# II. ÉNONCÉS ET ANALYSE DES ÉPREUVES ÉCRITES

## 1. Énoncé de la première épreuve

**Objectifs et notations**

Ce problème propose essentiellement l'étude de deux définitions classiques de la fonction exponentielle. La première partie établit des résultats fondamentaux qui seront utilisés dans les deux parties suivantes, mais à l'exception de la toute dernière question, la deuxième et la troisième partie sont totalement indépendantes.

Les candidats sont invités à lire soigneusement les en-têtes de chaque partie et à se conformer strictement aux exigences qui y sont formulées. Toute solution ne respectant pas ces exigences sera rejetée.

Certaines questions comportent des indications ou des suggestions de solutions. Les candidats peuvent bien sûr ne pas en tenir compte et proposer des solutions personnelles.

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\widehat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels, et $\mathbb{R}^{*+}$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

$\mathsf{E}$ désigne l'application usuelle *partie entière*.

$n$ désignant un entier naturel non nul, on appelle $n$-uplet de réels un élément du produit cartésien $\mathbb{R}^n$.

L'écriture $(u_n)_{n\geqslant 1}$ désigne une suite indexée par $\mathbb{N}^*$, de terme général $u_n$ et si $a$ désigne un réel positif, $(u_n)_{n>a}$ désigne une suite indexée à partir du premier entier strictement supérieur à $a$ et de terme général $u_n$. Dans certaines questions, l'indexation de la suite ne sera pas précisée et la notation $(u_n)$ utilisée.

## Partie A : Quelques résultats fondamentaux

*Le but de cette partie est essentiellement la démonstration d'inégalités qui seront utilisées dans les parties suivantes, au service de constructions de l'exponentielle. On s' interdit donc tout emploi de propriétés de la fonction exponentielle* exp*, de la fonction logarithme* ln *et des fonctions puissances dans le cas d'un exposant non rationnel.*

*Par contre, les propriétés des fonctions puissances à exposant rationnel sont supposées connues.*

### L'inégalité de Bernoulli

Il s'agit de l'inégalité suivante :

pour tout réel $a$ strictement supérieur à $-1$ et tout entier naturel $n$ appartenant à $\widehat{\mathbb{N}}$,
$(1+a)^n \geqslant 1 + n\,a$ avec égalité si et seulement si $a = 0$

Démontrer cette inégalité de deux manières différentes, par des méthodes élémentaires. On étudiera le cas d'égalité.

Suggestion : Une méthode possible est de poser $x = 1 + a$ et d'utiliser une factorisation.

### L'inégalité de Cauchy

Il s'agit de l'inégalité suivante :

pour tout entier naturel non nul $n$, pour tout $n$-uplet de réels strictement positifs $(x_1, \cdots, x_n)$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \geqslant \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{avec égalité si et seulement si } x_1 = \cdots = x_n$$

encore appelée inégalité de la moyenne arithmétique et de la moyenne géométrique.

**1.** Démontrer l'inégalité dans le cas particulier $n = 2$. On étudiera le cas d'égalité.

**2.** La première démonstration proposée du cas général est due à Cauchy lui-même.

**2.1.** Soit $\mathbb{A}$ une partie de $\mathbb{N}^*$ possédant les trois propriétés suivantes :

$$\begin{cases} i) & 1 \in \mathbb{A} \\ ii) & \forall n \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{A} \Rightarrow 2n \in \mathbb{A} \\ iii) & \forall n \in \mathbb{N}^*, n+1 \in \mathbb{A} \Rightarrow n \in \mathbb{A} \end{cases}$$

Démontrer que $\mathbb{A} = \mathbb{N}^*$

Indication : on pourra commencer par démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \in \mathbb{A}$.

**2.2.** En déduire l'inégalité de Cauchy et son cas d'égalité.

Indication : pour le passage de $n$ à $2n$, on pourra utiliser le cas $n = 2$ et pour le passage de $n+1$ à $n$, on pourra généraliser l'égalité : $\dfrac{a+b+\frac{a+b}{2}}{3} = \dfrac{a+b}{2}$.

**3.** Deuxième démonstration : soit $n$ un entier naturel non nul, et $(x_1, \cdots, x_n)$ un $n$-uplet de réels strictement positifs supposés pas tous égaux. On définit une application $\phi$ de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ en posant $\phi(t) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left[x_k + \frac{t}{n}\sum_{h=1}^{n}(x_h - x_k)\right]$.

**3.1.** Justifier que, pour tout $t \in [0,1]$, $\phi(t) > 0$.

**3.2.** Démontrer que $\phi$ est strictement croissante sur $[0,1]$.

Indication : Utiliser $\left(\dfrac{\phi'}{\phi}\right)'$.

**3.3.** En déduire l'inégalité de Cauchy et son cas d'égalité.

**4.** La troisième démonstration est plus élaborée (on signale aux candidats que sa recherche n'a aucune incidence sur la suite du problème). Elle repose sur les trois idées suivantes :

**4.1.** Si les $x_k$ ne sont pas tous égaux, alors soient $m = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} x_k$ et $M = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} x_k$. On a donc $m < M$ ; si dans le $n$-uplet $(x_1, \cdots, x_n)$ on remplace $m$ et $M$ par $\frac{m+M}{2}$, on obtient un $n$-uplet différent dont la moyenne arithmétique est la même, et la moyenne géométrique est strictement plus grande.

**4.2.** L'inégalité de Cauchy dans le cas général se déduit de l'inégalité obtenue dans le cas particulier où on suppose que les $x_k$ vérifient de plus l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$.

**4.3.** L'application $\psi \;:\; (x_1, \cdots, x_{n-1}) \mapsto \left(1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} x_k\right)\prod_{k=1}^{n-1} x_k$ possède un maximum sur l'ensemble $\Omega$ des $(n-1)$-uplets vérifiant $x_1 > 0, \cdots, x_{n-1} > 0, \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} x_k < 1$ atteint uniquement en $\left(\frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}\right)$.

Démontrer ces trois propriétés, sans faire appel au calcul différentiel à plusieurs variables.

Indication : pour la propriété 3), on pourra commencer par démontrer que le maximum de $\psi$ existe sur l'adhérence de $\Omega$.

**5.** En déduire l'inégalité de Cauchy et son cas d'égalité.

**Un calcul d'intégrale**

Soient $a$ et $b$ deux nombres réels tels que $a < b$. Soit $f$ une application de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$, continue par morceaux sur $[a,b]$. Soit $F$ une application de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$. On suppose que $f$ et $F$ satisfont à la condition suivante :

$$\text{pour tout } (x,y) \in [a,b]^2,\ F(y) - F(x) \geqslant (y-x)f(x)$$

**1.** Démontrer que $f$ est croissante sur $[a,b]$.

**2.** Démontrer que $F$ est convexe sur $[a,b]$.

**3.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que, si $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ est une subdivision de $[a,b]$, alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)f(a_k) \leqslant F(b) - F(a) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)f(a_{k+1})$$

**4.** En déduire que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

**Continuité des applications convexes**

Soit $f$ une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, convexe sur $\mathbb{R}$.

**1.** Démontrer l'inégalité dite *des pentes* : pour tous réels $a, b, c$, si $a < b < c$ alors :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

**2.** En déduire que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Indication : on pourra étudier les limites à droite et à gauche en $x_0$ arbitraire.

# Partie B : Étude de la fonction exponentielle

*Comme application des inégalités fondamentales de la partie A, on se propose de construire « à partir de rien » la fonction exponentielle.*
*On s'interdit donc,* dans cette partie, *tout emploi de propriétés de la fonction exponentielle* exp, *de la fonction logarithme* ln, *et par voie de conséquence des fonctions puissances dans le cas d'un exposant non rationnel, à moins qu'elles n'aient préalablement été redémontrées.*
*Cette partie fait un usage intensif des inégalités de la partie A, en particulier de l'inégalité de Bernoulli.*

**1.** Soit $x$ un nombre réel fixé ; on note, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$, et pour tout entier $n > |x|$, $v_n(x) = \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{-n}$.

**1.1.** Démontrer que la suite $\big(u_n(x)\big)_{n>|x|}$ est croissante.

Suggestion : Une méthode est de partir de l'égalité
$$1+\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{n}\right) = (n+1)\left[1+\frac{x}{n+1}\right]$$

**1.2.** En déduire que la suite $\big(v_n(x)\big)_{n>|x|}$ est décroissante.

**1.3.** Démontrer que les suites $\big(u_n(x)\big)_{n>|x|}$ et $\big(v_n(x)\big)_{n>|x|}$ sont convergentes et ont la même limite.

Indication : Démontrer que $v_n(x) - u_n(x) \leqslant v_n(x)\frac{x^2}{n}$.

**2.** On note $\boldsymbol{e}$ l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui, à un réel $x$, associe la limite commune des suites de la question précédente.

**2.1.** Soient $a, b$ deux réels, $a$ strictement inférieur à $b$.
Démontrer que la convergence de la suite d'applications $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est uniforme sur $[a, b]$. Que peut-on en déduire pour l'application $\boldsymbol{e}$ ?

**2.2.** Démontrer que, pour tout réel $x$, $1 + x \leqslant \boldsymbol{e}(x)$ et, pour tout réel $x$ strictement inférieur à 1, $\boldsymbol{e}(x) \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.

**2.3.**

**2.3.1.** Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{e}(x)$ est non nul et exprimer son inverse à l'aide de $\boldsymbol{e}$.

**2.3.2.** Soit $(\varepsilon_n)$ une suite de nombres réels convergente vers 0. Démontrer que la suite $\left(\left(1+\dfrac{\varepsilon_n}{n}\right)^n\right)$ converge vers 1.

**2.3.3.** En déduire que, pour tous $x, y$ réels, on a : $\boldsymbol{e}(x+y)\boldsymbol{e}(-x)\boldsymbol{e}(-y) = 1$.

**2.4.** Énumérer les propriétés *usuelles* de la fonction exponentielle et démontrer que l'application $\boldsymbol{e}$ possède bien chacune de ces propriétés. (Propriétés usuelles est à comprendre ici comme propriétés enseignées dans les classes de lycée).

**2.5.** On pose $\mathrm{e} = \boldsymbol{e}(1)$. Déterminer la valeur décimale approchée par défaut de e à $10^{-1}$ près. On se gardera bien sûr d'utiliser la touche d'exponentiation ^ ou $x^y$ des calculatrices car elle fait en général appel aux fonctions ln et exp. Toutes les explications utiles sur les moyens de calcul mis en oeuvre pour cette détermination seront fournies.

**2.6.** Expliquer pourquoi les suites $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)$ et $\left((1-\frac{1}{n})^{-n}\right)$ sont mal adaptées au calcul numérique de valeurs approchées de e.

**3.** On va voir que la définition précédente de $\boldsymbol{e}$ peut être étendue aux nombres complexes.

**3.1.** Soit $z$ un nombre complexe, et $n$ un entier naturel non nul. Démontrer que

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(n)\frac{z^k}{k!} \quad \text{où on a posé : } a_k(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \text{ ou } 1 \\ \displaystyle\prod_{h=1}^{k-1}\left(1-\frac{h}{n}\right) & \text{si } 1<k\leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**3.2.** En déduire que, pour tout complexe $z$, et tous entiers naturels non nuls $n, m$

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - \left(1+\frac{z}{m}\right)^m\right| \leqslant \left|\left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n - \left(1+\frac{|z|}{m}\right)^m\right|$$

Indication : on pourra commencer par observer qu'à $k$ fixé, la suite $n \mapsto a_k(n)$ est croissante.

**3.3.** En déduire, pour tout nombre complexe $z$, la convergence de la suite de nombres complexes $\left(\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right)_{n\geqslant 1}$.

## Partie C : L'exponentielle $\mathbb{R}$-solution de $y' = y, y(0) = 1$

*Dans cette partie, on propose à nouveau une étude ex nihilo de la fonction exponentielle ; on s'interdit donc encore tout usage de* exp, *de* ln, *et des fonctions puissances dans le cas d'un exposant non rationnel. Est aussi exclu tout emploi de la théorie des équations différentielles linéaires, a fortiori tout théorème d'existence et d'unicité de type Cauchy-Lipschitz ainsi que toute référence aux résultats de la partie précédente.*

*Par contre, on utilise librement les résultats de la première partie, en particulier ceux des questions III et IV.*

Soient $k$ et $a$ deux réels, $k$ non nul. Il s'agit de démontrer que le problème

$$\mathsf{PC}_{k,a} \quad \begin{cases} y' = k\,y \\ y(0) = a \end{cases}$$

possède une unique $\mathbb{R}$-solution, et que cette unique solution s'exprime simplement en fonction de la solution du problème $\mathsf{PC}_{1,1}$.

On appelle $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{k,a}$ toute application $\phi$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que, $\phi(0) = a$ et pour tout réel $x$, $\phi'(x) = k\,\phi(x)$.

**1.** Quelle relation existe-t-il entre les $\mathbb{R}$-solutions éventuelles du problème $\mathsf{PC}_{k,a}$ et celles du problème $\mathsf{PC}_{1,1}$ ?

**2.** Soit $a$ un réel quelconque et $\phi$ une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Démontrer l'équivalence des deux assertions suivantes :

i) $\phi$ est $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{1,a}$

ii) $\begin{cases} \phi \text{ est continue sur } \mathbb{R} \\ \text{pour tout réel } x \ \phi(x) = a + \displaystyle\int_0^x \phi(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$

**3.** On démontre dans cette question l'unicité pour le problème $\mathsf{PC}_{1,1}$.

**3.1.** Quel lien y-a-t-il entre l'unicité pour le problème $\mathsf{PC}_{1,1}$ et celle pour le problème $\mathsf{PC}_{1,0}$ ?

**3.2.** Soient $\phi$ une $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{1,0}$ et $T$ un réel fixé. Démontrer qu'il existe un réel $M$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x$ entre 0 et $T$, $|\phi(x)| \leqslant M\frac{|x|^n}{n!}$. Que peut-on en déduire pour $\phi$ ?

Indication : On pourra traiter séparément les cas $T$ positif et $T$ négatif.

**3.3.** En déduire l'unicité pour le problème $\mathsf{PC}_{1,1}$.

On va maintenant démontrer l'existence d'une $\mathbb{R}$-solution pour le problème $\mathsf{PC}_{1,1}$.
Dans toute la suite, $h$ désigne un réel strictement positif.

**4.** On définit une application $\psi_h$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par les deux conditions suivantes :
– pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\psi_h(n\,h) = (1+h)^n$ ;

– pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la restriction de $\psi_h$ à $[n\,h\,;(n+1)\,h]$ est affine.

**4.1.** Construire dans le même repère les représentations graphiques de $\psi_h$ sur $[-1,2]$ pour $h=1$ et $h=\frac{1}{2}$. On prendra 4 cm comme unité en abscisse et 2 cm en ordonnée.

**4.2.** Expliquer l'origine graphique de la définition de $\psi_h$ et son lien avec le problème $\mathsf{PC}_{1,1}$. On se contentera de fournir cette explication pour des réels positifs.

**5.** On obtient dans cette question quelques propriétés utiles de $\psi_h$ qui seront utilisées dans la suite.

**5.1.** Démontrer que, pour tout réel $x$, $\psi_h(x)=(1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right)}\left(1+x-h\ \mathsf{E}\left(\dfrac{x}{h}\right)\right)$.

**5.2.** Démontrer que, pour tout réel $x$, on a : $\psi_h(x)=1+\displaystyle\int_0^x (1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{t}{h}\right)}\ \mathrm{d}t$.

Indication : on pourra d'abord, pour $x$ et $y$ appartenant à l'intervalle $[n\,h,(n+1)\,h]$, exprimer $\psi_h(y)-\psi_h(x)$ à l'aide d'une intégrale.

**5.3.** Démontrer l'inégalité suivante :

$$\text{pour tout } (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \ \psi_h(y)-\psi_h(x)\geqslant (y-x)\big(1+h\big)^{\mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right)}$$

**5.4.** Donner une interprétation graphique de cette inégalité.

**5.5.** En déduire que $\psi_h$ est croissante et convexe sur $\mathbb{R}$.

**6.** On supppose dans cette question que $x$ est un réel strictement positif.
On va démontrer l'existence de la limite $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\psi_h(x)$.

Pour cela, on introduit les deux applications $\alpha_x$ et $\beta_x$ de $]0,x]$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$\alpha_x(h)=\psi_h(x)\ \text{et}\ \beta_x(h)=\psi_h\left[x(1+h)\right]$$

**6.1.** Construire, à l'aide de la calculatrice, un échantillon de représentations graphiques des applications $\alpha_x$ et $\beta_x$ (pour des $x$ fixés à choisir et $h$ variant entre 0 et $x$). Quelles conjectures peut-on faire sur les propriétés de ces applications ?

**6.2.** Déterminer le sens des variations de $\alpha_x$ sur $]0,x]$.

Indication : on pourra commencer par prouver que $\alpha_x$ est dérivable sur chaque $\left]\frac{x}{p+1},\frac{x}{p}\right[$, $p$ entier positif non nul, puis démontrer la continuité de $\alpha_x$ sur $]0,x]$.

De façon similaire, on démontre que $\beta_x$ est croissante sur $]0,x]$. Cette propriété sera admise pour la suite.

**6.3.** En déduire que, pour tout réel $h$ appartenant à $]0,x]$, on a $\alpha_x(h)\leqslant\beta_x(x)$.

**6.4.** Conclure.

On démontre par un procédé similaire l'existence de $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\psi_h(x)$ dans le cas où $x$ est strictement négatif.
Dans la suite, on admettra ce résultat. Le cas $x=0$ est banal.

**7.** On définit donc une application $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ en posant $\mathcal{E}(x)=\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\psi_h(x)$. Il reste à démontrer que $\mathcal{E}$ est $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{1,1}$.

**7.1.** Quelles sont les propriétés de $\psi_h$ qui sont conservées par le passage à la limite sur $h$ ?

**7.2.** Démontrer que, pour tous $x,y$ réels, on a $\mathcal{E}(y)-\mathcal{E}(x)\geqslant(y-x)\mathcal{E}(x)$.

**7.3.** En déduire l'existence d'une solution pour le problème $\mathsf{PC}_{1,1}$.

**8.** On revient au problème $\mathsf{PC}_{k,a}$.

**8.1.** Démontrer que le problème $\mathsf{PC}_{k,a}$ possède une unique $\mathbb{R}$-solution que l'on explicitera en fonction de $\mathcal{E}$.

**8.2.** En déduire que $\mathcal{E}$ satisfait à la propriété fonctionnelle fondamentale de la fonction exponentielle.

**9.** Dans cette question, on utilise les résultats de la partie B.
Démontrer que $\mathcal{E}=\boldsymbol{e}$.

## 2. Analyse de la première épreuve

# Épreuve d'analyse : rapport

## Commentaires généraux

Le sujet d'analyse de cette année était volontairement recentré sur des contenus très proches des programmes de lycée et, à dire vrai, l'essentiel de l'épreuve relève au plus du niveau bac + 1 : réels, suites et fonctions, inégalités, convergences et limites, équations différentielles. Il apparaît que ce recentrage n'a pas permis aux candidats de mieux exprimer leurs compétences mathématiques. Tout semble se passer comme si les performances des candidats étaient indépendantes du niveau des contenus.

Malgré la présence d'excellentes copies, cette observation inquiétante doit aussi être interprétée *in fine* comme le produit de la formation mathématique proposée au collège, au lycée, et à l'université. Un certain nombre de domaines dans lesquelles les faiblesses des candidats sont criantes (logique et inégalités pour n'en citer que deux) ont figuré naguère en bonne place au programme des lycées. L'élimination systématique des programmes du *difficile* ne semble vraiment pas une stratégie payante ; rien ne peut remplacer un apprentissage sur la durée.

Rappelons d'abord qu'une épreuve écrite doit permettre au jury de sélectionner les candidats possédant :

– Un minimum de connaissances *précises* et de savoir-faire bien au point : des définitions, des théorèmes, des méthodes ... mais pas seulement ; un travail de réflexion sur les énoncés et l'organisation globale de la discipline mathématique doit avoir été engagé.

  Ainsi, étudier les variations d'une fonction ne consiste pas à dessiner des flèches qui montent et qui descendent dans un tableau. Ce serait réduire à son pur aspect procédural un savoir très savant – les théorèmes de Lagrange – qui, au contraire mérite d'être *montré* ; ce qui est acceptable pour un bachelier ne l'est pas forcément à bac + 4 !

– La capacité de rédiger des démonstrations intelligibles et conformes aux exigences de la communauté scientifique actuelle, ce qui suppose d'avoir un peu réfléchi aux différentes fonctions d'une démonstration, au fonctionnement du langage mathématique, aux divers statuts des lettres que ce langage manipule, au rôle de la logique des propositions et à celui des quantificateurs.

  Ainsi, il n'est pas acceptable à ce niveau de confondre les objets $u_n$, $u_n(x)$, et $(u_n(x))_{n>|x|}$ et plus généralement de manipuler des lettres formellement sans avoir le souci constant de gérer *dans le déroulement du raisonnement* le champ d'icelles.

  Ainsi, il n'est pas suffisant de produire des démonstrations logiquement correctes ; les productions des candidats abondent de ratiocinations et de « démonstrations par équivalence en partant de la conclusion » se concluant par un triomphant « toujours vrai » marques d'un manque de recul certain sur leurs pratiques.

– Un minimum d'honnêteté intellectuelle (ou peut-être tout simplement de clairvoyance) pour éviter de sortir d'une impasse par un « donc » péremptoire qui ne saurait abuser le jury. Clairvoyance et réflexion sur la discipline encore, pour juger de ce qui mérite de figurer dans une rédaction : à quoi rime de produire un demi-page de déductions collégiennes laborieuses pour obtenir la minoration $1 - \frac{n-1}{n}\,t > 0$ ($n \geq 1$ et $t \in [0,1]$) et par contre, deux lignes plus loin, de ne pas dire un mot sur la propriété non triviale (dans le contexte de l'énoncé) permettant de passer de $a < b^n$ à $a^{\frac{1}{n}} < b$ ?

– Une certaine maturité sur les concepts qu'ils seront amener à enseigner, en particulier —au coeur de l'analyse— l'infini et son intervention dans les limites, la dérivation, l'intégration. Certes un candidat au capes n'est pas encore un enseignant chevronné mais ce ne doit plus être un élève focalisé sur le *comment*.

  Par exemple, il n'est pas acceptable de voir manipuler des guirlandes de $\lim\limits_{n\to\infty}$ sans que ne soit jamais soulevée la question de l'existence, par exemple il est assez inquiétant (en mathématiques standard) de voir des candidats écrire $f'(x) = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ en précisant « avec $y$ assez proche de $x$ », ou encore $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1}$... « pour $n$ assez grand ».

– Éventuellement un peu d'inventivité ou d'imagination face à des questions modestement ouvertes. Cela passe, entre autres choses, par une certaine aptitude pour l'une des grandes affaires de l'enseignement des mathématiques : la *reconnaissance de formes*. Cette qualité, comme les autres, peut s'acquérir.

Et il faut bien sûr ajouter — comme si ce n'était pas évident a priori — l'impératif d'avoir fait sienne l'exigence de qualité des productions fournies, en particulier le respect de l'orthographe. Le jury n'a pas vocation à rechercher les points sous les ratures.

L'écrit du capes externe est donc une épreuve globalement très exigeante ; il ne suffit pas d'avoir suivi paisiblement un cursus universitaire (ou autre) pour l'affronter valablement ; elle doit être préparée minutieusement et sur le long terme. Le travail méthodique sur les épreuves antérieures (et les rapports du jury...) est un indispensable début. Ceci permettra au moins d'acquérir une certaine habilité à gérer correctement son temps.

Les deux constructions de l'exponentielle proposées ont été étoffées un peu artificiellement pour mieux couvrir le programme d'analyse. Pour l'approche par les suites, seule l'inégalité de Bernoulli est utile et permet de prouver l'adjacence des suites et d'obtenir *toutes* les propriétés de l'exponentielle. Pour l'approche par les équations différentielles et la méthode d'Euler, la difficulté est d'obtenir la continuité de la limite. Pour éviter de faire appel à des résultats d'analyse trop savants (théorèmes de Dini, ou suite de fonctions lipschitziennes), on a choisi de passer par la convexité.

Pour terminer ces préliminaires, signalons que, malgré les avertissements des en-têtes de chaque partie, quelques candidats n'ont pas résisté à l'appel du logarithme ou de l'exponentielle...

# Partie A : Quelques résultats fondamentaux

Cette première partie, seule partie abordée par tous les candidats, n'a été que très rarement traitée correctement de façon substantielle. Il est très significatif qu'un nombre infime de candidats obtient la totalité des points à la première question.

Deux références majeures sur les inégalités :
– G. HARDY, J.E. LITTLEWOOD, G. POLYA, *Inequalities*, Cambridge University Press ; rééd 1991.
– E.F. BECKENBACH, R. BELLMAN, *Inequalities*, Springer-Verlag, 1983.
Pour un usage fin d'inégalités à la Bernoulli (et pour se préparer de la plus utile des façons), on pourra consulter :
C.HOUZEL, *Analyse mathématique*, Belin, 1996.

### L'inégalité de Bernoulli

On peut proposer, pour gérer systématiquement le cas d'égalité, de démontrer que, si $a = 0$ il y a égalité et sinon, il y a inégalité stricte. Il est aussi possible de gérer le cas d'égalité dans chaque démonstration particulière. Par contre, se contenter de vérifier que si $a = 0$, il y a égalité n'est pas suffisant.

Comme idées de démonstrations élémentaires, on pouvait proposer :

**1.** En posant $x = 1 + a$, on a $x > 0$ et (via une factorisation à laquelle Bernoulli a aussi laissé son nom) :

$$(1+a)^n - 1 - n\,a = x^n - 1 - n\,(x-1) = (x-1)\left[\sum_{k=0}^{n-1} x^k - n\right]$$

On peut conclure par une disjonction de cas sur $x$ ou poursuivre la factorisation pour obtenir :

$$x^n - 1 - n\,(x-1) = (x-1)\left[\sum_{k=1}^{n-1}(x^k - 1)\right] = (x-1)^2\left[\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{h=0}^{k-1} x^h\right]...$$

ce qui permettrait d'améliorer l'inégalité de Bernoulli.

De nombreux candidats semblent ignorer qu'après $a^2 - b^2$, il y a aussi $a^n - b^n$.

**2.** Une récurrence simple sur $n \in \widehat{\mathbb{N}}$ sur l'assertion « pour tout $a \in ]-1, 0[\cup]0, +\infty[$, $(1+a)^n > 1 + n\,a$ ».

Solution la plus souvent proposée, (mais pas systématiquement). La bourde classique dans l'hérédité : « supposons que, pour tout $n \in \widehat{N}$... » semble en recul, mais a été remplacée par « soit $\mathcal{P}(n)$ l'assertion : " $\forall a > -1, \forall n \in \widehat{\mathbb{N}}$, $(1+a)^n \geq 1 + n\,a$ " ».

La récurrence est un des raisonnements mathématiques majeurs ; il importe de montrer au jury qu'on le maitrise ; avant d'invoquer une « récurrence évidente », la première rédaction se doit d'être complète et irréprochable. Si on regarde à la loupe les productions des candidats, c'est loin d'être le cas.

**3.** Une étude des variations de l'application $a \mapsto (1+a)^n - 1 - n\,a$ sur $]-1, +\infty[$ via le signe de la dérivée.

La majorité des candidats rédige ceci comme un élève de lycée : on calcule la dérivée, on cherche ses zéros, on en déduit le tableau des variations sur lequel on lit la réponse. Certains vont même jusqu'à calculer la dérivée seconde pour mieux s'immerger dans l'automathisme. Comme expérience cruciale, le jury conseille aux futurs candidats de s'exercer à rédiger le *détail* des définitions et des théorèmes utiles dans cette solution, en particulier pour gérer correctement le cas d'égalité.

Moins élémentaire, on peut encore citer :

**4.** L'inégalité des accroissements finis appliquée à $t \mapsto t^n$ entre 1 et $x$ ($x > 0$).

**5.** La stricte convexité de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}^*$ qui permet de situer le graphe par rapport à la tangente en 1.

**6.** La formule du binôme de Newton fournit une solution partielle pour le cas $a > 0$.

De nombreux candidats ont suivi cette piste mais pour parvenir à leur fin, certains sont prêts à toutes les compromissions avec la rigueur à grand renfort de « il est bien évident que ». Une issue possible pour le cas négatif était d'abandonner Newton et de distinguer $a \in ]-1, -\frac{1}{2}]$ et $a \in ]-\frac{1}{2}, 1[$.
Peut-on rappeler aussi aux candidats que les tentatives de démontrer des inégalités globales à partir d'un développement limité sont le plus souvent vouées à l'échec.

Et certainement bien d'autres, dont une via l'inégalité de Cauchy (pour le fun...).

### L'inégalité de Cauchy

Dans cette partie le jury a observé une inconcevable négligence dans la manipulation des inégalités ; trop peu de candidats distinguent inégalités strictes et inégalités larges : $\geqslant$ et $>$ sont parfois employés de façon interchangeable d'une ligne à l'autre. On pourrait suggérer aux candidats de commencer par lire $> 0$ « strictement positif » et de se souvenir que 0 est à la fois positif et négatif. Le même commentaire vaut d'ailleurs pour le sens des variations.

Pour étudier le cas d'égalité, on peut procéder comme pour Bernoulli : si les $x_k$ sont tous égaux, alors il y a égalité des moyennes, sinon il y a inégalité stricte. Mais vérifier l'égalité des moyennes en cas d'égalité des $x_k$ ne suffit pas.

**1.** Repose sur le signe strict de $(a-b)^2$.
Un clin d'oeil géométrique : on peut aussi observer que dans un triangle rectangle $ABC$, si $H$ est le pied de la hauteur issue de $A$ et si $BH = a$, $CH = b$ (et il est toujours possible de construire un tel triangle) alors, les relations métriques dans le triangle rectangle permettent de comparer médiane et hauteur.

**2.** **2.1.** L'indication de l'énoncé relève d'une récurrence simple. Puis en réécrivant la propriété iii) sous la forme : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \notin \mathbb{A} \Rightarrow n+1 \notin \mathbb{A}$, on peut procéder par l'absurde pour montrer que $\mathbb{A} = \mathbb{N}$.

On pouvait aussi prouver directement que si $n \in \mathbb{A}$ alors $n+1 \in \mathbb{A}$.

D'abord un nombre considérable de candidats confondent nombres pairs et puissance de 2 : évidement ça simplifie le travail. Si certains ont bien compris le couplage des deux propriétés, peu sont capables de l'expliquer convenablement par exemple en français – qui est un langage tout-à-fait admissible pour une démonstration, les candidats sont invités à lire Cauchy – et presqu'aucun de formaliser sa pensée, par exemple par une récurrence descendante finie. D'assez nombreux candidats pensent pouvoir conclure avec l'étonnant argument suivant : $\mathbb{A} \subset \mathbb{N}$ et $\mathbb{A}$ équipotent à $\mathbb{N}$ impliquerait $\mathbb{A} = \mathbb{N}$.

**2.2.** En introduisant $\mathbb{A} = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid \forall (x_1, \cdots, x_n) \in \left(\mathbb{R}^{*+}\right)^n, \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \geqslant \left[\prod\limits_{k=1}^{n} x_k\right]^{\frac{1}{n}} \quad \text{avec égalité ssi } x_1 = \cdots = x_n \right\}$, il s'agit de montrer que $\mathbb{A}$ vérifie les propriétés de la question précédente.

Le passage de $n$ à $2n$ est assez souvent bien traité, par contre la généralisation de l'égalité fournie comme indication a posé des problèmes : avec $x_{n+1} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k > 0$ ; on a $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} x_k = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = x_{n+1}$.
Le cas d'égalité n'est presque jamais traité ; il suffisait pourtant de remarquer que si les $x_k$ ne sont pas tous égaux, il y a inégalité stricte, et une seule inégalité stricte dans une chaîne d'inégalités suffit.

**3.** Si les $x_k$ sont tous égaux, on a égalité de la moyenne arithmétique et de la moyenne géométrique. On suppose donc les $x_k$ non tous égaux (ce qui implique que $n \geq 2$).

**3.1.** Si de nombreux candidats écrivent bien — parfois très laborieusement — $x_k + \dfrac{t}{n}\displaystyle\sum_{h=1}^{n}(x_h - x_k) = (1-t)x_k + t\,A_n$ où $A_n$ est la moyenne arithmétique des $x_h$, pratiquement aucun n'y voit un barycentre. La majorité démontrent d'ailleurs seulement l'inégalité large et conclut sans même s'en apercevoir à l'inégalité stricte.

**3.2.** On peut utiliser l'égalité fonctionnelle suivante, généralisation d'une formule bien connue, ou conséquence de la multilinéarité du produit :

$$\text{si } w = \prod_{k=1}^{n} u_k \text{ alors } w' = \sum_{h=1}^{n} u'_h \left\{ \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{n} u_k \right\} \text{ donc } \frac{w'}{w} = \sum_{h=1}^{n} \frac{u'_h}{u_h}$$

d'où : $\dfrac{\phi'(t)}{\phi(t)}$ puis $\left[\dfrac{\phi'}{\phi}\right]'(t)$ en évidence négatif sur l'*intervalle* $[0,1]$ .

Par contre le signe strict nécessite un argument supplémentaire rarement fourni ! Et le retour à $\phi$ est souvent marqué du sceau de l'à-peu-près ; on devine les choses plus qu'on ne les déduit ; il suffisait de remarquer que

$$\frac{\phi'(1)}{\phi(1)} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{h=1}^{n}(x_h - x_k)}{\sum_{h=1}^{n} x_h} = 0$$

**3.3.** Résulte de l'inégalité *stricte* $\phi(0) < \phi(1)$.

**4.** L'idée de la démonstration suivante serait due à Mac-Laurin.

**4.1.** L'invariance de la moyenne arithmétique résulte de l'associativité de la barycentration ; la croissance (stricte) de la moyenne géométrique résulte d'une question antérieure.

Certains candidats font observer avec raison que la substitution ne doit être faite que pour un couple de valeurs.

**4.2.** Très classiquement dans des problèmes homogènes, il suffit de poser : $y_k = \dfrac{x_k}{\sum\limits_{h=1}^{n} x_h} > 0$.

**4.3.** Cette question était assez délicate ; on introduit $K = \left\{(x_1, \cdots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid x_1 \geqslant 0, \cdots, x_{n-1} \geqslant 0, \sum_{k=0}^{n-1} x_k \leqslant 1\right\}$. (Il n'est pas utile de démontrer que $K$ est l'adhérence de $\Omega$). Puis on démontre que $K$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^{n-1}$. La continuité de l'application $\psi \;:\; (x_1, \cdots, x_{n-1}) \mapsto \left[1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} x_k\right] \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} x_k$ fournit l'existence d'un maximum (global) sur le compact $K$. L'inégalité $\psi(\frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}) > 0$ montre que ce maximum est atteint dans $\Omega$.
Soit ensuite $(a_1, \cdots, a_{n-1})$ un élément de $\Omega$ en lequel le maximum est atteint ; on démontre alors que les $a_k$ sont tous égaux. On s'intéresse ensuite à la fonction $\psi(a, \cdots, a) = \big(1 - (n-1)\,a\big)\,a^{n-1}$ sur l'intervalle $[0,1]$ pour en déduire que $a = \frac{1}{n}$.
Il est d'ailleurs possible de démontrer que sur $]0,1[$ $\phi(x) = \big(1-(n-1)x\big)x^{n-1} \leqslant \frac{1}{n^n}$ avec égalité si et seulement si $x = \frac{1}{n}$ par voie purement algébrique, par exemple en utilisant l'inégalité de Bernoulli.

Question abordée par peu de candidats, mais qui, le plus souvent, avaient visiblement de la ressource. On ne peut que regretter ici encore une certaine négligence qui conduit à des démonstrations bâclées.

**5.** Déduction presque jamais traitée.

N.B. En réalité, on peut déduire Cauchy directement de Bernoulli.

### Un calcul d'intégrale

**1.** Sans problème.

Bien traitée.

**2.** Avec une définition usuelle de la convexité : soient $x, y \in [a, b]$, $\lambda \in [0, 1]$ et $z = (1-\lambda)\,x + \lambda\,y$. On a : $F(x) - F(z) \geqslant (x-z)f(z)$ et $F(y) - F(z) \geqslant (y-z)f(z)$ ; en multipliant la première inégalité par $(1-\lambda)$ et la seconde par $\lambda$ et en ajoutant, il vient ...

À l'évidence cette question a posé problème. De nombreux candidats pensent qu'une application est convexe si et seulement si sa dérivée première est croissante (resp. sa dérivée seconde est positive) et bien sûr réussissent à le prouver. La valeur absolue n'est plus une fonction usuelle. Signalons un théorème étonnant : une fonction majorant une fonction croissante est elle-même croissante. Il y a d'ailleurs des interférences fréquentes croissant/positif.

**3.** Presque pas de problème.

**4.** Puisque $f$ est continue par morceaux donc intégrable sur $[a, b]$, $\displaystyle\int_a^b f$ *existe* et comme $f$ est croissante sur $[a, b]$, par définition de l'intégrale d'une part : $\displaystyle\int_a^b f = \sup_\sigma \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\, f(a_k) \right\} \leqslant F(b) - F(a)$

et d'autre part : $\displaystyle\int_a^b f = \inf_\sigma \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\, f(a_{k+1}) \right\} \geqslant F(b) - F(a)$ (sup et inf pris sur l'ensemble des subdivisions du segment $[a, b]$).

On pouvait aussi, plus élémentairement, choisir une subdivision régulière de $[a, b]$ $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$ qui fait des sommes encadrantes des sommes de Riemann ; $f$ étant continue par morceaux sur $[a, b]$, on sait que ces dernières *convergent* vers $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, ce qui permet de conclure via le théorème de passage à la limite dans les inégalités.

Remarque : l'hypothèse « $f$ continue par morceaux » n'a été ajoutée dans l'énoncé que pour rester dans le cadre du programme du capes. Cette approche a été empruntée à Mézard et Delorme dans leur *Cours de mathématiques supérieures* paru chez PUF, ouvrage par ailleurs d'une remarquable richesse.

Les productions des candidats (assez nombreuses au demeurant sur cette question) révèlent le très grand flou qui règne dans les esprits sur le concept d'intégrale, ce qui doit interroger la filière mathématique à la fois sur l'efficacité de la formation académique des étudiants et sur la faisabilité d'un enseignement de l'intégration dans la filière S tel que voulu par les programmes.
Beaucoup conclut en faisant « tendre $n$ vers l'infini » ce qui en soi n'a guère de sens ; et pour faire bonne mesure dans l'approximation, on fait appel au théorème d'encadrement. Pour d'autres, c'est l'invocation de « la méthode des rectangles » point, qui permet de conclure. Pour certains même, les sommes sont égales à l'aire sous la courbe ce qui explique tout.

### Continuité des applications convexes

**1.** Classique.

Le recours – étonnamment fréquent et admis bien sûr – à la « croissance des pentes » bien que tout-à-fait correct à condition de préciser sur quoi, sonne comme une escroquerie.

**2.** Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ ; on introduit $b < x_0$ et $c > x_0$ quelconques ; soit enfin $h > 0$ tel que $x_0 \pm h \in [b, c]$ ; d'après l'inégalité des pentes, on a : $h\dfrac{f(x_0) - f(b)}{x_0 - b} \leqslant f(x_0) - f(x_0 - h) \leqslant h\dfrac{f(c) - f(x_0)}{c - x_0}$ et on peut conclure pour la limite à gauche.

Cette question a été l'occasion pour ceux qui s'y sont risqué, de bien des passages à la limite fantaisistes, y compris des tentatives de prouver que $f$ est dérivable ; faut-il rappeler que les passages à la limite présupposent l'existence des limites ?

## Partie B : Étude de la fonction exponentielle

Le traitement de cette partie a tourné au fiasco ; il s'agit pourtant pour l'essentiel de contenus qu'un document officiel récent envisage de pouvoir faire traiter aux (disons à certains) élèves de terminale.
Le plus grave est la grande confusion qui semble régner dans les esprits sur des questions voisines mais distinctes ; cette partie utilisait de façon répétée trois théorèmes élémentaires mais fondamentaux sur les suites :
– le théorème de passage à la limite dans les inégalités larges ;

– le théorème des trois suites ;
– le théorème d'unicité de la limite.

Les deux premiers sont assez proches dans leur formulation mais fondamentalement distincts ; le jury attend bien sûr des candidats qu'ils prouvent leur capacité à les distinguer.

**1. 1.1.** L'idée est de démontrer qu'à $x$ réel fixé, les deux suites $\left(\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\right)_{n>|x|}$ et $\left(\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{-n}\right)_{n>|x|}$ sont adjacentes.

L'indication de l'énoncé invitait à appliquer l'inégalité de Cauchy au $(n+1)$-uplet $\left((1+\frac{x}{n}),\cdots,(1+\frac{x}{n}),1\right)$. On pouvait aussi appliquer l'inégalité de Bernoulli (en remarquant que la suite est à termes strictement positifs), mais il faut un peu tâtonner avant de trouver la forme adéquate :

$$\frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}=\left(1+\tfrac{x}{n}\right)\left[\frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)}{\left(1+\frac{x}{n}\right)}\right]^{n+1}\geqslant\left(1+\tfrac{x}{n}\right)\left[1+(n+1)\cdots\right]$$

Moins de 1% des candidats réussit à exploiter l'indication de l'énoncé ; beaucoup n'essayent même pas de l'utiliser et se noient dans des calculs sans direction, d'autres confondent la croissance de la suite $\left(u_n(x)\right)_{n>|x|}$ (à $x$ fixé) et celle de l'application $x\mapsto u_n(x)$ (à $n$ fixé). On voit même des dérivations par rapport à $n$.

**1.2.** Il suffit d'observer que, pour $n>|x|$, $u_n(-x)>0$ et $v_n(x)=\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{-n}=\dfrac{1}{u_n(-x)}$.

Question assez souvent traitée ; mais que penser de l'argument très répandu : $v_n(x)=u_{-n}(x)$ donc ... ?

**1.3.** Enfin, toujours à $x$ fixé et à $n>|x|$, $v_n(x)-u_n(x)=v_n(x)\left\{1-\left[1-\dfrac{x^2}{n^2}\right]^n\right\}$ ce qui montre que, d'une part $v_n(x)-u_n(x)\geqslant 0$ et d'autre part, en utilisant l'inégalité de Bernoulli, que $v_n(x)-u_n(x)\leqslant v_n(x)\dfrac{x^2}{n}\leqslant x^2v_{n_0}(x)\dfrac{1}{n}$ où $n_0=\mathsf{E}(|x|)+1$. Donc $v_n(x)-u_n(x)=O(\frac{1}{n})$, qui converge vers 0. D'où l'adjacence.

Beaucoup trop de négligences dans cette question ; les champs pour $x$ et $n$ ne sont guère gérés, une simple majoration ne permet pas en général de conclure pour la convergence d'une suite, le fait que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ convergence vers 0, ne suffit pas pour qu'il en soit de même pour le produit $\left(v_n(x)\frac{1}{n}\right)$, la définition des suites adjacentes n'est pas le théorème des suites adjacentes, le théorème des trois suites n'est pas le théorème de passage à la limite dans les inégalités, etc.

Certains candidats « démontrent » que les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ convergent vers 1 avec un argument qu'on devine aisément.

**2. 2.1.** Soit $x\in[a,b]$ ; posons $c=\max\{|a|,|b|\}$, $d=\min\{|a|,|b|\}$ et $n_0=\mathsf{E}(c)+1$ ; d'après le théorème des suites adjacentes et la majoration précédente, on a, pour $n\geqslant n_0$ :

$$0\leqslant \boldsymbol{e}(x)-u_n(x)\leqslant v_n(x)-u_n(x)\leqslant v_n(x)\tfrac{x^2}{n}\leqslant v_{n_0}(x)x^2\tfrac{1}{n}\leqslant c^2v_{n_0}(d)\tfrac{1}{n}$$

C'est une majoration uniforme (en $x$) qui conduit à la convergence uniforme de $(u_n)_{n>c}$ vers $\boldsymbol{e}$ sur $[a,b]$, et donc aussi celle de $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Question très rarement bien traitée ; au contraire, le jury a pu constater la sérieuse incompréhension des candidats sur cette notion de la convergence uniforme, en particulier le rôle d'une majoration uniforme en $x$, mais pas n'importe laquelle § Ainsi certains candidats concluent à partir de $|u_n(x)|\leqslant\left(1+\frac{b}{n}\right)^n$ (qui n'est d'ailleurs pas correcte). D'autres laissent au jury le soin de deviner qu'ils ont pensé à un théorème de Dini, concevable mais à l'évidence hors de propos.

Remarque : la continuité de $\boldsymbol{e}$ peut se démontrer de façon élémentaire sans référence à la convergence uniforme (confère question 2.4.).

**2.2.** Soit $x\in\mathbb{R}$ fixé, et soit $n_0>|x|$ (par exemple $\mathsf{E}(|x|)+1$). Comme les suites sont adjacentes, on a $u_{n_0}(x)\leqslant\boldsymbol{e}(x)\leqslant v_{n_0}(x)$. On peut alors conclure avec Bernoulli.

Le jury a systématiquement sanctionné les candidats encadrant $\boldsymbol{e}(x)$ par $u_1(x)$ et $v_1(x)$. Ici, la non-gestion des variables $n$ et $x$ ne pardonnait pas.

Ces inégalités jouent un rôle fondamentale dans les propriétés de l'exponentielle. Par symétrie elles donneront ensuite les non moins utiles $\frac{x-1}{x}\leqslant\ln(x)\leqslant x-1$.

**2.3.**

**2.3.1.** Soit $x\in\mathbb{R}$ et $n>|x|$ ; on a $u_n(x)v_n(-x)=1$ ; donc par passage à la limite...

Il suffisait de bien connaître la *définition* de l'inverse d'un nombre.
Beaucoup de candidats exploitent aussi l'encadrement de la question précédente.

**2.3.2.** $\left(\dfrac{\varepsilon_n}{n}\right)$ converge vers 0, donc $\left|\frac{\varepsilon_n}{n}\right|<1$ à partir d'un certain rang ; donc l'inégalité de Bernoulli fournit la minoration, à partir de ce rang : $\left(1+\dfrac{\varepsilon_n}{n}\right)^n\geqslant 1+\varepsilon_n$. On a par ailleurs la majoration, à partir du même rang : $\left(1+\frac{\varepsilon_n}{n}\right)^n\leqslant\boldsymbol{e}(\varepsilon_n)\leqslant\frac{1}{1-\varepsilon_n}$.

Les candidats savants pouvaient aussi utiliser la convergence uniforme.

Beaucoup de négligences à signaler sur la gestion de la variable $n$ ; l'encadrement de $\left(1+\frac{\varepsilon_n}{n}\right)^n$ n'est pas valide pour tout $n$. Via un découplage stupéfiant à ce niveau, des candidats écrivent $\lim_{n\to\infty}(1+\varepsilon_n/n)^n = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{e}(\varepsilon_n) = \boldsymbol{e}(0)$ (ce qui est d'ailleurs parfaitement exact !).

Signalons aussi la prégnance chez certains du célèbre théorème-élève $1+\frac{\varepsilon}{n} \sim 1$ donc $\left(1+\frac{\varepsilon_n}{n}\right)^n \sim 1^n = 1$.

**2.3.3.** On gère les variables : soient $x, y$ réels, et $n > \max\{|x|, |y|, |x+y|\}$ ; puis on observe que $u_n(x+y)u_n(-x)u_n(-y)$ est de la forme $\left(1+\frac{\varepsilon_n}{n}\right)^n$ ; l'unicité de la limite fournit l'égalité demandée.

**2.4.** Il y a de nombreuses façons de procéder – selon l'ordre d'énonciation des propriétés – en particulier, on peut très classiquement s'appuyer sur la relation fonctionnelle de l'exponentielle, dont on sait que couplée à la continuité en 0, elle est caractéristique.

De façon très surprenante, le jury constate que cette question n'a quasiment pas été traitée ; l'exponentielle est pourtant au programme de toutes les sections ! Le plus souvent les candidats se contentent d'énumérer deux ou trois propriétés de l'exponentielle (typiquement $\boldsymbol{e}(0) = 1$), sans même toujours reprendre celles figurant dans l'énoncé, ni même le titre de la partie C. 5% des points du barème ont été attribué à cette question.

**2.5.** La situation est presqu'idéale pour du calcul numérique ; on dispose d'un encadrement du réel à approcher par deux suites « calculables ». On peut imaginer au moins deux types d'algorithme : une boucle tant que ou une boucle pour.

On commence par gérer l'erreur de méthode : les inégalités obtenues à la question 2.1 donnent avec $x = 1$ : $0 \leqslant \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\frac{1}{n} < \frac{3}{n}$ si $n \geqslant 10$ puisque $(1-1/10)^{-10} = \frac{10000000000}{3486784401} < 3$ ; donc, pour que $\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{2}10^{-1}$, il suffit que $\frac{3}{n} \leqslant \frac{1}{2}10^{-1}$ ; $n = 60$ convient. $\left(1+\frac{1}{60}\right)^{60}$ est donc une valeur approchée (rationnelle) par défaut de e à $\frac{1}{2}10^{-1}$ près.

On s'occupe ensuite de l'erreur de troncature : les rationnels ne sont pas (en général) représentés exactement en machine. Faisons l'hypothèse que la précision de calcul des calculatrices est suffisamment grande pour « faire confiance » au moins aux deux premières décimales des flottants affichés (en les supposant non nulles, sinon il faudrait regarder la suivante).

Pour les calculs visés, cette hypothèse est raisonnable, car l'erreur relative sur un calcul de puissance entière $x^n$ par multiplications successives (pour un $x$ non représentable exactement en machine) peut être estimée par : $\delta(x^n) \approx n\delta(x)$ ; avec $n = 60$, $x = \frac{61}{60} \approx 1$ et comme $\delta(x) < \epsilon$ (*epsilon machine*, au moins $10^{-10}$ sur les matériels courants), on a raisonnablement $\delta(x^n) < 10^{-8}$ et donc certainement $\Delta(x^n) < 10^{-7}$. (Pour être plus précis, il faudrait connaître l'arithmétique du calculateur utilisé.)

Pour calculer $\left(\frac{61}{60}\right)^{60}$ sans exponentiation machine, on peut utiliser un algorithme itératif, facile à programmer sur les matériels courants :

```
a ← 61/60
p ← 1
pour k de 1 à 60
faire
        p ← p × a
finfaire
```

On obtient alors $\left(1+\frac{1}{60}\right)^{60} = 2,69...$

On en déduit que $2,69 < \mathrm{e} < 2,75$ ce qui ne permet pas de trancher entre $2,6$ et $2,7$ pour la valeur décimale approchée par défaut à $10^{-1}$ près. Il faut donc aller plus loin dans la suite $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ pour conclure.

La minoration $\left(1+\frac{1}{74}\right)^{74} < \mathrm{e}$ donne : $2,70 < \mathrm{e}$ qui permet d'en déduire que la valeur décimale approchée par défaut à $10^{-1}$ près de e est $2,7$.

Plus de 20 ans après l'introduction des calculatrices dans l'enseignement, les questions de calcul numérique sont toujours boudées par les candidats. Les rares qui s'y risquent ne fournissent guère d'explications satisfaisantes – mais savent-ils quoi dire ? – et certaines réponses sont même fausses !

Sur ce point aussi, la filière, en particulier sa composante de l'enseignement supérieur, doit s'interroger sur son incapacité à former des utilisateurs un tant soit peu avertis de ce qui ne semble plus être qu'un objet de consommation.

**2.6.** L'encadrement $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$ est mal adapté au calcul numérique car, d'une part sa vitesse de convergence vers 0 est trop faible. De façon précise, il est classique de montrer qu'elle est en $\frac{1}{n}$ (on dispose de toutes les propriétés de l'exponentielle pour ce faire !). C'est ce qu'on appelle des convergences logarithmiques.

D'autre part, le calcul de $x^n$ avec $n$ grand et $x$ proche de 1 est numériquement très instable ; si $x$ est trop proche de 1, il sera arrondi à 1,0 (phénomène d'absorption) et le résultat du calcul sera 1,0.

La question était très ouverte ce qui ne facilitait pas le travail des candidats ; il va de soi que le jury attendait une analyse plus poussée qu'un minuscule « parce que la convergence est trop lente » .

**3. 3.1.** Il importe de noter que la somme est une somme finie. Il n'y a donc pas de problème de convergence.

Question fermée simple, reposant sur la formule du binôme ; il suffit d'être méticuleux. Question bien traitée quand elle est abordée.

**3.2.** Question assez simple, l'énoncé donne l'information utile qui se prouve sans problème.

**3.3.** Les questions précédentes permettent de montrer que la suite $\left(\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy ; $\mathbb{C}$ étant complet, elle est convergente.

## Partie C : L'exponentielle $\mathbb{R}$-solution de $y' = y, y(0) = 1$

**1.** Si $a \neq 0$ alors $\phi$ et $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{1,1}$ si et seulement si $\psi = x \mapsto a\phi(k\,x)$ est $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{k,a}$.

Si $a = 0$, $\phi$ est $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{1,0}$ si et seulement si $\psi = x \mapsto \phi(k\,x)$ est solution du problème $\mathsf{PC}_{k,0}$.

Ceci résulte simplement du théorème de dérivation d'une application composée et de la relation valable pour tout $x$, $\psi'(x) = k\,a\phi'(k\,x)$

Cette question a donné lieu aux réponses les plus fantaisistes, grossièrement fausses. Un candidat propose même $\psi(x) = k\,\phi(x)$ pour tout $x$ *et* $\psi(0) = a\,\phi(0)$ ; peu de candidats semble avoir eu l'idée de résoudre les deux problèmes (avec des bonnes exponentielles) pour au moins conjecturer une relation correcte. Et ceux qui l'ont fait, ont écrit $\mathrm{e}^{k\,x} = \left(\mathrm{e}^{x}\right)^{k}$ ce qui introduit un exposant réel...

Notons que, pour des physiciens, la question est banale car, d'une part ils écriraient sans état d'âme $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = k\,y$ équivaut à $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,(k\,x)} = y$, ce qui, couplé au principe de superposition des solutions dans un problème linéaire, fournit le résultat. D'autre part, bien plus fondamentalement, l'adimensionnalisation du problème $\mathsf{PC}_{k,a}$ conduit au problème $\mathsf{PC}_{1,1}$ (en posant $x^* = k\,x$ et $y^* = \frac{y}{a}$ relations obtenues par une analyse dimensionnelle de l'équation).

**2.** Question très simple dont l'objectif est de transformer un problème de Cauchy en une équation intégrale.

Question assez souvent traitée, pas toujours avec la rigueur souhaitable. La solution utilisant le théorème fondamental du calcul intégral, le jury souhaitait le voir évoqué. Par ailleurs les $\phi(x)'$ pullulent et l'erreur bien classique $\left(\int_0^x \phi(t)\,\mathrm{d}\,t\right)' = \phi(x) - \phi(0)$ (sic) toujours présente. On trouve aussi quelques « continue implique dérivable ».

**3. 3.1.** La clef est la linéarité des problèmes $\mathsf{PC}$ ; si $\phi_1$ et $\phi_2$ sont $\mathbb{R}$-solutions du problème $\mathsf{PC}_{1,1}$, alors $\phi_1 - \phi_2$ est $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{1,0}$. Par ailleurs, la fonction nulle est $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{1,0}$. L'unicité pour le problème $\mathsf{PC}_{1,0}$ implique donc l'unicité pour le problème $\mathsf{PC}_{1,1}$. (La réciproque est vraie, mais pas utile pour la suite.)

L'examen des productions des candidats montre qu'à l'évidence ils n'ont pas conscience du rôle de la linéarité dans les questions d'unicité ; rappelons que pour le problème linéaire général, disons $f(x) = b$ avec des notations générales évidentes, $\ker f = \{0\}$ est une condition nécessaire et suffisante d'injectivité de $f$ laquelle a à voir avec le « au plus une solution ».

**3.2.** Démonstration classique d'unicité pour une équation différentielle linéaire. Une récurrence simple permet d'obtenir la majoration et un passage à la limite la nullité de $\phi$ entre 0 et $T$.

Question très rarement abordée. Quelques candidats s'en sortent en faisant appel à l'inégalité de Taylor-Lagrange, ce qui est tout-à-fait correct mais un peu hors de propos.

**3.3.** La question précédente prouve l'unicité pour le problème $\mathsf{PC}_{1,0}$ ; celle pour le problème $\mathsf{PC}_{1,1}$ en découle.

**4. 4.1.** Le jury rappelle que le tracé d'une représentation graphique est une activité mathématique comme une autre et que cette question n'était pas sous-notée, à condition d'y apporter un minimum de soin.
Signalons quand même de nombreuses erreurs de tracé !

Toute la suite du problème n'est abordée qu'exceptionnellement, le plus souvent de façon très superficielle, les candidats n'ayant guère eu le temps de rentrer dans la partie. Nous donnons quelques éléments de correction. Quand bien même l'ensemble a une certaine épaisseur, chaque question reste élémentaire.

**4.2.** L'application $\psi_h$ est obtenue en appliquant la méthode d'approximation d'Euler pour une équation différentielle avec un pas $h$, la différence étant ici qu'on travaille sur $\mathbb{R}$ tout entier et pas seulement sur un segment.

**5.** L'énoncé sous-entend que les conditions données sont cohérentes et définissent $\psi_h$ de façon unique.

**5.1.** On peut bien sûr se contenter de vérifier que l'application $x \mapsto (1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right)}\left(1 + x - h\,\mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right)\right)$ satisfait aux deux conditions de définition de $\psi_h$.

Il est plus élégant et efficace de paramétrer les réels de l'intervalle $[n\,h, (n+1)\,h]$ par $x = (1-\alpha)\,n\,h + \alpha(n+1)\,h$ ce qui donne aussitôt $\psi_h(x) = (1-\alpha)\psi_h(n\,h) + \alpha\psi_h((n+1)\,h)$ et permet de conclure.

**5.2.** La notion de primitive généralisée d'une application continue par morceaux n'est pas au programme, mais peut être avantageusement utilisée ici.

Soit $n \in \mathbb{Z}$ ; sur l'intervalle fermé $[n\,h; (n+1)\,h]$, $\psi_h$ est affine donc sa restriction y est dérivable et, par définition même, de dérivée constante...puis la relation de Chasles permet de calculer $\displaystyle\int_0^x (1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{t}{h}\right)}\,\mathrm{d}\,t$

**5.3.** Inégalités de la moyenne appliquées à $\displaystyle\int_x^y (1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{t}{h}\right)}\,\mathrm{d}\,t$.

**5.4.** Pour $x < y$, on a $\dfrac{\psi_h(y) - \psi_h(x)}{y - x} \geqslant (1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right)}$ ; le membre de gauche est le coefficient directeur de la sécante joignant les points $(x, \psi_h(x))$ et $(y, \psi_h(y))$ et le membre de droite, la pente du segment (de droite si ambiguïté) de la représentation graphique de $\psi_h$ passant par $(x, \psi_h(x))$. L'inégalité est graphiquement équivalente à la convexité.

**5.5.** La croissante résulte de la positivité de $t \mapsto (1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{t}{h}\right)}$. La convexité est une conséquence de l'inégalité du 5.3 et de la sous-partie III de la première partie.

**6.** **6.1.** On conjecture que chaque $\alpha_x$ (resp. $\beta_x$) est (strictement) décroissante (resp. croissante), continue, dérivable par morceaux, et bornée, sur $]0,x]$, en particulier au voisinage de 0, et enfin que $\alpha_x$ et $\beta_x$ possède une limite commune en 0.

**6.2.** Soit $p \in \mathbb{N}^*$ ; sur l'intervalle *ouvert* $\left]\frac{x}{p+1}, \frac{x}{p}\right[$, $\alpha_x(h) = (1+h)^p(1+x-h\,p)$ donc $\alpha_x$ y est dérivable et $\alpha_x'(h) = (1+h)^{p-1}p\,(x-h\,(p+1)) < 0$ donc $\alpha_x$ est (strictement) décroissante sur cet intervalle. (La stricte décroissance n'étant pas utile pour la suite.)

Ensuite, la même expression de $\alpha_x$ donne $\lim\limits_{\substack{h\to\frac{x}{p}\\ <}} \alpha_x(h) = \left(1+\frac{x}{p}\right)^p$ et $\lim\limits_{\substack{h\to\frac{x}{p+1}\\ >}} \alpha_x(h) = \left(1+\frac{x}{p+1}\right)^{p+1}$ et donc en décalant, $\lim\limits_{\substack{h\to\frac{x}{p}\\ >}} \alpha_x(h) = \left(1+\frac{x}{p}\right)^p$. Ainsi $\lim\limits_{\substack{h\to\frac{x}{p}\\ <}} \alpha_x(h) = \lim\limits_{\substack{h\to\frac{x}{p}\\ >}} \alpha_x(h) = \alpha_x\left(\frac{x}{p}\right)$ d'où la continuité de $\alpha_x$ en chaque $\frac{x}{p}$ et finalement sur $]0,x]$.

Par passage à la limite dans les inégalités, on en déduit la décroissance de $\alpha_x$ sur chaque *segment* $[\frac{x}{p}, \frac{x}{p+1}]$, puis $\alpha_x$ étant décroissante par morceaux *fermés* sur $]0,x]$, on en déduit la décroissance sur $\bigcup\limits_{p\geqslant 1}[\frac{x}{p+1}, \frac{x}{p}] = ]0,x]$.

**6.3.** Soit $h \in ]0,x]$ ; on a, par croissance de $\psi_h$ et croissance de $\beta_x$ : $\alpha_x(h) = \psi_h(x) \leqslant \psi_h(x(1+h)) = \beta_x(h) \leqslant \beta_x(x)$. Donc $\alpha_x$ est majorée sur $]0,x]$.

**6.4.** Le théorème de la limite monotone bornée permet alors de conclure à l'existence d'une limite finie pour $\alpha_x$ en 0, qui est aussi $\lim\limits_{h\to 0}\psi_h(x)$. En évidence, $\lim\limits_{h\to 0}\psi_h(0) = 1$.

**7.** **7.1.** Le théorème de passage à la limite dans les inégalités fournit immédiatement la conservation de la positivité, de la croissance et de la convexité de $\psi_h$. De plus, d'après la sous-partie IV de la première partie, on en déduit que $\mathcal{E}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

**7.2.** Cela résulte ici encore d'un passage à la limite dans les inégalités obtenues à la question 5.3.
En effet, pour $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, on a : $\frac{x}{h} - \mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right) \in [0,1[$ ; donc d'une part on a :
$1 + x - h\,\mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right) = 1 + h\left(\frac{x}{h} - \mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right)\right) \geqslant 1 > 0$ et d'autre part, $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}}\left(1 + x - h\,\mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right)\right) = 1$ donc

$(1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right)} = \dfrac{\psi_h(x)}{\left(1+x-h\,\mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right)\right)}$ a aussi pour limite $\mathcal{E}(x)$ lorsque $h$ tend vers 0.

**7.3.** Les résultats de la sous-partie III de la première partie permette d'en déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{E}(x) - \mathcal{E}(0) = \displaystyle\int_0^x \mathcal{E}(t)\,\mathrm{d}t$ donc $\mathcal{E}(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x \mathcal{E}(t)\,\mathrm{d}t$. Comme $\mathcal{E}$ est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit d'après la question 2 de cette partie que $\mathcal{E}$ est $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{1,1}$.

**8.** **8.1.** D'après la question 1 de cette partie, l'unique $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{k,a}$ est : $\phi(x) = a\mathcal{E}(k\,x)$. (formule qui vaut même si $a = 0$).

**8.2.** Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé ; le problème $\mathsf{PC}_{1,\mathcal{E}(y)}$ possède une unique $\mathbb{R}$-solution qui est, d'après la question précédente, $\phi(x) = \mathcal{E}(y)\mathcal{E}(x)$. Or il est clair que $\psi(x) = \mathcal{E}(y+x)$ est aussi $\mathbb{R}$-solution de ce problème ; l'unicité permet d'en déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{E}(y+x) = \mathcal{E}(y)\mathcal{E}(x)$.

**9.** D'après la partie II, $\boldsymbol{e}$ est $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{1,1}$ ; l'unicité fournit ici encore $\boldsymbol{e} = \mathcal{E}$.

# 3. Énoncé de la deuxième épreuve

## Rappels et notations

• $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices à coefficients réels et à trois lignes et trois colonnes. Si $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $A\,[i,j]$ le coefficient de $A$ dont l'indice de ligne est égal à $i$ et l'indice de colonne est égal à $j$.

• $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ est le sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices dont les coefficients sont entiers.

**1. Dans tout le problème, E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3**. Le produit scalaire de deux vecteurs $u$ et $v$ est noté $\langle u, v\rangle$. La norme euclidienne d'un vecteur $v$ est notée $\|v\|$. La distance associée à cette norme est notée $d$. Si $u$ et $v$ sont deux vecteurs de $\mathbf{E}$, on a donc $d(u,v) = \|u - v\|$.

$\mathbf{E}$ est rapporté à une base $\mathcal{B}$ orthonormée directe.

On note $\mathbf{S}^2$ la sphère unité de $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{S}^2 = \{v \in \mathbf{E} \mid \ \|v\| = 1\}$$

On note $\mathrm{Id}_\mathbf{E}$ l'application identique de $\mathbf{E}$.

$\mathcal{O}(\mathbf{E})$ est le groupe des automorphismes orthogonaux de $\mathbf{E}$.

Si $f$ et $g$ sont deux éléments de $\mathcal{O}(\mathbf{E})$, on note $f\,g$ au lieu de $f \circ g$ l'automorphisme composé de $g$ et de $f$.

On rappelle que :
- Le déterminant d'un automorphisme orthogonal est égal à 1 ou à $-1$.
- Les rotations vectorielles (ou plus simplement les rotations) sont les éléments de $\mathcal{O}(\mathbf{E})$ dont le déterminant est égal à 1. Leur ensemble noté $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}(\mathbf{E})$ .
- $D$ étant une droite vectorielle de $\mathbf{E}$, on appelle demi-tour d'axe $D$ la symétrie orthogonale par rapport à $D$ ; il s'agit d'une rotation vectorielle.
- $\mathcal{SO}(3)$ est le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont le déterminant est égal à 1. Rappelons que l'application qui à toute rotation de $\mathbf{E}$ associe la matrice qui la représente dans $\mathcal{B}$ est un isomorphisme de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ sur $\mathcal{SO}(3)$.

**2. Ensembles dénombrables**

On rappelle que :
- Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- L'image d'un ensemble dénombrable par une application est encore un ensemble dénombrable.
- Tout sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

**3. Partitions**

Soit $A$ un ensemble non vide. On rappelle que la famille $(A_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles de $A$ constitue une partition de $A$ si :

*(i) Aucun des sous-ensembles $A_i$ n'est vide.*

*(ii)* $\bigcup_{i\in I} A_i = A$.

*(iii)* $\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.

**4. Groupes, sous-groupe engendré par une partie**

- Etant donné un groupe $(\mathbf{G}, .)$ dont la loi est notée multiplicativement, $g$ étant un élément de $\mathbf{G}$, l'application de $\mathbf{G}$ dans $\mathbf{G}$ : $h \to g\,h$ est bijective. Si $\mathbf{H}$ est un sous-ensemble de $\mathbf{G}$, on note

$$g\,\mathbf{H} = \{g\,h \mid h \in \mathbf{H}\}$$

- Etant donné un groupe $(\mathbf{G}, .)$ dont la loi est notée multiplicativement et $S$ un sous-ensemble de $\mathbf{G}$, on appelle sous-groupe engendré par $S$ le plus petit sous-groupe de $\mathbf{G}$ contenant $S$; c'est l'intersection de tous les sous-groupes de $\mathbf{G}$ qui contiennent $S$.

**5. Déplacements**

On note $\mathrm{Dep}\,(\mathbf{E})$ l'ensemble des déplacements de $\mathbf{E}$ lorsque ce dernier est muni de sa sructure canonique d'espace affine euclidien sur lui même. On rappelle que $(\mathrm{Dep}\,(\mathbf{E})\,, \circ)$ est un groupe.

## Préliminaires

Soit $\Omega$ un ensemble quelconque non vide. $A$ et $B$ étant deux sous-ensembles de $\Omega$, on note $A \setminus B$ l'intersection de $A$ et du complémentaire de $B$ ; en d'autres termes :

$$A \setminus B = \{x \in X \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

$\mathfrak{S}\,(\Omega)$ désigne le groupe des bijections de $\Omega$ sur lui-même.

Soit $f$ appartenant à $\mathfrak{S}\,(\Omega)$ ; si $A$ est un sous-ensemble de $\Omega$, on note $f(A)$ le sous-ensemble de $\Omega$ dont les éléments sont les images des éléments de $A$ :

$$f(A) = \{y \in \Omega \,|\, \exists x \in A,\ f(x) = y\}$$

*On rappelle que :*
*(i) $f\,(A) = \emptyset$ si et seulement si $A = \emptyset$.*
*(ii) Si $A$ et $B$ sont deux sous-ensembles de $X$, on a :*

$$A \subset B \Leftrightarrow f\,(A) \subset f\,(B)\,.$$

*(iii) Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de sous-ensembles de $X$ indexée par l'ensemble $I$, on a :*

$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f\,(A_i)$$

*(iv) Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de sous-ensembles de $X$ indexée par l'ensemble $I$, on a :*

$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f\,(A_i)$$

*(v) Si $A$ et $B$ sont deux sous-ensembles de $X$, on a :*

$$f\,(A\setminus B) = f\,(A) \setminus f\,(B)$$

**1.** Démontrer les propriétés *(iv)* et *(v)*.

**2.** Prouver ensuite que $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de $\Omega$ si et seulement si $(f(A_i))_{i\in I}$ est une partition de $\Omega$

## Partie I : quelques propriétés des rotations de l espace $\mathbf{E}$

**1.** Soient $\rho_1$ et $\rho_2$ deux rotations vectorielles de $\mathbf{E}$.

**a)** On suppose que $\rho_1$ et $\rho_2$ ont le même axe.
Prouver que $\rho_2\,\rho_1 = \rho_1\,\rho_2$.

**b)** On suppose que $\rho_1$ et $\rho_2$ sont deux demi-tours d'axes respectifs $D_1$ et $D_2$ orthogonaux. Prouver que $\rho_2\,\rho_1 = \rho_1\,\rho_2$ et déterminer cette rotation.

**2.** Réciproque :

Soit $\rho$ une rotation vectorielle distincte de $\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$, d'axe $D = \mathbb{R}\omega$ où $||\omega|| = 1$.

**a)** Soit $\Delta$ une droite vectorielle distincte de $D$ et telle que $\rho(\Delta) = \Delta$. Prouver que $D$ et $\Delta$ sont orthogonales et que $\rho$ est un demi-tour.

**b)** Soit $\rho_1$ et $\rho_2$ deux rotations vectorielles distinctes de $\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$ dont les axes respectifs $D_1$ et $D_2$ sont distincts. Montrer que si $\rho_2\,\rho_1 = \rho_1\,\rho_2$, alors $D_1$ est une droite invariante par $\rho_2$. En déduire que $\rho_1$ et $\rho_2$ sont deux demi-tours dont les axes sont orthogonaux.

**c)** Conclure en donnant une condition nécessaire et suffisante pour que deux éléments $\rho_1$, $\rho_2$ de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ commutent (c'est-à-dire $\rho_2\,\rho_1 = \rho_1\,\rho_2$).

*Soient $\rho_1$ et $\rho_2$ deux rotations vectorielles de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{G}$ le sous-groupe de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ engendré par $\rho_1$ et $\rho_2$.*

**3.** On suppose que $\rho_1$ et $\rho_2$ sont les rotations d'angles respectifs $\alpha_1, \alpha_2$ autour de la droite $D$ dirigée et orientée par le vecteur unitaire $\omega$.

**a)** On note $\mathbf{H} = \{\rho_1^{n_1}\,\rho_2^{n_2} \mid (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2\}$. Montrer que $\mathbf{H}$ est un sous-groupe de $\mathcal{SO}\,(\mathbf{E})$ et que $\mathbf{H} = \mathbf{G}$.

**b)** On suppose de plus que l'égalité

$$x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\pi = 0$$

où $x, y, z$ sont des entiers relatifs n'est possible que si $x = y = z = 0$. Démontrer que pour tout $r \in \mathbf{G}$, il existe un *unique* couple $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $r = \rho_1^{n_1}\,\rho_2^{n_2}$.

**4.** On suppose que $\rho_1$ et $\rho_2$ sont deux demi-tours dont les axes sont orthogonaux . Démontrer que $\mathbf{G}$ contient exactement quatre éléments que l'on explicitera. On donnera la table du groupe de $\mathbf{G}$.

**5.** On suppose que $\rho_1$ et $\rho_2$ ne commutent pas. On note $\mathbf{H}$ le sous-ensemble de $\mathcal{SO}\,(\mathbf{E})$ formé des éléments de la forme $s_1^{a_1} s_2^{a_2} \cdots s_n^{a_n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$, $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \{\rho_1, \rho_2\}^n$, $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$.

**a)** Démontrer que $\mathbf{H}$ est un sous-groupe de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ et que $\mathbf{H} = \mathbf{G}$.

**b)** Soit $g \in \mathbf{G} - \{\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}\}$. Démontrer qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$, une famille $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ appartenant à $\{\rho_1, \rho_2\}^n$, une famille $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ appartenant à $\mathbb{Z}^{*n}$ tels que :

$$g = s_1^{a_1} s_2^{a_2} \cdots s_n^{a_n} \quad \text{et} \quad \forall\, i \in [1, n[,\ s_i \neq s_{i+1} \tag{1}$$

*Cette décomposition n'est en général pas unique (si $\rho_1$ est un demi-tour, alors $\rho_1 = \rho_1^3$). Dans la partie suivante on construit un exemple où cette fois la décomposition sera unique.*

## Partie II : Étude d'un sous-groupe de $\mathcal{SO}(3)$

*On pose dans ce qui suit $\alpha = \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$.*

*$I_3, R$ et $T$ sont les matrices de $\mathcal{SO}(3)$ définies par :*

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

*$\rho$ et $\tau$ sont les rotations de* $\mathbf{E}$ de *matrices respectives $R, T$ dans la base $\mathcal{B}$.*

*$\mathbb{G}$ est le sous-groupe de $\mathcal{SO}(3)$ engendré par $\{R, T\}$.* $\mathbf{G}$ *est le sous-groupe de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ engendré par $\{\rho, \tau\}$. Il est manifestement isomorphe à $\mathbb{G}$.*

*On rappelle que la relation $p \equiv q \bmod 5$ où $p$ et $q$ sont des entiers relatifs, signifie que $5$ divise $q - p$.*

**1.** Pour tout entier *relatif* $n$, on pose

$$a_n = 5^{|n|}\cos(n\alpha) \text{ et } b_n = 5^{|n|}\sin(n\alpha)$$

**a)** Factoriser $\cos(n+1)\alpha + \cos(n-1)\alpha$. En déduire que pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1 :

$$a_{n+1} = 6a_n - 25a_{n-1}$$

**b)** Prouver que pour tout entier $n$ supérieur ou égal à zéro :

$$b_{n+1} = 3b_n + 4a_n$$

**c)** Prouver que pour tout entier *relatif* $n$, $a_n$ et $b_n$ sont des entiers relatifs.

**d)** Montrer que si $n$ est différent de zéro, alors $a_n \equiv 3 \bmod 5$.

**e)** Montrer que si $n$ est un entier strictement positif, alors $b_n \equiv 4 \bmod 5$.

Montrer que si $n$ est un entier strictement négatif, alors $b_n \equiv 1 \bmod 5$.

**2.** *On note $\equiv$ la relation définie sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ par $M \equiv M'$ si et seulement si pour tout couple $(i, j)$* de $[1, 3]^2$, on a :

$$M[i, j] \equiv M'[i, j] \bmod 5$$

*On vérifie aisément qu'il s'agit là d'une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$. On ne demande pas de démontrer ce résultat.*

**a)** Démontrer que cette relation est compatible avec le produit matriciel, c'est-à-dire si $A, B, C, D$ sont des éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ tels que $A \equiv B$ et $C \equiv D$, alors $AC \equiv BD$.

**b)** Démontrer que pour tout entier $k$, $5^{|k|}R^k$ et $5^{|k|}T^k$ appartiennent à $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ et que

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*,\ 5^{|k|}R^k \equiv \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon_k & 0 \\ -\varepsilon_k & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad 5^{|k|}T^k \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \varepsilon_k \\ 0 & -\varepsilon_k & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{où } \varepsilon_k = 1 \text{ si } k > 0 \text{ et } \varepsilon_k = -1 \text{ si } k < 0$$

Existe-t-il un entier relatif $k$ différent de 0, tel que $R^k = I_3$ ou $T^k = I_3$?

**c)** Démontrer que

$$\forall (m, n) \in \mathbb{Z}^{*2},\ 5^{|m|+|n|}T^m R^n \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\varepsilon_n & 4 & 0 \\ \varepsilon_n\varepsilon_m & 2\varepsilon_m & 0 \end{bmatrix}$$

**d)** Soient $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ appartenant à $\mathbb{Z}^{*\,n}$ et $\beta$ appartenant à $\mathbb{Z}^*$. On pose $q = \sum_{i=1}^{n} (|a_i| + |b_i|)$. Démontrer que

$$5^q T^{a_1} R^{b_1} \cdots T^{a_n} R^{b_n} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{bmatrix}$$

où $a, b, c, d$ sont des entiers relatifs qui ne sont pas congrus à 0 modulo 5.

**e)** En déduire que

$$T^{a_1} R^{b_1} \cdots T^{a_n} R^{b_n} \neq I_3 \tag{2}$$

$$T^{a_1} R^{b_1} \cdots T^{a_n} R^{b_n} T^{\beta} \neq I_3 \tag{3}$$

**3.** Soit $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ appartenant à $\mathbb{Z}^{*\,n}$ et $\beta$ appartenant à $\mathbb{Z}^*$. Déduire des égalités précédentes que

$$R^{a_1} T^{b_1} \cdots R^{a_n} T^{b_n} \neq I_3 \tag{4}$$

$$R^{a_1} T^{b_1} \cdots R^{a_n} T^{b_n} R^{\beta} \neq I_3 \tag{5}$$

**4.** Conclure que pour tout $g$ appartenant à $\mathbf{G} \setminus \{\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}\}$, il existe de *façon unique* un entier $n$ strictement positif, une famille $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ de $\{\rho, \tau\}^n$ et une famille $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de $\mathbb{Z}^{*\,n}$ tels que :

$$g = s_1^{a_1} s_2^{a_2} \cdots s_n^{a_n} \quad \text{et} \quad \forall i \in [1, n-1]\,,\ s_i \neq s_{i+1}$$

*On appelle terme de tête de $g$ l'élément $s_1$ lorsque $a_1 > 0$ et $s_1^{-1}$ lorsque $a_1 < 0$. Ce terme de tête sera noté $t(g)$.*

**5.** Démontrer que $\mathbf{G}$ est un ensemble dénombrable.

**6.** Pour tout élément $\sigma$ de $\{\rho, \rho^{-1}, \tau, \tau^{-1}\}$, on note $L(\sigma)$ l'ensemble des éléments $g$ de $\mathbf{G} \setminus \{\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}\}$ pour lesquels $t(g) = \sigma$.

**a)** Vérifier que

$$\mathbf{G} = \{\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}\} \cup L(\rho) \cup L\left(\rho^{-1}\right) \cup L(\tau) \cup L\left(\tau^{-1}\right)$$

et que l'obtient ainsi une partition de **G.**

**b)** Vérifier que :

$$L(\rho) = \{\rho\} \cup \rho L(\rho) \cup \rho L(\tau) \cup \rho L\left(\tau^{-1}\right)$$

et que l'obtient ainsi une partition de $L(\rho)$**.**

De la même manière on a

$$L(\rho^{-1}) = \{\rho^{-1}\} \cup \rho^{-1} L(\rho^{-1}) \cup \rho^{-1} L(\tau) \cup \rho^{-1} L\left(\tau^{-1}\right)$$
$$L(\tau) = \{\tau\} \cup \tau L(\tau) \cup \tau L(\rho) \cup \tau L\left(\rho^{-1}\right)$$
$$L(\tau^{-1}) = \{\tau^{-1}\} \cup \tau^{-1} L(\tau^{-1}) \cup \tau^{-1} L(\rho) \cup \tau^{-1} L\left(\rho^{-1}\right)$$

*On ne demande pas de démontrer ces trois égalités.*

**c)** En déduire que

$$\mathbf{G} = L(\rho) \cup \rho L\left(\rho^{-1}\right) = L(\tau) \cup \tau L\left(\tau^{-1}\right)$$

et que, dans les deux cas, on obtient ainsi une partition de **G.**

## Partie III : Étude de sous-ensembles de $\mathbf{S}^2$

Les données et les notations de cette partie sont celles de la Partie II. $\mathbf{G}$ est le sous-groupe de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ engendré par $\{\rho, \tau\}$.

On considère l'ensemble

$$F = \{v \in \mathbf{S}^2 \ \mid\ \exists\, g \in \mathbf{G} \setminus \{\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}\},\ g(v) = v\}$$

et son complémentaire dans $\mathbf{S}^2$, soit $X = \mathbf{S}^2 \setminus F$.

**1.** Démontrer que l'ensemble $F$ est un sous-ensemble dénombrable de $\mathbf{S}^2$. En déduire que $X$ n'est pas vide.

**2.** Vérifier que pour tout $g \in \mathbf{G}$ et pour tout $v \in X$, $g(v) \in X$.

**3.** Démontrer que si $g$ et $h$ sont deux éléments de $\mathbf{G}$ tels qu'il existe $v$ appartenant à $X$ vérifiant $g(v) = h(v)$, alors $g = h$.

**4. a)** Démontrer que pour tout $g$ appartenant à $\mathbf{G}$, la restriction de $g$ à $X$ induit une bijection de $X$ sur lui-même que l'on notera $g_X$.

**b)** Démontrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} & \to & \mathfrak{S}(X) \\ g & \mapsto & g_X \end{array}$$

est un homomorphisme injectif de groupes. Cela permet d'identifier $\mathbf{G}$ à un sous-groupe de $\mathfrak{S}(X)$.

**5.** On considère la relation $\sim_{\mathbf{G}}$ définie sur $X$ par

$$a \sim_{\mathbf{G}} b \Leftrightarrow \exists g \in \mathbf{G},\ a = g(b)$$

Prouver qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

*On sait que les classes d'équivalence de $\sim_{\mathbf{G}}$ forment une partition de $X$. On admet alors en utilisant l'axiome du choix l'existence d'un sous-ensemble $M$ de $X$ dont l'intersection avec chaque classe d'équivalence contient un et un seul point.*

**6.** Prouver que la famille $(g(M))_{g\in\mathbf{G}}$ constitue une partition de $X$.

**7.** On pose

$$X_0 = M,\ \ X_1 = \bigcup_{g\in L(\rho)} g(M),\ \ X_2 = \bigcup_{g\in L(\tau)} g(M),\ \ X_3 = \bigcup_{g\in L(\rho^{-1})} g(M),\ \ X_4 = \bigcup_{g\in L(\tau^{-1})} g(M)$$

**a)** Prouver que $(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4)$ constitue une partition de $X$.

**b)** Prouver que

$$X = X_1 \cup \rho(X_3) \text{ et } X_1 \cap \rho(X_3) = \emptyset \tag{6}$$
$$X = X_2 \cup \tau(X_4) \text{ et } X_2 \cap \tau(X_4) = \emptyset \tag{7}$$

**8.** On note $\Lambda = \{(u,v) \in F \times F \mid u \neq v\}$.

**a)** Vérifier que $\Lambda$ est un ensemble dénombrable.

**b)** Si $(u,v) \in \Lambda$, on considère $\Gamma_{u,v} = \{w \in \mathbf{S}^2 \mid \|w-u\| = \|w-v\|\}$. Quelle est la nature géométrique de cet ensemble ?

**c)** Soit $\Gamma = \bigcup_{(u,v)\in\Lambda} \Gamma_{u,v}$. Démontrer que $\Gamma \cup F$ est symétrique par rapport à l'origine et que $\Gamma \cup F$ est strictement inclus dans $\mathbf{S}^2$.

**Indication :** on pourra considérer l'intersection de $\Gamma \cup F$ avec un cercle tracé sur $\mathbf{S}^2$ qui ne soit pas centré à l'origine.

**d)** Démontrer qu'il existe un élément $r$ de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ dont l'axe ne rencontre pas $\Gamma \cup F$ et tel que

$$\forall p \in \mathbb{Z}^*,\ r^p \neq \mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$$

**e)** Soit $(u,v)$ appartenant à $F \times F$. Montrer que pour tout entier $k$ strictement positif, $r^k(u)$ est différent de $v$. On distinguera les cas : $u = v$ et $u \neq v$.

En déduire que si $m$ et $n$ sont deux entiers naturels distincts, alors

$$r^n(F) \cap r^m(F) = \emptyset$$

**f)** On pose

$$Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} r^n(F) \text{ et } Z = \mathbf{S}^2 \setminus Y$$

**g)** Démontrer que

$$r(Y) \cap Z = \emptyset \text{ et } \mathbf{S}^2 \setminus F = r(Y) \cup Z$$

## Partie IV : Équidécomposabilité

*Soient $A$ et $B$ deux parties non vides de $\mathbf{E}$. On dit que $A$ est équidécomposable à $B$ s'il existe une partition finie $(A_i)_{i\in I}$ de $A$, une partition finie $(B_i)_{i\in I}$ de $B$ et une famille finie $(g_i)_{i\in I}$, de déplacements de $\mathbf{E}$ telles que*

$$\forall i \in I,\ B_i = g_i(A_i)$$

(les trois familles sont indexées par un même ensemble fini $I$). *On écrira alors $A \sim B$.*

**1.** Les notations étant celles de la question III. 8, vérifier que $\mathbf{S}^2$ est équidécomposable à $\mathbf{S}^2 \setminus F$

**2.** Soient $A_1, A_2, B_1, B_2$ des sous-ensembles non vides de $\mathbf{E}$ tels que :

$$A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset,\ \ A_1 \sim B_1,\ \ A_2 \sim B_2$$

**a)** Vérifier que $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$.

**b)** Généraliser.

**3.** Démontrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des parties non vides de $\mathbf{E}$.

Pour démontrer la transitivité, on observera que si $(A_i)_{i\in I}$ et $\left(A'_j\right)_{j\in J}$ sont deux partitions de $A$, et que si l'on pose

$$K = \left\{(i,j) \in I \times J \mid A_i \cap A'_j \neq \emptyset\right\}$$

alors la famille $\left(A_i \cap A'_j\right)_{(i,j)\in K}$ est encore une partition de $A$.

**4.** On suppose que $A \sim B$. Démontrer qu'il existe une bijection $\psi$ de $A$ sur $B$ telle que pour tout sous-ensemble non vide $C$ de $A$, on ait :

$$C \sim \psi(C)$$

*Soient $A$* et *$B$ deux sous-ensembles non vides de $\mathbf{E}$. On posera $A \preccurlyeq B$ lorsqu'il existe un sous-ensemble non vide $B^{'}$ de $B$ tel que $A \sim B^{'}$. En particulier, si $A \sim B$, alors $A \preccurlyeq B$.*

*La relation $\preccurlyeq$ est une relation réflexive et transitive sur l'ensemble des parties non vides de $\mathbf{E}$. Les preuves sont analogues à celles des questions précédentes. On observera par ailleurs que si $A$ et $B$ sont des sous-ensembles non vides de $X$ tels que $A \subset B$, il est évident que $A \preccurlyeq B$.*

*On admettra dans la suite du problème le théorème de Banach-Schröder-Bernstein, qui s'énonce de la manière suivante :*

**Si $A$ et $B$ sont deux sous-ensembles non vides de $\mathbf{E}$ tels que $A \preccurlyeq B$ et $B \preccurlyeq A$, alors $A \sim B$.**

## Partie V : ensembles paradoxaux

Les définitions et les notations sont les mêmes que dans la partie précédente.

Un sous-ensemble $A$ de $\mathbf{E}$ est paradoxal s'il existe deux sous-ensembles non vides $B, C$ de $A$ tels que

$$B \sim A,\ \ C \sim A\ \ \text{et}\ \ B \cap C = \emptyset \tag{8}$$

**1.** Les notations étant celles de la partie III, vérifier que $X$ est paradoxal.

**2**. Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles non vides de $\mathbf{E}$ telles que $A \sim B$. Démontrer que si $A$ est paradoxal, alors il en est de même de $B$.

On pourra utiliser le résultat de la question 4 de la partie IV.

**3.** Soit $A$ un sous-ensemble paradoxal de $\mathbf{E}$, $B, C$ deux sous-ensembles de $A$ non vides vérifiant les relations (**??**).

**a)** En utilisant le théorème de Banach-Schröder-Bernstein, démontrer que $(A \setminus C) \sim A$.

**b)** En déduire qu'il existe une partition $(A_1, A_2)$ de $A$ telle que :

$$A_1 \sim A\ \ \text{et}\ \ A_2 \sim A$$

**4.** Démontrer que $\mathbf{S}^2$ est paradoxal.

**5.** En déduire que si $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ sont deux sphères disjointes de rayon 1, alors

$$\mathbf{S}^2 \sim \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$

# 4. Analyse de la deuxième épreuve

## 1 Contenu du sujet

Le problème d'algèbre-géométrie de la session 2004 avait pour but l'étude les notions d'équidécomposabilité et d'ensembles paradoxaux dans un cadre euclidien. L'objectif final était d'obtenir une preuve de la forme faible du théorème de Banach-Tarski concernant le caractère paradoxal de la sphère unité dans un espace affine eucidien de dimension trois. Le lecteur intéressé par ces notions poura consulter avec profit l'excellent livre de Stan Wagon : The Banach-Tarski paradox (Cambridge university press).

• La partie préliminaire consistait à redémontrer quelques propriétés élémentaires de théorie des ensembles. Beaucoup de candidats ne s'aperçoivent pas que le point essentiel dans la démonstration de la propriété (iv) est l'injectivité de l'application $f$.

• La partie I présentait quelques propriétés des rotations vectorielles d'un espace vectoriel euclidien de dimension trois. Seule la dernière question de cette partie était délicate.

• La partie II avait pour objectif la construction d'un groupe libre engendré par deux éléments de $\mathcal{SO}(3)$. Cette partie nécessitait quelques connaissances de base concernant le raisonnement par récurrence, les congruences dans $\mathbf{Z}$ ainsi qu'une certaine pratique du calcul matriciel dans le groupe $\mathcal{SO}(3)$. Le jury a pu constater que dans de trop nombreuses copies la rédaction des raisonnements par récurrence était très approximative. Par ailleurs le calcul des puissances d'une matrice telle que

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est évident dès que l'on interprète géométriquement ce calcul.

• La partie III mettait en place un sous-ensemble $X$ de $\mathbf{S}^2$ sur lequel le groupe $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ opère fidèlement. On faisait également démontrer que cet ensemble $X$ était paradoxal pour l'action du groupe $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$. Le caractère non dénombrable de la sphère $\mathbf{S}^2$ ainsi que l'utilisation de l'axiome du choix sont les clefs de l'obtention de ces résultats.

• Enfin les parties IV et V proposaient une étude de l'équidécomposabilité ainsi que de la notion d'ensemble paradoxal. Le caractère paradoxal de la sphère $\mathbf{S}^2$ concluait le sujet. Signalons que le véritable théorème de Banach-Tarski montre que les boules de $\mathbf{E}$ sont paradoxales, grâce à quoi il est possible de prouver un résultat encore plus remarquable : deux sous-ensembles de $\mathbf{E}$ qui sont bornés et d'intérieur non vides sont équidécomposables.

## 2 Analyse de quelques questions

### 2.1 Partie I

Cette partie nécessitait quelques connaissances des rotations vectorielles d'un espace euclidien de dimension trois.

**Question 1a) :** il suffit d'écrire $\mathbf{E} = D \oplus P$, où $D$ est l'axe de $\rho$, $P$ l'orthogonal de $D$, puis d'utiliser la commutativité du groupe des rotations du plan $P$.

**Question 1b) :** le plus simple est de traiter le problème matriciellement en travaillant dans une base orthonormale $(u_1, u_2, u_3)$, où $u_1$ et $u_2$ dirigent les axes de $\rho_1$et $\rho_2$. On montre ainsi que $\rho_1\rho_2$ est le demi-tour d'axe $\mathbf{R}u_3$. Certains candidats ont pensé pouvoir ramener cette question à un problème de géométrie plane, ce n'est évidemment pas possible !

**Question 1 c) :** Cette question ne présentait pas de difficulté particulière. Il fallait cependant prendre soin de rédiger correctement les raisonnements par récurrence, notamment en ce qui concerne l'initialisation desdites récurrences.

**Questions 2a), b), c) :** Soit $P$ le plan orthogonal à $D$. On suppose $\rho$ distcincte de $\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$, sinon il n'y a rien à faire !

Posons $\Delta = \mathbb{R}u$. L'égalité $\rho(\Delta) = \Delta$ signifie que $\rho(u)$ et $u$ sont colinéaires. Or cela n'est possible que si $\rho(u) = u$ ou si $\rho(u) = -u$.

– Dans le premier cas, $\Delta = D$, mais ce cas est exclu.
– Dans le second cas, $u$ est nécessairement orthogonal à $D$. En effet :

$$\langle u, \omega \rangle = \langle \rho(u), \rho(\omega) \rangle = \langle -u, \omega \rangle = -\langle u, \omega \rangle \text{ d'où } \langle u, \omega \rangle = 0$$

$u$ appartient donc à $P$. La rotation induite par $\rho$ sur le plan $P$ envoie alors $u$ sur $-u$, donc coïncide avec $-\mathrm{Id}_{\mathbf{P}}$. Il s'ensuit que $\rho$ est le demi-tour d'axe $D$. *cqfd*

**I.2.b)** Soit $D_1$ (resp. $D_2$) l'axe de $\rho_1$ (resp. $\rho_2$). Pour tout $v_1 \in D_1$,

$$\rho_2(v_1) = \rho_2(\rho_1(v_1)) = \rho_1(\rho_2(v_1))$$

$\rho_2(v_1)$ appartient donc à l'axe de $\rho_1$, soit

$$\rho_2(v_1) \in D_1$$

Il s'ensuit que $\rho_2(D_1) = D_1$, et vu ce qui précède :
– Ou bien $D_1 = D_2$, mais ce cas est exclu par hypothèse.
– Ou bien $\rho_2$ est un demi-tour et $D_1$ et $D_2$ sont orthogonales. En inversant les rôles, on montre alors que $\rho_1$ est également undemi-tour.

**I 2 c)** Les questions **I 1** et **I 2** montrent que deux rotations commutent si et seulement si l'une d'elles est égale à $\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$ ou lorsqu'elles sont distinctes de $\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$, si elles possèdent le même axe ou enfin s'il s'agit de demi-tours d'axes orthogonaux.

**Questions 3,4,5a) :** ces questions ne présentaient pas de difficulté et ont été correctement traitées par bon nombre de candidats. Signalons cependant que la notion d'angle d'une rotation vectorielle de l'espace **E** ne peut être défini qu'après avoir orienté l'espace **E** et avoir fait le choix d'une orientation sur l'axe de ladite rotation.

**Question 5b) :** un certain nombre de candidats a bien compris la question posée, cependant la rédaction proposée n'était pas toujours très convaincante. On pouvait raisonner de la façon suivante :

Soit **K** le sous-ensemble de **G** formé de $\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$ et des éléments $g \in \mathbf{G} - \{\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}\}$ pour lesquels il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$, une famille $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ appartenant à $\{\rho_1, \rho_2\}^n$, une famille $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ appartenant à $\mathbb{Z}^{*n}$ tels que :

$$g = s_1^{a_1} s_2^{a_2} \cdots s_n^{a_n} \text{ et } \forall i \in [1, n[, \ s_i \neq s_{i+1} \tag{1}$$

On va montrer que **K** est un sous-groupe de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$.
– Il est évident que $g \in \mathbf{K} \Rightarrow g^{-1} \in \mathbf{K}$ puisque

$$g = s_1^{a_1} s_2^{a_2} \cdots s_n^{a_n} \Rightarrow g^{-1} = s_n^{-a_n} ... s_2^{-a_2} s_1^{-a_1}$$

– Considérons

$$g = s_1^{a_1} s_2^{a_2} \cdots s_n^{a_n} \in \mathbf{K} \text{ et } h = t_1^{b_1} t_2^{b_2} \cdots t_m^{b_m} \in \mathbf{K}$$

– avec les conditions habituelles sur les $a_i$ et les $b_j$. On a alors :

$$hg = t_1^{a_1} t_2^{a_2} \cdots t_m^{a_m} s_1^{b_1} s_2^{b_2} \cdots s_n^{b_n}$$

– Dans le cas où $t_m \neq s_1$, il n'y a rien à ajouter : il est évident que $hg \in \mathbf{K}$.
– Dans le cas où $t_m = s_1$, alors

$$hg = t_1^{a_1} t_2^{a_2} \cdots t_{m-1}^{a_{m-1}} s_1^{a_m + b_1} s_2^{b_2} \cdots s_n^{b_n}$$

Si $a_m + b_1 \neq 0$, c'est terminé : $hg \in \mathbf{K}$
Sinon on est ramené à une situtation analogue mais faisant intervenir moins de termes :

$$hg = t_1^{a_1} t_2^{a_2} \cdots t_{m-1}^{a_{m-1}} s_2^{b_2} \cdots s_n^{b_n}$$

On recommence le raisonnement.
– Finalement : ou bien $h = g^{-1}$ et $hg = \mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$, ou bien $h \neq g$ et le processus s'arrête en donnant un élement de **K**.

Conclusion : **K** est un sous-groupe de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$, il est contenu dans **H** et enfin il contient $\{\rho_1, \rho_2\}$, donc il contient **H**. En définitive $\mathbf{H} = \mathbf{K}$, ce qui fournit la réponse à la question.

## 2.2 Partie II : étude d'un sous-groupe de $\mathcal{SO}(3)$

**Quesstion 1a) :** on posait $\alpha = \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$. Il s'agit donc d'un réel compris entre 0 et $\pi$. De ce fait $\sin\alpha$ est positif. Cette simple observation a manqué à de nombreux candidats qui se contente d'écrire $\sin\alpha = \pm\frac{4}{5}$ pour finir par se débarasser du signe "-" lorsque cela devient nécessaire dans leurs calculs...

**Questions 1d), 1e), 2a), 2b) :** si les candidats connaissent les relations de congruence modulo un entier donné, en revanche un grand nombre ne maîtrise pas la compatibilité de ces relations avec les opérations + et $\times$ de $\mathbf{Z}$. Une bonne utilisation de ces propriétés permettait pourtant une résolution rapide des questions.

**Question 2c) :** Il suffit d'utiliser la compatibilité de la relation $\sim$ avec le produit matriciel :

$$5^{|m|+|n|}T^m R^n \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \varepsilon_m \\ 0 & -\varepsilon_m & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & \varepsilon_n & 0 \\ -\varepsilon_n & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3\varepsilon_n & 9 & 0 \\ \varepsilon_n\varepsilon_m & -3\varepsilon_m & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\varepsilon_n & 4 & 0 \\ \varepsilon_n\varepsilon_m & 2\varepsilon_m & 0 \end{bmatrix}$$

**Question 2d) :** Démonstration par récurrence sur $n$.

**Question .2e) :** On en déduit ausitôt que pour $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ appartenant à $\mathbf{Z}^{*\,n}$ :

$$T^{a_1}R^{b_1}\cdots T^{a_n}R^{b_n} \neq I_3$$

De même si l'on a $T^{a_1}R^{b_1}\cdots T^{a_n}R^{b_n}T^{\beta} = I_3$, alors $5^{q+|\beta|}T^{a_1}R^{b_1}\cdots T^{a_n}R^{b_n}T^{\beta} \sim 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \varepsilon_\beta \\ 0 & -\varepsilon_\beta & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3b & b\varepsilon_\beta \\ 0 & 3d & d\varepsilon_\beta \end{bmatrix}$$

où $a, b, c, d$ sont des entiers non multiples de 5 et $\varepsilon_\beta = \pm 1$. On voit donc qu'on aboutit à une contradication.

**Question 3 :** Soient $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ appartenant à $\mathbf{Z}^{*\,n}$ et $\beta$ appartenant à $\mathbf{Z}^*$.

• Supposons que $R^{a_1}T^{b_1}\cdots R^{a_n}T^{b_n} = I_3$, on aurait alors :

$$T^{b_1}R^{a_2}\cdots R^{a_n}T^{b_n} = R^{-a_1} \Leftrightarrow T^{b_1}R^{a_2}\cdots R^{a_n}T^{b_n}R^{a_1} = I_3$$

or une telle égalité est impossible d'après la question **3 e).**

• De même l'égalité $R^{a_1}T^{b_1}\cdots R^{a_n}T^{b_n}R^{\beta} = I_3$ conduirait à

$$R^{a_1}T^{b_1}\cdots R^{a_n}T^{b_n} = R^{-\beta} \Leftrightarrow T^{b_1}\cdots R^{a_n}T^{b_n} = R^{-a_1-\beta} \Leftrightarrow T^{b_1}R^{a_2}\cdots R^{a_n}T^{b_n}R^{a_1+\beta} = I_3$$

Cette dernière égalité n'est possible (voir question **2 e)**) que si $a_1 + \beta = 0$. On obtient alors :

$$T^{b_1}R^{a_2}T^{b_2}\cdots R^{a_n}T^{b_n} = I_3$$

ce qui n'est pas possible à nouveau en utilisant la conclusion de la question **2 e).**

**Remarque :** en résumé, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $(S_1, S_2, \ldots, S_n) \in \{R, T\}^n$ et $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbf{Z}^{*n}$, il n'est pas possible d'obtenir :

$$S_1^{p_1}S_2^{p_2}\cdots S_n^{p_n} = I_3$$

**Question 4 :** Soit $g \in \mathbf{G} - \{\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}\}$. On sait d'après la question **I 5** qu'il existe $n \in \mathbf{N}^*$, une famille $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ appartenant à $\{\rho, \tau\}^n$, une famille $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ appartenant à $\mathbf{Z}^{*n}$ tels que :

$$g = s_1^{a_1}s_2^{a_2}\cdots s_n^{a_n} \quad \text{et} \quad \forall\, i \in [1, n-1]\,,\ s_i \neq s_{i+1}$$

Il reste le problème de l'unicité. Supposons que $g$ puisse s'écrire sous la forme :

$$g = \sigma_1^{b_1}\sigma_2^{b_2}\cdots\sigma_m^{b_m}$$

avec $m \in \mathbf{N}^*$, $(b_1, b_2, \ldots, b_m) \in \mathbf{Z}^{*m}$ et pour tout $i \in [1, m-1]$, $\sigma_i \neq \sigma_{i+1}$. On peut également supposer que $m$ est supérieur ou égal à $n$. On aura alors :

$$s_1^{a_1}s_2^{a_2}\cdots s_n^{a_n}\sigma_m^{-b_m}\sigma_{m-1}^{-b_{m-1}}\cdots\sigma_2^{-b_2}\sigma_1^{-b_1} = \mathrm{Id}_{\mathbf{E}} \tag{2}$$

D'après la question **II 3**, une telle égalité n'est possible que si $s_n = \sigma_m$ et si $a_n = b_m$. On peut alors itérer le processus et obtenir successivement, pour $i \in [1, n-1]$ :

$$s_{n-i} = \sigma_{m-i},\ a_{n-i} = b_{m-i} \tag{3}$$

La relation (2) se réduit alors à $\sigma_{m-n}^{-b_{m-n}} \cdots \sigma_2^{-b_2}\sigma_1^{-b_1} = \mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$.
Une telle égalité est impossible si $m - n \geqslant 1$.
Conclusion : $m = n$ et d'après (3), $s_i = \sigma_i$ et $a_i = b_i$, pour tout $i$ appartenant à $[1, n]$.

**Question 5 :** En général cette question n'a pas été bien traitée : la plupart des candidats l'ayant abordée se contente de vagues explications sur la réunion d'ensembles dénombrables. On pouvait procéder comme suit : $\mathbf{G} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} \mathbf{G}_n$, où :

$$\mathbf{G}_n = \{s_1^{a_1} s_2^{a_2} \cdots s_n^{a_n} \ / \ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{Z}^n \text{ et } (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \{\rho, \tau\}^n\}$$

Or $\mathbf{G}_n$ est dénombrable car image de l'ensemble dénombrable $\mathbf{Z}^n \times \{\rho, \tau\}^n$ par l'application

$$f_n : \mathbf{Z}^n \times \{\rho, \tau\}^n \to \mathbf{G}_n, \ ((a_1, a_2, \ldots, a_n), (s_1, s_2, \ldots, s_n)) \mapsto s_1^{a_1} s_2^{a_2} \cdots s_n^{a_n}$$

Conclusion : $\mathbf{G}$ est dénombrable car union dénombrable d'ensembles dénombrables.

**Question 6a)** évident : il suffit de trier les éléments de $\mathbf{G}$ distincts de $\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$ selon l'élément de tête.

### 2.3 Partie III : étude de sous-ensembles de $\mathbf{S}^2$

Plusieurs questions de cette partie étaient relativement faciles à condition de maîtriser un minimum de théorie des ensembles. En particulier quelques connaissances en matière d'ensembles dénombrables permettaient d'avancer rapidement.

**Question 1 :** il suffisait de se rappeler que si $g \in \mathbf{G} - \{\,\mathrm{ld}_{\mathbf{E}}\}$, l'axe de $g$ intercepte la sphère $\mathbf{S}^2$ en deux points, de ce fait $F$ apparaît comme une union dénombrable d'ensembles finis. Enfin le caractère non dénombrable de $\mathbf{S}^2$ permet de conclure que $X$ n'est pas vide.

**Question 2,3 :** ces questions, lorsqu'elles on été abordées, ont rarement été bien comprises. Il n'y avait poutant guère de difficulté :

• Soient $v \in X$ et $g \in \mathbf{G}$. Supposons que $g(v)$ appartienne à $F$. Dans ce cas il existe $h \in \mathbf{G} - \{\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}\}$ tel que $h(g(v)) = g(v)$, donc $g^{-1}hg(v) = v$, avec $g^{-1}hg \in \mathbf{G}$ et $v \in X$. On en déduit que $g^{-1}hg = \mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$, c'est-à-dire $h = \mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$, ce qui est impossible.

Conclusion : pour tout $g \in \mathbf{G}$, $g(X) \subset X$. On a de même $g^{-1}(X) \subset X$, donc $X = g\left(g^{-1}(X)\right) \subset g(X)$. Finalement :

$$\forall\, g \in \mathbf{G},\ g\,(X) = X$$

• Soient $g, h \in \mathbf{G}$ pour lesquels il existe $v \in X$ tel que $g(v) = h(v)$. On a alors $h^{-1}g(v) = v$ et d'après la définition des éléments de $X$, cela conduit à $h^{-1}g = \mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$, c'est-à-dire $h = g$.

**Question 8 :**

**a)** $F$ est dénombrable, donc $F \times F$ aussi ; $\Lambda$ est dénombrable comme sous-ensemble d'un ensemble dénombrable.

**b)** $\Gamma_{u,v} = \{w \ / \ d(u, w) = d(v, w)\} \cap \mathbf{S}^2$ est l'intersection du plan médiateur $\pi_{u,v}$ de $[u, v]$ et de $\mathbf{S}^2$. Comme $u$ et $v$ appartiennent à $\mathbf{S}^2$, $\pi_{u,v}$ passe par l'origine. $\Gamma_{u,v}$ est donc un "grand cercle" de $\mathbf{S}^2$.

**c)** Cette question était plus délicate que les précédentes. Soit $\Gamma = \bigcup_{(u,v)\in\Lambda} \Gamma_{u,v}$.

• Montrons d'abord que $\Gamma \cup F \subsetneqq \mathbf{S}^2$. On raisonne par l'absurde : supposons $\Gamma \cup F = \mathbf{S}^2$. On considère alors un cercle $\gamma$ tracé sur $\mathbf{S}^2$ et qui ne soit pas un grand cercle. On a alors :

$$\gamma = \bigcup_{(u,v)\in\Lambda} (\Gamma_{u,v} \cap \gamma) \cup (F \cap \gamma)$$

Or $\Gamma_{u,v} \cap \gamma$ étant l'intersection de deux cercles *distincts*, il s'agit d'un ensemble fini. Comme $\Lambda$ est dénombrable, (de même que $F$ et $F \cap \gamma$), on conclut que $\gamma$ est dénombrable comme union dénombrable d'ensembles dénombrables, ce qui est faux.

• Il est clair que $F$ est symétrique par rapport à 0, de même que $\Gamma_{u,v}$, pour tout choix de $(u, v) \in \Lambda$, donc $\Gamma \cup F$ est symétrique par rapport à l'origine.

**d)** Soit $r$ un élément de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ dont l'axe $D_r$ ne rencontre pas $\Gamma \cup F$. (une telle droite existe puisque $\Gamma \cup F \subsetneqq \mathbf{S}^2$) et d'angle $\theta$ tel que $\frac{\theta}{\pi} \notin \mathbf{Q}$. On aura alors $r^p \neq \mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$, pour tout entier $p$ non nul !

**e)** Cette question et celle qui suit exigeaient rigueur et précision. Elles ont rarement été bien traitées.
– Soit $(u, v) \in F \times F$ et $k$ un entier strictement positif tels que $r^k(u) = v$.

- **1$^{er}$ cas :** $u = v$. Dans ce cas $r(u) = u$, autrement dit $u$ est sur l'axe de $r$, ce qui a été exclu.
- **2$^{ème}$ cas :** $u \neq v$. Dans ce cas si $\omega$ est un vecteur directeur unitaire de l'axe de $r$ :

$$\|v - \omega\| = \left\|r^k(u) - r^k(\omega)\right\| = \|u - \omega\|$$

Il s'ensuit que $\omega \in \Gamma_{u,v}$, avec $(u, v) \in \Lambda$, mais ce cas de figure est exclu par construction de la rotation $r$.
**Conclusion :** pour tout $(u, v) \in F \times F$ et pour tout entier $k \geqslant 1$, $r^k(u) \neq v$, donc $r^k(F) \cap F = \emptyset$.

1. – Soient $m$ et $n$ deux entiers naturels distincts. Supposons par exemple $m < n$. Si $r^n(F) \cap r^m(F)$ n'est pas vide, il existe $u$ et $v$ appartenant à $F$, tels que

$$r^n(u) = r^m(v) \text{ } i.e. \text{ } v = r^{n-m}(u)$$

et ceci est impossible d'après ce qui précède.

**f)** On pose

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} r^n(F) \text{ et } Z = \mathbf{S}^2 \setminus Y.$$

Tous les ensembles considérés sont des sous-ensembles de $\mathbf{S}^2$.
– $r(Y) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} r^n(F) = Y \setminus F$ est inclus dans $Y$ ; donc $r(Y) \cap Z = \emptyset$.
– Il est clair que $r(Y) = Y \setminus F$ est inclus dans $\mathbf{S}^2 \setminus F$. Il est également clair que $F$ étant inclus dans $X$, alors $Y = \mathbf{S}^2 \setminus X$ est inclus dans $\mathbf{S}^2 \setminus F$ ; donc $r(Y) \cup Z$ est inclus dans $\mathbf{S}^2 \setminus F$.
Inversement, si $x \in \mathbf{S}^2 \setminus F$, de deux choses l'une : ou bien $x \in Y$, donc $x \in Y \setminus F = r(Y)$, ou bien $x \in \mathbf{S}^2 \setminus Y = Z$. En d'autres termes $\mathbf{S}^2 \setminus F$ est inclus dans $r(Y) \cup Z$ ; *cqfd.*

## 2.4 Partie IV : équidécomposabilité

Seule la transitivité de la relation $\sim$ posait un problème de rédaction. On pouvait raisonner de la façon suivante :

Soient $A, B, C$ trois sous-ensembles non vides de $X$ tels que $A \sim_{\mathbf{G}} B$ et $B \sim_{\mathbf{G}} C$. Il existe donc une partition finie $(A_i)_{i \in I}$ de $A$, une partition finie $(B_i)_{i \in I}$ de $B$ et une famille finie $(g_i)_{i \in I}$, d'éléments de $\mathbf{G}$, telles que *:*

$$\forall\, i \in I,\ B_i = g_i(A_i)$$

ainsi qu'une partition finie $\left(B_j^{'}\right)_{j \in J}$ de $C$, une partition finie $(C_j)_j \in J$ de $C$ et une famille $(h_j)_{j \in J}$ de $\mathbf{G}$ telles que

$$\forall\, j \in J,\ C_j = h_j\left(B_j^{'}\right)$$

On note alors $K = \left\{(i, j) \in I \times J \ / \ B_i \cap B_j^{'} \neq 0\right\}$. Comme il est rappelé dans l'énoncé, la famille $\left(B_i \cap B_j^{'}\right)_{(i,j) \in K}$ est une partition de $B$. Considérons alors, pour $(i, j) \in K$, $A_i \cap g_i^{-1}\left(B_j^{'}\right)$. C'est un sous-ensemble non vide de $X$ car

$$g_i(A_i \cap g_i^{-1}\left(B_j^{'}\right)) = g_i(A_i) \cap B_j^{'} = B_i \cap B_j^{'} \neq 0$$

De plus on vérifie aisément que la famille $\left(A_i \cap g_i^{-1}\left(B_j^{'}\right)\right)_{(i,j) \in K}$ est une partition de $A$. De même la famille $(C_j \cap h_j(B_i))_{(i,j) \in K}$ est une partition de $C$ et enfin, pour tout couple $(i, j)$ de $K$ :

$$(h_j g_i)\left(A_i \cap g_i^{-1}\left(B_j^{'}\right)\right) = h_j\left(B_i \cap B_j^{'}\right) = h_j(B_i) \cap C_j$$

ce qui démontre que $A \sim_{\mathbf{G}} C$.

**Question 4 :** Quelques candidats ont abordé cette question, malheureusement la preuve du caractère bijectif de $\psi$ n'est quasiment jamais bien rédigée.

Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles non vides de $X$ tels que $A \sim_{\mathbf{G}} B$. Il existe donc une partition finie $(A_i)_{i \in I}$ de $A$, une partition finie $(B_i)_{i \in I}$ de $B$ et une famille finie $(g_i)_{i \in I}$, d'éléments de $\mathbf{G}$, telles que *:*

$$\forall\, i \in I,\ B_i = g_i(A_i)$$

Soit $\psi : A \to B$ définie par ses restrictions aux ensembles $A_i$ :

$$\forall\, i \in I,\ \psi_{|A_i} = g_{i|A_i}$$

On a alors $\psi(A) = \bigcup_{i \in I} \psi(A_i) = \bigcup_{i \in I} g_i(A_i) = \bigcup_{i \in I} B_i = B$. Enfin $\psi$ est injective car si $x$ et $y$ sont deux éléments de $A$ tels que $\psi(x) = \psi(y)$, il existe $i, j \in I$ tels que $x \in A_i,\ y \in A_j$ et $\psi(x) = g_i(x),\ \psi(y) = g_j(y)$. On en déduit que $g_i(x) = g_j(y) \in B_i \cap B_j$, par conséquent $i = j$ et $g_i(x) = g_i(y)$, donc $x = y$ puisque $g_i$ est une permutation de $X$.

Conclusion : $\psi$ est une bijection de $A$ sur $B$. De plus si $C$ est un sous-ensemble non vide de $A$ :

$$C = \bigcup_{i \in I} C \cap A_i,\ \psi(C) = \bigcup_{i \in I} \psi(C \cap A_i) = \bigcup_{i \in I} g_i(C \cap A_i)$$

Or si $J = \{i \in I \ / \ C \cap A_i \neq \emptyset\}$, la famille $(C \cap A_i)_{i \in J}$ est une partition de $C$, $(g_i(C \cap A_i))_{i \in J}$ est une partition de $\psi(C)$, donc $C \sim_{\mathbf{G}} \psi(C)$.

### 2.5 Partie V : ensembles paradoxaux

Cette dernière partie nécessitait d'opérer une synthèse de tous les résultats obtenus précédemment. Peu de candidats ont sérieusement abordé cette dernière partie.