l'ensemble des applications linéaires de* $\mathbb{K}^m$ *dans* $\mathbb{K}^n$*. On le munit de la norme euclidienne: si* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{nm}(\mathbb{K})$

$$|A| = \left(\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

- A^t *désigne la matrice transposée de* A.
- I *désigne un intervalle de* R *(qui peut être ouvert, fermé, semi-fermé, borné ou non).*
- $C^k(I, \mathbb{R}^n)$ *est l'ensemble des fonctions continûment dérivables de* I *dans* $\mathbb{R}^n$.
- *Pour tout* $V = [v_1, \cdots, v_n]^t \in C(I, \mathbb{R}^n)$*, on note*

$$\int_a^b V(s)\ ds = \left[\int_a^b v_1(s) ds, \cdots, \int_a^b v_n(s) ds \right]^t$$

1.1. Existence et unicité.

DÉFINITION 1.1. *Soit* $A(t) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, $B(t) \in \mathbb{C}^n$ *pour tout* $t \in I$*. On dit que le* ***système différentiel***

$$y'(t) = A(t)\ y(t) + B(t),\ t \in I \tag{1.1}$$

est ***linéaire non homogène****. Si* $B(t) = 0 \in \mathbb{C}^n$ *pour tout* $t \in I$*, on dit que le système est* ***linéaire homogène****.*

Dans ce paragraphe, on considère le **problème de Cauchy** correspondant

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)\ y(t) + B(t),\ t \in I \\ y(t_0) = y^0 \in \mathbb{C}^n \end{cases} \tag{1.2}$$

où $t_0 \in I$.

THÉORÈME 1.2. *([1]) Si* $A \in C(I, \mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ *et* $B \in C(I, \mathbb{C}^n)$*, alors pour tout* $y^0 \in \mathbb{C}^n$ *le système (1.2) admet une unique solution définie sur* I.

[1] C'est le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.

L'ensemble S des solutions du système homogène $y'(t) = A(t)\ y(t)$ est de dimension n.

REMARQUE 1.3. *L'hypothèse $A = (a_{ij}) \in C(I, \mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ est équivalente à la continuité sur I de chacune des fonctions $t \mapsto a_{ij}(t)$.*$\square$

PREUVE DU THÉORÈME **1.2**. Faire à l'aide du canevas suivant:

EXERCICE 1.4.

(1) ***Lemme de Gronwall.*** *Soit $\phi \in C([a,b]\,;\mathbb{R}^+)$ et $c \in [a,b]$. On suppose qu'il existe deux nombres $\alpha, \beta \geq 0$ tels que*

$$\phi(t) \leq \alpha + \beta \left| \int_c^t \phi(s)\ ds \right|,\ \forall t \in [a,b]\,.$$

Montrer que

$$\phi(t) \leq \alpha e^{\beta|t-c|},\ \forall t \in [a,b]\,.$$

Que se passe-t-il si $\alpha = 0$?

(2) ***Unicité de la solution.*** *Soit $A \in C(I, \mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ et $B \in C(I, \mathbb{C}^n)$.*

  (a) *Montrer que si y_1 et y_2 sont deux solutions de (1.2) alors $\forall t \in I$*

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq k \int_{t_0}^t |y_1(s) - y_2(s)|\ ds$$

  (b) *En déduire que $y_1(t) = y_2(t)$ pour tout $t \in I$.*

(3) ***Existence d'une solution par la méthode des approximations successives.*** *Soit $A \in C(I, \mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ et $B \in C(I, \mathbb{C}^n)$ et $[a,b] \subset I$ quelconque tel que $t_0 \in [a,b]$. On donne la suite de fonctions $(y_n)_{n\geq 0}$:*

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t (A(s)y_n(s) + B(s)\ )\,ds,\ t \in [a,b],\ n \geq 0$$

  (a) *Montrer que pour tout $n \geq 1$*

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq \frac{Mk^{n-1}}{n!} |t - t_0|^n\,,\ \forall t \in [a,b]$$
$$k = \sup_{t\in[a,b]} \|A(t)\|\,,\ M = k\,|y_0| + \sup_{t\in[a,b]} |B(t)|$$

  En déduire que la suite de fonctions $(y_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers une fonction $y \in C([a,b]\,, \mathbb{C}^n)$, puis que la suite de fonctions $(Ay_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers la fonction Ay.

  (b) *Montrer que y est solution de (3.3) sur l'intervalle $[a,b]$.*

(4) *On suppose que $B(t) = 0 \in \mathbb{C}^n$ pour tout $t \in I$.*

  (a) *Montrer que l'ensemble des solutions de (1.1) est un sous espace vectoriel de $C^1(I, \mathbb{C}^n)$.*

  (b) *Soit $(V_1, \cdots, V_n)$ une base quelconque de $\mathbb{C}^n$. Pour tout $i = 1, \cdots, n$, on note y_i l'unique solution du problème*

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)\ y(t),\ t \in I \\ y(t_0) = V_i \in \mathbb{C}^n \end{cases}$$

  Montrer que pour tout $t \in I$, les vecteurs $y_1(t), \cdots, y_n(t)$ sont linéairement indépendants (et forment donc une base de $\mathbb{C}^n$). (Ind.: supposer qu'il existe $t_1 \in I$ tel que $y_1(t_1), \cdots, y_n(t_1)$ soient liés et appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour montrer que pour tout $t \in I$, les vecteurs $y_1(t), \cdots, y_n(t)$ sont liés.) Conclure.$\square$

Si $(y_1, \cdots, y_n)$ est une base de l'ensemble des solutions de (1.1), on dit qu'elle est un **système fondamental de solutions de (1.1)**. En pratique, cela signifie que toute autre solution s'écrit comme combinaison linéaire de ces solutions particulières. On dit que la **solution générale de (1.1)** est $y = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n$ où les $\alpha_i \in \mathbb{C}$ $(i = 1, \cdots, n)$ sont des constantes arbitraires.

1.2. Méthode de variation des constantes. Supposons que l'on connaisse une base de solutions $(y_1, \cdots, y_n)$ du problème $y' = A(t)y$ et résolvons le système non homogène (1.1) pour $B \in C(I, \mathbb{R})$. On cherche les solutions de (1.1) sous la forme

$$y = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n$$

où, cette fois, les α_i $(i = 1, \cdots, n)$ ne sont plus des nombres réels mais des fonctions:

$$\alpha_i \in C^1(I, \mathbb{R})(i = 1, \cdots, n).$$

En écrivant sous forme condensée $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$, on a

$$y' = \sum_{i=1}^n (\alpha_i' y_i + \alpha_i y_i')$$

Comme, par hypothèse, pour tout $i = 1, \cdots, n$, y_i vérifie $y_i' = Ay_i$, on en déduit que

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i' y_i + \alpha_i A y_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i' y_i + Ay. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour que y soit solution de (1.1) il faut et il suffit que:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i' y_i = B \tag{1.3}$$

Notons

$$M(t) = [y_1(t), \cdots, y_n(t)], \ t \in I \tag{1.4}$$

la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $y_1(t), \cdots, y_n(t)$ et

$$\alpha(t) = [\alpha_1(t), \cdots, \alpha(t)]^t, \ t \in I$$

Le système (1.3) s'écrit avec ces notations

$$M(t)\alpha'(t) = B(t), \ t \in I$$

et on déduit que

$$\alpha'(t) = M(t)^{-1} B(t), \ t \in I$$

et pour $t_0 \in I$ fixé,

$$\alpha(t) = \int_{t_0}^t M(s)^{-1} B(s) \, ds + C,$$

où $C \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur constant quelconque. Cela détermine la solution cherchée. On a alors

$$y = M(t)C + M(t) \int_{t_0}^t M(s)^{-1} B(s) \, ds$$

On remarquera que, dans cette formule, $M(t)C$ **est la solution générale du système homogène et** $M(t)\int_{t_0}^t M(s)^{-1}B(s)$ **est une solution particulière du système non homogène.**

Cette méthode de recherche des solutions du problème non homogène connaissant un système fondamental de solutions du système s'appelle **méthode de variation des constantes**.

Remarque 1.5. *Notons* $e_1 = (1, 0, \cdots, 0), \ldots,\ e_n = (0, \cdots, 0, 1)$ *les vecteurs de la base canonique de* $\mathbb{R}^n$. *Soit* $M(t) = [y_1(t), \cdots, y_n(t)],\ t \in I$ *où*

$$\begin{cases} y_i' = A(t)y_i \\ y_i(t_0) = e_i \end{cases}, t \in I$$

Alors M *est l'unique solution matricielle du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} M'(t) = A(t)M(t) \\ M(t_0) = Id \end{cases}, t \in I$$

où Id *est l'identité de* $\mathbb{R}^n$. *La solution de (1.2) s'écrit alors*

$$y(t) = M(t)y_0 + \int_{t_0}^t M(t)M(s)^{-1}B(s)ds.$$

La matrice $R(t, s) = M(t)M(s)^{-1}$ *s'appelle matrice résolvante de (1.2).* □

2. Équations linéaires scalaires

2.1. Équations linéaires du second ordre. Ce sont les équations de la forme

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t),\ t \in I \tag{2.1}$$

où a, b et $c \in C(I, \mathbb{C})$.

En introduisant une nouvelle fonction $x : I \to C$, on peut ramener cette équation à un système linéaire. Plus précisément, le système

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -b(t)y - a(t)z + c(t) \end{cases},\ t \in I \tag{2.2}$$

est équivalent à l'équation (2.1) au sens suivant: toute solution y de (2.1) donne une solution $(y, y')^t$ de (2.2) et, réciproquement, toute solution $(y, z)^t = (y, y')^t$ de (2.2) est telle que y est solution de (2.1). Autrement dit, il y a une correspondance biunivoque entre les solutions de (2.1) et (2.2).

Pour les équations linéaires du second ordre, on appelle problème de Cauchy un système de la forme

$$\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t), \\ y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_1 \end{cases},\ t \in I \tag{2.3}$$

où $t_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{C}$.

Comme conséquence du théorème 1.2, on a:

Théorème 2.1. *Soient* a, b *et* $c \in C(I, \mathbb{C})$. *Pour tout* $t_0 \in I$ *et tout* $(y_0, y_1) \in \mathbb{C}^2$ *, le problème admet une unique solution de (2.3)* $y \in C^2(I; \mathbb{C})$.

*De plus, l'ensemble des solutions de l'****équation homogène***

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0,\ t \in I \tag{2.4}$$

est un espace vectoriel de dimension 2.

2.2. Méthode de variation des constantes. Soit (y_1, y_2) une base de l'ensemble des solution de (2.4). Alors toute solution y de (2.4) s'écrit $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ où α_1, α_2 sont des constantes. La méthode de variation des constantes, comme dans la section précédente, consiste à chercher les solutions de (2.1) sous la forme $y = \alpha_1(t)y_1 + \alpha_2(t)y_2$ où $\alpha_1, \alpha_2 \in C^2(I, \mathbb{C})$. En utilisant l'équivalence de (2.1) et (2.2), il est facile d'établir que α_1, α_2 doivent vérifier le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1' y_1 + \alpha_2' y_2 = 0 \\ \alpha_1' y_1 + \alpha_2' y_2 = c(t) \end{array} \right. \tag{2.5}$$

La résolution algébrique de ce système permet de déterminer α_1', α_2' puis, par intégration, α_1, α_2.

EXEMPLE 2.2. *Résoudre l'équation: $y'' - y = t$*

On peut vérifier que (e^t, e^{-t}) constitue une base de solutions de l'équation homogène. On cherche donc, pour résoudre l'équation non homogène, deux fonctions α_1 et α_2 vérifiant le système (2.5), qui s'écrit dans ce cas

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1' e^t + \alpha_2' e^{-t} = 0 \\ \alpha_1' e^t - \alpha_2' e^{-t} = \ t \end{array} \right.$$

On a alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1' = \frac{1}{2} t e^{-t} \\ \alpha_2' = -\ \frac{1}{2} t e^{t} \end{array} \right.$$

et ceci donne $\alpha_1 = -\frac{1}{2}(t\ + 1)\,e^{-t} + C_1$ et $\alpha_2 = -\frac{1}{2}(t - 1)\,e^t\ + C_2$, C_1 et C_2 étant des constantes arbitraires. La solution générale est alors:

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - t$$

3. Notions sur les équations non linéaires

DÉFINITION 3.1. *Une équation différentielle du premier ordre est une équation reliant une fonction inconnue $y : I =]a, b[\to \mathbb{R}$, à sa dérivée première:*

$$F(t, y'(t), y(t)) = 0 \ \forall t \in I \tag{3.1}$$

avec $F : I \times U \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert de R^2.

On appelle solution de (3.1) toute fonction $y \in C^1(J, \mathbb{R})$ vérifiant (3.1) sur J où $J \subset I$ est un intervalle non trivial.

*On dit qu'une solution $y \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ est **maximale,** si son intervalle de définition est le plus grand possible contenu dans I.*

Le plus souvent, les équations du type (3.1) sont étudiées sous leur forme *résolue* en y' :

$$y' = f(t, y), \ \ t \in I \tag{3.2}$$

où $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

DÉFINITION 3.2. *Soit $(t_0, y_0) \in [a, b[\times \mathbb{R}$. On appelle problème de Cauchy associé à (3.2) le système*

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = f(t, y), \ \ \forall t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right. \tag{3.3}$$

Les résultats d'existence et d'unicité concernent le problème de Cauchy. On définit une classe de fonctions f pour lesquelles ils peuvent être démontrés.

Ω désigne dans la suite un ouvert de $\mathbb{R}$.

THÉORÈME 3.3. *(**Cauchy-Lipschitz**) Si $f \in C^1(I \times \Omega)$ alors pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$, le problème (3.3) admet une unique solution maximale.*

PREUVE. Faire en exercice à l'aide du canevas suivant...

EXERCICE 3.4.

(1) ***Unicité de la solution maximale.*** *Soit $f \in C^1(I \times \Omega)$ et $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$. On suppose qu'il existe un intervalle $J \subset I$ et deux fonctions $y_1, y_2 \in C^1(J; \mathbb{R})$ solutions sur J de (3.3).*
   (a) *Soit $t_1 = \inf \{t > t_0; y_1(t) \neq y_2(t)\}$. Montrer que $y_1(t_1) = y_2(t_1)$.*
   (b) *Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0,\ k > 0$ tels que: $\forall t \in]t_1, t_1 + \varepsilon[$*
   $$|y_1(t) - y_2(t)| \leq k \int_{t_1}^{t} |y_1(s) - y_2(s)|\ ds$$
   (c) *En déduire que $y_1(t) = y_2(t)$ pour tout $t \in J$.*

(2) ***Existence d'une solution par la méthode des approximations successives.*** *Soit $f \in C^1(I \times \Omega)$ et $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$. On donne la suite de fonctions $(y_n)_{n \geq 0}$:*
   $$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))\ ds,\ t \in [t_0, t_0 + \varepsilon[\cap I,\ n \geq 0$$
   (a) *Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \geq 0$*
   $$\begin{array}{rcl} |y_n(t) - y_0| & \leq & M\varepsilon,\ \forall\ t \in [t_0, t_0 + \varepsilon[\cap I \\ M & = & \sup\limits_{(t,y) \in D} |f(t, y)| \end{array}$$
   En déduire qu'en choisissant ε suffisamment petit, on a pour tout $n \geq 0$: $y_n(t) \in \Omega$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon[$.
   (b) *Montrer que pour tout $n \geq 0$*
   $$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq \frac{Mk^{n-1}}{n!}(t - t_0)^n,\ \forall t \in [t_0, t_0 + \varepsilon[$$
   En déduire que la suite de fonctions $(y_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers une fonction $y \in C([t_0, t_0 + \varepsilon[)$.
   (c) *Montrer que y est solution de (3.3) sur l'intervalle $[t_0, t_0 + \varepsilon[$.* $\square$

CHAPîTRE 2

Méthodes pratiques de résolution

1. Équations du premier ordre

1.1. Équations linéaire du premier ordre. Ce sont les équations de la forme

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t), \ t \in I \tag{1.1}$$

avec $a, b \in C(I, \mathbb{R})$. La solution générale de cette équation est

$$y(t) = Ce^{\int_{t_0}^t a(s)\ ds} + \int_{t_0}^t e^{\int_\tau^t a(s)\ ds}\ b(\tau)d\tau \tag{1.2}$$

où $t_0 \in I$ est quelconque mais fixé, et $C \in \mathbb{R}$. En effet (méthode du facteur intégrant), si on multiplie l'équation (1.1) par $e^{-\int_{t_0}^t a(s)\ ds}$ alors, en remarquant que $e^{-\int_{t_0}^t a(s)\ ds}\,(y'(t) - a(t)y(t)) = \left(e^{-\int_{t_0}^t a(s)\ ds}y(t)\right)'$, on obtient

$$\left(e^{-\int_{t_0}^t a(s)\ ds}y(t)\right)' = e^{-\int_{t_0}^t a(s)\ ds}b(t)$$

puis (1.2) en intégrant.

1.2. Équations à variables séparées. Ce sont les équations de la forme

$$y'(t) = a(t)\ g(y(t)), \ t \in I$$

On suppose, pour l'intégrer, que l'on travaille dans des intervalles J tels que $g(y(t)) \neq 0$ pour tout $t \in J$. On a alors

$$\frac{y'(t)}{g(y(t))} = a(t)$$

et, en remarquant que $\int \frac{y'(t)}{g(y(t))}dt = \int \frac{du}{g(u)}$ (en faisant le changement de variable $u = y(t)$), on obtient, si on pose $F(y) = \int \frac{dy}{g(y)}$

$$F(y) = \int a(t)dt$$

qui fournit une expression implicite de y.

Exemple 1.1. *Résoudre les équations*

$$(i)\ y' = \frac{(t^2+1)(1-y^2)}{ty};\ (ii) \quad y' = y^\sigma\ (\sigma \in \mathbb{R})$$

(i) L'équation suppose déjà que l'on travaille dans un intervalle I ne contenant pas 0 et sur lequel y ne s'annule pas. On suppose de plus, que dans l'intervalle sur lequel on travaille, $y \neq \pm 1$. On a alors

$$\frac{yy'}{1-y^2} = \frac{t^2+1}{t}$$

En remarquant que

$$\frac{yy'}{1-y^2} = -\frac{1}{2}\frac{-2yy'}{1-y^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln\left|1-y^2\right|$$

on obtient

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1-y^2\right| = \ln|t| + \frac{1}{2}t^2 + C$$

D'où

$$\left|1-y^2\right| = e^{-2\ln|t|-t^2-2C}$$

C'est-à-dire

$$y^2 - 1 = \pm e^{-2C}\ \frac{e^{-t^2}}{t^2}$$

En posant $K = \pm e^{-2C}$, on trouve

$$y^2 = 1 + K\frac{e^{-t^2}}{t^2}$$

qui donne l'expression de toutes les solutions (y compris les solutions constantes sur $\mathbb{R}$: $y = 1$ et $y = -1$).

(ii) Comme $\sigma \in \mathbb{R}$, on ne cherche que les solutions positives si $\sigma \geq 0$, et strictement positive si $\sigma < 0$ sur un intervalle que l'on détermine après résolution. Par ailleurs, le cas $\sigma = 1$ donne une équation linéaire qu'on ne considérera pas. On a

$$\frac{y'}{y^\sigma} = 1$$

Par intégration, on en déduit puisque $\sigma \neq 1$que

$$\frac{y^{1-\sigma}}{1-\sigma} = t + C,$$

D'où

$$y = \left[(1-\sigma)(t+C)\right]^{\frac{1}{1-\sigma}},$$

définie sur l'intervalle $]-C,+\infty[$ pour toute constante $C \in \mathbb{R}$ fixée si $\sigma \in]-\infty,1[$ et sur $]-\infty,-C[$ si $\sigma > 1$.

Remarque 1.2. *Supposons $\sigma \in]0,1[$. Considérons le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = y^\sigma \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

D'après les calculs précédents, $y = \left[(1-\sigma)(t+C)\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$. On a

$$y(0) = \left[(1-\sigma)C\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} = 0 \Longleftrightarrow C = 0$$

Par conséquent, la fonction $y(t) = \left[(1-\sigma)t\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$ est une solution non triviale définie sur $[0,+\infty[$. Il est, par ailleurs, évident que la fonction $y \equiv 0$ dans $[0,+\infty[$ est également solution. Pour $y_0 = 0$, le problème de Cauchy admet donc deux solutions distinctes définies dans le même intervalle. Cela est dû au fait que la fonction $f(y) = y^\sigma$ n'est pas Lipschitzienne au voisinage de $y_0 = 0$. $\square$

1.3. Équations homogènes. Ce sont les équations de la forme

$$y' = f(t, y)$$

où la fonction f est homogène:

$$f(\lambda t, \lambda y) = f(t, y) \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ce type d'équation se ramène à une équation à variable séparée en posant $y = tz$. En effet: $y' = z + tz'$ et en remplaçant dans l'équation différentielle

$$tz' = f(1, z) - z$$

Exemple 1.3. *Résoudre l'équation*

$$y' = \frac{y^4 - 2t^3 y}{2ty^3 - t^4}$$

(On donnera une relation implicite liant t à y.) □

2. Systèmes linéaires à coefficients constants

On considère le système différentiel

$$y' = Ay \tag{2.1}$$

où $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice à coefficients constants. On va montrer que dans ce cas, on peut toujours trouver un système fondamental de solutions.

2.1. Premier cas: A diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Théorème 2.1. *Si la matrice A est diagonalisable alors les fonctions suivantes forment un système fondamental de solutions:*

$$y_i(t) = e^{\lambda_i t} V_i, \ 1 \leq i \leq n$$

où $(V_1, \cdots, V_n)$ est une base de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ (les valeurs propres sont reproduites autant de fois que leur ordre de multiplicité).

Preuve (Indication). Il suffit de vérifier (exercice!) que si $AV = \lambda V$ alors $y(t) = e^{\lambda t} V$ est solution. Il faut ensuite établir que les fonctions $y_i, \ 1 \leq i \leq n$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$. □

Remarque 2.2. *Les valeurs propres de A ne sont pas forcément réelles. Mais si A est à coefficients réels, lorsque $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre, il en est de même de $\overline{\lambda}$. En conséquence, si V est vecteur propre de A associé à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ alors $\overline{V}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\overline{\lambda}$. Les fonctions $\frac{1}{2}\left(e^{\lambda t}V + e^{\overline{\lambda} t}\overline{V}\right)$ et $\frac{1}{2i}\left(e^{\lambda t}V - e^{\overline{\lambda} t}\overline{V}\right)$ sont des solutions à valeurs réelles qui peuvent remplacer les solutions $e^{\lambda t}V$ et $e^{\overline{\lambda} t}\overline{V}$. Le théorème précédent donne donc également un système fondamental de solutions à valeurs réelles si A est à coefficients réels.* □

Exemple 2.3. *Résoudre le système différentiel*

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = y \\ y' = -x - y \end{array} \right.$$

Dans ce cas, on a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et le système s'écrit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme $\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + \lambda + 1$. C'est-à-dire $\lambda_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Ce sont deux valeurs propres simples: A est diagonalisable (dans $\mathbb{C}$). Cherchons une base de vecteurs propres. On trouve

$$V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 - i\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 + i\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Suivant la remarque 2.2, on pose

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{1}{2}\left(e^{\lambda_1 t}V + e^{\lambda_2 t}V_2\right) = \mathrm{Re}\left(e^{\lambda_1 t}V\right) \\ y_2(t) &= \frac{1}{2i}\left(e^{\lambda_1 t}V - e^{\lambda_2 t}V_2\right) = \mathrm{Im}\left(e^{\lambda_1 t}V\right) \end{aligned}$$

Or:

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t}V &= e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}\right) \\ &= e^{-\frac{t}{2}}\left(\begin{pmatrix} 2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ -\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ -\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} 2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ -\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{pmatrix} \\ y_2(t) &= e^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} -2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ -\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La solution générale du système est alors

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\frac{t}{2}}\left(2\alpha\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - 2\beta\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ y(t) &= e^{-\frac{t}{2}}\left(-(\alpha + \beta\sqrt{3})\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - (\alpha\sqrt{3} + \beta)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{aligned}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont des constantes arbitraires. $\square$

2.2. Deuxième cas: A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Considérons à présent le cas où A n'est pas diagonalisable. On sait du cours d'algèbre linéaire que ceci équivaut à l'existence d'une valeur propre λ dont la multiplicité algébrique k n'est pas égale à la dimension $m \geq 1$ du sous-espace propre qui lui est associé (on a toujours $m \leq k$). Dans ce cas, les solutions indépendantes obtenues à l'aide d'une base du sous-espace propre de λ sont au nombre de $m < k$. En pratique, on cherche des solutions sous la forme

$$y(t) = e^{\lambda t}\sum_{i=0}^{k-1} t^i V_i.$$

où les $V_i \in \mathbb{C}^n$ sont des vecteurs à déterminer.

EXEMPLE 2.4. *Résoudre le système différentiel*

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y + z \\ z' = z \end{cases}$$

Dans cet exemple, on a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et elle admet une valeur propre triple: $\lambda = 1$. On a alors $I - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\ker(I - A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \end{pmatrix}^t \right\rangle$. Par conséquent, A n'est pas diagonalisable. On cherche donc les solutions sous la forme

$$y(t) = e^t \sum_{i=0}^{2} t^i V_i.$$

On a:

$$\begin{aligned} y'(t) &= e^t \left(\sum_{i=0}^{2} t^i V_i + \sum_{i=1}^{2} i t^{i-1} V_i \right) \\ &= e^t \left(V_2 t^2 + \sum_{i=0}^{1} \left(V_i + (i+1) V_{i+1} \right) t^i \right) \end{aligned}$$

Par ailleurs:

$$Ay(t) = e^t \sum_{i=0}^{2} t^i A V_i$$

On en déduit que y est solution si et seulement si

$$\begin{aligned} AV_2 &= V_2 \\ AV_i &= V_i + (i+1) V_{i+1},\ i = 0, 1 \end{aligned}$$

Il faut donc que $V_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2, & 0, & 0 \end{pmatrix}^t$.

Résolvons le système $AV_1 = V_1 + 2V_2$. Si on pose $V_1 = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \end{pmatrix}^t$, alors $\beta = \alpha_2$, $\gamma = 0$ et α quelconque. On en déduit que $V_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & 0 \end{pmatrix}^t$.

De la même manière, le système $AV_0 = V_0 + V_1$ admet pour solution $V_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0, & \alpha_1, & \alpha_2 \end{pmatrix}^t$. On alors

$$y(t) = e^t \begin{pmatrix} \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 t \\ \alpha_2 \end{pmatrix},$$

où α_0, α_1, α_2 sont des constatntes arbitraires. $\square$

2.3. Exponentielle d'une matrice. Pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, on pose

$$E(A) = \sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}$$

Il est clair que E est définie pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$ car $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ et ceci implique la convergence normale de la série. On appelle cette application exponentielle de la matrice A et on la note e^A. On peut établir:

Proposition 2.5. *(1) $e^{O_n} = Id$ où $O_n \in M_n(\mathbb{C})$ est la matrice nulle; $e^{Id} = eId$.*
(2) Si A et B sont deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$ qui commutent, alors $e^{A+B} = e^A e^B$. Par conséquent e^A est inversible et $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$.
(3) Si $A = P^{-1}BP$ alors $e^A = P^{-1}e^B P$
(4) Si $A = diag\,(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ alors $e^A = diag\left(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n}\right)$.
(5) L'application $t \longmapsto e^{(t-t_0)A}y_0$ est (l'unique) solution du problème

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Les points 3. et 4. de cette proposition fournissent un moyen de calculer l'exponentielle d'une matrice.

Exemple 2.6. *Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ses valeurs propres sont $\lambda^{\pm} = \pm i$ et les vecteurs propres associés sont $V^{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$. La matrice de passage $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ dont l'inverse est $P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ (elle est orthogonale) permet d'écrire*

$$\begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

On a donc:

$$\begin{aligned} e^A &= P\begin{pmatrix} e^i & \\ & e^{-i} \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 1 & -\sin 1 \\ \sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a, par le même calcul

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

On peut donc en déduire que la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

est donnée par

$$y(t) = e^{(t-t_0)A}y_0$$

□

Un autre moyen de calcul de e^A est le théorème de Cayley-Hamilton:

Théorème 2.7. *Si $p(\lambda) = \det\left(\lambda I_d - A\right)$ alors $p(A) = 0$*

Si $p(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k\lambda^k$ alors $A^n = -\sum_{k=1}^{n-1} a_k A^k$.

EXEMPLE 2.8. *Considérons la matrice nilpotente* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *On a* $A^3 = 0$. *Par conséquent* $e^A = I_d + A + \frac{1}{2!}A^2$

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et en particulier

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Équations différentielles linéaires à coefficients constants

3.1. Équations homogènes. On considère l'équation

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{3.1}$$

où a et b sont des constantes réelles ou complexes. Le système différentiel qui lui est associé est

$$Y' = AY \tag{3.2}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont solutions de l'équation caractéristique

$$\det(\lambda Id - A) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

Il y a alors deux cas à considérer:

- **Premier cas:** $\Delta = a^2 - 4b \neq 0$. On a alors deux valeurs propres distinctes $\lambda^{\pm}$ auxquelles correspondent les vecteurs propres $V^{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^{\pm} \end{pmatrix}$ et on sait que la solution générale du système (3.2) est

$$Y = C_1 e^{\lambda^+ t} V^+ + C_2 e^{\lambda^- t} V^-$$

À cette solution du système correspond la solution générale de l'équation (3.1)

$$y = C_1 e^{\lambda^+ t} + C_2 e^{\lambda^- t}$$

- **Deuxième cas:** $\Delta = a^2 - 4b = 0$. Dans ce cas il y a une racine double $\lambda = -\frac{a}{2b}$ et on peut vérifier que A n'est pas diagonalisable. On sait alors que la solution générale de (3.2) est de la forme

$$Y = (V_0 + V_1 t)\, e^{\lambda t}$$

et cela donne une solution générale de (3.1)

$$y = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t}$$

En résumé:

PROPOSITION 3.1. *On considère l'équation différentielle* $y'' + ay' + by = 0$ *à laquelle on associe le* ***polynôme caractéristique*** $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

Si le polynôme caractéristique admet deux racines distinctes $\lambda^{\pm}$ *alors la solution générale de l'équation différentielle est donnée par*

$$y = C_1 e^{\lambda^+ t} + C_2 e^{\lambda^- t}$$

et $\left(e^{\lambda^+ t}, e^{\lambda^- t}\right)$ *est une base de solutions.*

Si le polynôme caractéristique admet une racine double λ *alors la solution générale de l'équation différentielle est donnée par*

$$y = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}$$

et $\left(e^{\lambda t}, te^{\lambda t}\right)$ *est une base de solutions.*

3.2. Équations non homogènes. Pour l'équation non homogène

$$y'' + ay' + by = c(t) \tag{3.3}$$

ù a et b sont des constantes réelles ou complexes, la solution générale peut être trouvée en utilisant la méthide de variation des constantes déjà exposée. Il existe cependant des situations particulières où cette solution peut être trouvée plus rapidement.

PROPOSITION 3.2. *Soit* P *un polynôme de degré* p *et* $\alpha \in \mathbf{C}$. *Supposons que* $c(t) = e^{\alpha t}P(t)$. *Alors (3.3) admet une solution particulière de la forme* $e^{\alpha t}Q(t)$ *où* Q *est un polynôme de degré* p *si* α *n'est pas racine du polynôme caractéristique, et un polynôme de degré* $p + m$ *si* α *est racine de multiplicité* m *du polynôme caractéristique.*

La solution générale de l'équation sera donc la solution générale de l'équation homogène (que l'on sait trouver exsplicitement!) plus cette solution particulière.

Partie 2

Exercices

EXERCICE 3.3. *Intégrer les équations différentielles*

(1) $\left(1+t^2\right)y'+y=2t$
(2) $\left(t^3-1\right)y'+ty=t$
(3) $ty'+2y=\dfrac{t}{1+t^2}$. Existe-t-il une solution définie sur $\mathbb{R}$?

EXERCICE 3.4. *On considère l'équation*

$$t^2y''+aty'+by=0$$

où $a,b\in\mathbb{R}$*. On pose* $z(x)=y(e^x)$*. Montrer que* z *vérifie une équation différentielle du second ordre à coefficients constants que l'on déterminera. Calculer* z *puis* y *si* $a=b=1$*.*

EXERCICE 3.5. *Intégrer les équations différentielles*

$$\begin{aligned} y''-3y'+2y &= t^n e^t\cos t,\ (n\in\mathbb{N}) \\ y''-2ay'+a^2y &= te^t\cos mt,\ (m\in\mathbb{R}^*, a\in\mathbb{R}^*). \end{aligned}$$

EXERCICE 3.6. *Trouver les solutions réelles du système différentiel*

$$\left\{\begin{array}{l} x'=ay+\cos\alpha t \\ y'=-ax \end{array}\right.,\ a\in\mathbb{R}^*,\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

EXERCICE 3.7. *Intégrer les systèmes différentiels* $Y'=AY$ *dans les cas suivants*

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -10 & 6 & 8 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix};\ A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 3.8. ***Équation de Bernoulli.*** *Ce sont les équations de la forme*

$$y'=a(t)y^\alpha+b(t)y,\ \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\} \tag{3.4}$$

où $a,b\in C(I,\mathbb{R})$*,* I *étant un intervalle de* $\mathbb{R}$*.*

(1) *Supposons qu'il existe* y *solution positive de (3.4). On pose* $z=y^{1-\alpha}$*. Montrer que*

$$z'=(1-\alpha)b(t)\,z+(1-\alpha)a(t) \tag{3.5}$$

(2) *On prend* $I=]0,+\infty[$*,* $\alpha=2$*,* $a(t)=b(t)=-\dfrac{1}{t^2}$ *et on impose la condition* $y(t_0)=y_0\in\mathbb{R}^*$ *pour* $t_0\in I$*. Déterminer dans ce cas la solution maximale de (3.4) ainsi que, suivant les valeurs de* t_0 *et* y_0*, son intervalle de définition.*
(3) *On se place dans le cas où* y *est définie dans un voisinage (à droite) de 0. Montrer que* y *peut être prolongée en* 0 *et que, en ce point,* y *vérifie encore l'équation.*
(4) *Représenter graphiquement* y *suivant les valeurs de* t_0 *et* y_0*.*

EXERCICE 3.9. (1) *Soit* $(\alpha,\beta,y_0,y_1)\in\mathbb{R}^4$*. Pour tout entier* $n\geq 1$*, on note* f_n *la solution du problème de Cauchy*

$$\left\{\begin{array}{l} y''+2n\alpha y'+n\beta y=0 \\ y(0)=y_0, \\ y'(0)=y_1. \end{array}\right.$$

Étudier la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$*.*

(2) *On fixe $n \geq 1$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que, pour tout (y_0, y_1), $\lim_{t\to+\infty} f_n(t) = 0$*

Exercice 3.10. *On considère l'équation différentielle*

$$y''(t) + e^{it}y(t) = 0 \tag{3.6}$$

(1) *Soit f une solution de (3.6) définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est $2\pi-$périodique si et seulement si $f(0) = f(2\pi)$ et $f'(0) = f'(2\pi)$.*
(2) *On suppose qu'il existe f $2\pi-$périodique solution de (3.6).*
   (a) *Exprimer les coefficients de Fourier([1]) $c_n(f'')$ de f'' en fonction de ceux de f. En déduire, en utilisant (3.6), une relation de récurrence entre $c_n(f)$ et $c_{n-1}(f)$.*
   (b) *Calculer $c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*
   (c) *En déduire l'expression de f.*
   (d) *Montrer que la fonction f ainsi définie est bien une solution $2\pi-$périodique de (3.6).*

Exercice 3.11. *([2]) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le système différentiel*

$$\begin{cases} x'' = -n^2x \\ y'' = -n^2y + z \\ z'' = -n^2z \end{cases} \tag{3.7}$$

où x, y et z désignent des fonctions réelles de la variable réelle t.

(1) *Intégrer (3.7).*
(2) *On note (x_n, y_n, z_n) la solution de (3.7) vérifiant les conditions suivantes:*

$$\begin{aligned} y_n(0) &= \frac{k}{n},\ y_n'(0) = \mu + \frac{1}{n^2}, \\ z_n(0) &= \frac{2}{n},\ z_n'(0) = -2 \end{aligned}$$

k et μ étant deux constante réelles indépendantes de t et de n.
   (a) *Déterminer l'expression de y_n et de z_n.*
   (b) *Étudier suivant les valeurs de k et μ la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geq1} y_n(t)$ sur $[0, 2\pi]$.*
   (c) *Étudier suivant les valeurs de k et μ la convergence des séries numériques $\sum_{n\geq1} y_n(\pi)$ et $\sum_{n\geq1} y_n(2\pi)$.*

Exercice 3.12. *([3]) On considère le problème*

$$\begin{cases} -y'' + c^2y = f \\ y(0) = \lambda,\ y(1) = \mu \end{cases} \tag{3.8}$$

où $c > 0$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $f \in C([0,1], \mathbb{R})$.

(1) *Montrer que les fonctions $y_1(t) = \sinh(ct)$ et $y_2(t) = \sinh(c(1-t))$ forment une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $-y'' + c^2y = 0$.*

---

[1] Rappel: $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}dt$, $n \in \mathbb{Z}$.
[2] ENSI 1988 (extrait)
[3] CAPES 1996 (extrait)

(2) *Soit* $f \in C([0,1],\mathbb{R})$. *Déterminer en fonction de* y_1 *et* y_2 *la solution générale de l'équation* $-y'' + c^2 y = f$.

(3) *Montrer que (3.8) admet une solution unique qui se met sous la forme:*

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{\sinh(ct)}{\sinh(c)}\left[\mu + \frac{1}{c}\int_t^1 f(s)\ \sinh(c(1-s))\ ds\right] \\ &\quad + \frac{\sinh(c\,(1-t))}{\sinh(c)}\left[\lambda + \frac{1}{c}\int_0^t f(s)\ \sinh(cs)\ ds\right]. \end{aligned}$$

(4) *Montrer que pour tout* $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} y(t) &\leq \frac{\sinh(c(1-t)) + \sinh(ct)}{\sinh(c)} \max(\lambda,\mu) \\ &\quad + \left(1 - \frac{\sinh(c(1-t)) + \sinh(ct)}{\sinh(c)}\right)\frac{M}{c^2} \end{aligned}$$

où $M = \sup_{t\in[0,1]} f(t)$.

(5) *Exprimer* $\sinh(p) + \sinh(q)$ *en fonction de* $\sinh(\frac{p+q}{2})$ *et* $\cosh(\frac{p-q}{2})$ *ainsi que* $\sinh(2p)$ *en fonction de* $\sinh(p)$ *et* $\cosh(p)$.

(6) *Pour* $t \in [0,1]$, *montrer que*

$$0 \leq \frac{\sinh(c(1-t)) + \sinh(ct)}{\sinh(c)} \leq 1.$$

En déduire que pour tout $t \in [0,1]$:

$$y(t) \leq \ \max\left(\ \lambda,\ \mu, \sup_{t\in[0,1]}\left(\ \frac{f(t)}{c^2}\right)\right)$$

(7) *Pour une fonction* $h \in C([0,1],\mathbb{R})$, *comparer* $\inf_{t\in[0,1]}(-h(t))$ *avec* $\sup_{t\in[0,1]}(\ h(t))$.

En déduire une minoration de y.