C. R. Acad. Sci. Paris, t. 329, Série I, p. 957-960, 1999
Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Sur le comportement asymptotique de solutions de systèmes hyperboliques linéaires

Farid AMMAR-KHODJA, Ahmed BADER

Équipe de mathématiques de Besançon, UMR 6623, Université de Franche-Comté, 16, route de Gray, 25030 Besançon, France
Courriel : {ammar, bader}@math.univ-fcomte.fr

(Reçu le 4 août 1999, accepté après révision le 4 octobre 1999)

Résumé. Cette Note propose l'extension d'un résultat de Neves, Lopes et Ribeiro sur le calcul du rayon spectral essentiel de semi-groupes issus de systèmes hyperboliques en une dimension d'espace au cas de valeurs propres multiples. Des applications à la stabilisation exponentielle de systèmes d'équations des ondes par une seule force sont proposées. © 1999 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

On the asymptotic behaviour of solutions of linear hyperbolic systems

Abstract. *We extend a result of Neves, Lopes and Ribeiro on the computation of the essential spectral radius of semigroups associated to one-dimensional hyperbolic systems to the case of multiple eigenvalues. Applications to the exponential stabilization of systems of wave equations by one control force are proposed.* © 1999 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Énoncé du résultat

On considère un système hyperbolique en dimension un d'espace de la forme :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\binom{u}{v} &= -M(x)\,\frac{\partial}{\partial x}\binom{u}{v} - N(x)\binom{u}{v}, \quad (0,+\infty)\times(0,\ell),\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,[v(t,\ell) - Du(t,\ell)] &= Fu(t,\ell) + Gv(t,\ell), \quad t\in(0,+\infty),\\ u(t,0) &= Ev(t,0), \quad t\in(0,+\infty), \end{aligned}\right. \tag{1.1}$$

auquel on associe le système réduit suivant :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\binom{u}{v} = -M(x)\,\frac{\partial}{\partial x}\binom{u}{v} - N_0(x)\binom{u}{v}, \quad (0,+\infty)\times(0,\ell),\\ &u(t,0) = Ev(t,0), \quad v(t,\ell) = Du(t,\ell), \quad t\in(0,+\infty), \end{aligned}\right. \tag{1.2}$$

Note présentée par Philippe G. CIARLET.

où :

(i) $M(x)$ est une matrice diagonale $n \times n$ satisfaisant $M(x) = \operatorname{diag}\big([M_{ii}(x)]_{i=1}^{r}, [M_{jj}(x)]_{j=r+1}^{q}\big)$, M_{ii} (resp. M_{jj}) étant des matrices diagonales données par :

$$M_{ii}(x) = \lambda_i(x)\,\mathrm{I}_{m_i}, \quad i = 1, \ldots, r; \quad M_{jj}(x) = \mu_j(x)\,\mathrm{I}_{m_j}, \quad j = r+1, \ldots, q,$$

où I_{m_i} est la matrice identité d'ordre m_i, $\lambda_i(x)$ et $\mu_j(x)$ sont, pour tout $1 \le i \le r$ et tout $1 \le j \le q$, des fonctions C^1 en x à valeurs réelles telles que : $\lambda_i(x) > 0$, $\mu_j(x) < 0$, $\forall x \in (0, \ell)$.

On suppose d'autre part que $\sum_{i=1}^{r} m_i = p$ et $\sum_{j=r+1}^{q} m_j = n - p$;

(ii) $N(x)$ est une matrice $n \times n$ dont les éléments c_{ij} sont des fonctions continues en x dans $(0, \ell)$ à valeurs réelles ou complexes ;

(iii) $N_0(x) = \operatorname{diag}(N_{11}(x), \ldots, N_{qq}(x))$ est une matrice diagonale par blocs dont les éléments $N_{ii}(x)$ sont des matrices carrées d'ordre m_i donnés par : $N_{ii}(x) = (c_{k\ell})_{S_{i-1} \le k, \ell \le S_i}$, $1 \le i \le q$, avec $S_j = \sum_{i=1}^{j} m_i$, $1 \le j \le q$, et $S_0 = 1$;

(iv) $u(t,x) = (u_i(t,x))_{i=1}^{p}$ et $v(t,x) = (v_i(t,x))_{j=p+1}^{n}$;

(v) D, E, F et G sont des matrices de tailles convenables.

Les conditions (i) à (v) constitueront ce que nous désignerons dans la suite par « *Hypothèse* (H) ».

Sur l'espace d'énergie $H = \big[\mathrm{L}^s([0,\ell])\big]^n \times \mathbb{C}^{n-p}$ (où $1 \le s < \infty$), on définit l'opérateur A_0 associé au système (1.1) par :

$$A_0 \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \left(\left[-M(x)\,\frac{\partial}{\partial x} - N(x) \right] \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \; Fu(\ell) + Gv(\ell) \right), \tag{1.3}$$

où $D(A_0) = \big\{(u,v,w) \in H \;;\; (u,v) \in \big[W^{1,s}(0,\ell)\big]^n,\; u(0) = Ev(0),\; w = v(\ell) - Du(\ell)\big\}$ (1.4)

et, sur l'espace $\widetilde{H} = \big\{(u,v,w) \in H \;;\; w \equiv 0\big\}$, on définit l'opérateur A_1 associé au système (1.2) par :

$$A_1 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \left[-M(x)\,\frac{\partial}{\partial x} - N_0(x) \right] \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

$$D(A_1) = \big\{(u,v) \in \big[W^{1,s}(0,\ell)\big]^n \;;\; u(0) = Ev(0),\; v(\ell) = Du(\ell)\big\}.$$

Les deux opérateurs ainsi définis engendrent des semi-groupes que l'on désignera par $T_i(t)$, $i = 0, 1$.

Rappelons que pour un C_0-semi-groupe $T(t)$, il existe $\omega_{\mathrm{ess}} = \omega_{\mathrm{ess}}(T) \in \mathbb{R}$ tel que : $r_{\mathrm{ess}}(T(t)) = \mathrm{e}^{\omega_{\mathrm{ess}} t}$, $\forall t > 0$, où $r_{\mathrm{ess}}(T(t))$ désigne le rayon spectral essentiel de $T(t)$ (*voir* [6], Chap. 3, pour les définitions et propriétés de ces nombres). Un résultat classique ([6], Chap. 3) est que le type $\omega(T)$ d'un C_0-semi-groupe $T(t)$ de générateur infinitésimal A est donné par $\omega(T) = \max\big[s(A)\,;\, \omega_{\mathrm{ess}}(T)\big]$, où $s(A) := \sup\big\{\operatorname{Re}\lambda \,;\, \lambda \in \sigma(A)\big\}$ est l'abscisse spectrale de l'opérateur A. Notre principal résultat est le suivant :

THÉORÈME 1. – *Sous l'hypothèse* (H), *la différence des deux semi-groupes* $T_0(t)$ *et* $T_1(t)$ *est compacte. En conséquence* $r_{\mathrm{ess}}(T_0(t)) = r_{\mathrm{ess}}(T_1(t))$ (*car le rayon essentiel est invariant sous l'effet d'une perturbation compacte* (cf. [6], *Chap.* 3)).

Une conséquence immédiate de ce résultat est le :

COROLLAIRE 1. – *Sous l'hypothèse* (H), *si* $T_0(t)$ *est asymptotiquement stable et* $\omega_{\mathrm{ess}}(T_1) < 0$, *alors* $T_0(t)$ *est exponentiellement stable.*

Neves, Ribeiro et Lopes [3] ont prouvé le théorème dans le cas où $m_i = 1$ et $m_j = 1$, $\forall\, i, j$. La démonstration que nous proposons s'inspire directement de celle donnée dans [3].

Avec A. Benabdallah, les deux auteurs s'étaient déjà intéressés à la réduction de systèmes couplés « hyperbolique-parabolique » en vue de l'étude de leur stabilité [1].

2. Exemples

Comme premier exemple, on considère deux équations des ondes couplées :

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) = u_{xx}(t,x) + b(x)v_t(t,x), \quad 0 < x < 1, \\ v_{tt}(t,x) = \eta^2 v_{xx}(t,x) - b(x)u_t(t,x) - a(x)v_t(t,x), \\ u(t,0) = v(t,0) = u(t,1) = v(t,1) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où a, $b \in \mathrm{C}([0,1])$, η est une constante positive. On suppose de plus que : $\operatorname{supp}(a) = [\alpha,\beta]$ et $\operatorname{supp}(b) = [\gamma,\delta]$, où α, β, γ et δ sont dans l'intervalle $[0,1]$ et :

$$a \geq 0 \ \text{ dans } \ [\alpha,\beta]. \tag{2.2}$$

Le changement de variables : $p = u_t - u_x$, $q = u_t + u_x$, $r = v_t - \eta v_x$ et $s = v_t + \eta v_x$ transforme (2.1) en un système du type (1.1) avec $M = \operatorname{diag}(1,\eta,-1,-\eta)$, $N(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \widetilde{N}(x) & \widetilde{N}(x) \\ \widetilde{N}(x) & \widetilde{N}(x) \end{pmatrix}$, $\widetilde{N}(x) = \begin{pmatrix} 0 & -b(x) \\ b(x) & a(x) \end{pmatrix}$, $F \equiv 0$, $G \equiv 0$ et $E \equiv D \equiv -\mathrm{Id}$.

Si $\eta \neq 1$, par application du théorème de Neves, Ribeiro et Lopes [3], on peut facilement montrer que $T_0(t)$ (le semi-groupe associé au système (2.1)) n'est pas exponentiellement stable. En fait, on obtient rapidement que $\omega_{\mathrm{ess}}(T_0) = 0$. Si $\eta = 1$ et a et b ont le même support ($\alpha = \gamma$ et $\beta = \delta$), la stabilité exponentielle de $T_0(t)$ est une conséquence du résultat de B. Kapitonov [2]. Nous proposons ici l'étude du cas $\eta = 1$ et a et b ont des supports disjoints ($0 \leq \alpha < \beta < \delta < \gamma \leq 1$). À l'aide de notre théorème, on montre :

THÉORÈME 2. – *Si $\eta = 1$ et a et b ont des supports disjoints, et sous la condition* (2.2), *le semi-groupe $T_0(t)$ est exponentiellement stable sur $H = \left(\mathrm{L}^2(0,1)\right)^4$ si et seulement si $\sigma(A_1) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ et $\int_0^1 b(t)\,\mathrm{d}t \neq n\pi$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

Remarque 1. – Un résultat similaire (non publié) a été obtenu par N. Burq en dimension supérieure pour le système :

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u + b(x)v_t && \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ v_{tt} &= \eta^2 \Delta v - b(x)u_t - a(x)v_t && \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ u &= v = 0 && \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega. \end{aligned}$$

En utilisant les mesures de défaut microlocales, il donne une condition géométrique nécessaire et suffisante portant sur les supports de a et b, pour la stabilité exponentielle dès que la stabilité asymptotique est assurée.

Remarque 2. – La positivité de a sur son support n'est pas nécessaire pour la stabilité exponentielle. En revanche, comme on peut le voir dans le calcul ci-dessous, $\int_0^1 a(x)\,\mathrm{d}x > 0$ est nécessaire.

Démonstration. – Soit A_1 l'opérateur réduit associé à A_0 avec $N_0(x) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \widetilde{N}(x) & 0 \\ 0 & \widetilde{N}(x) \end{pmatrix}$. On note encore $T_1(t)$ le C_0-semi-groupe de générateur A_1. Un calcul explicite montre que :

$$\lambda \in \sigma(A_1) \iff \mathrm{e}^{4\lambda} - \left(\mathrm{e}^{-\bar{a}} + 1\right)\cos\bar{b}\,\mathrm{e}^{2\lambda} + \mathrm{e}^{-\bar{a}} = 0,$$

où $\bar{a}$ et $\bar{b}$ désignent respectivement les moyennes de a et b. De cette équation, on déduit que $s(A_1) \leq 0$ et que : $s(A_1) = 0 \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{Z}$, $\bar{b} = n\pi$. Par application du résultat de M. Renardy [4], Theorem 1, p. 1300, à $A_1 = -M\frac{\partial}{\partial x} - N_0(x)$ (on vérifie facilement que $-M\frac{\partial}{\partial x}$ avec le même domaine que A_1 est normal et que ses valeurs propres sont isolées de multiplicité 2 quand $\eta = 1$), on a $s(A_1) \geq \omega_{\mathrm{ess}}(T_1)$ et d'après la définition du rayon essentiel, on déduit que : $s(A_1) = \omega_{\mathrm{ess}}(T_1)$. En appliquant notre résultat principal, on conclut que : $\omega_{\mathrm{ess}}(T_0) = \omega_{\mathrm{ess}}(T_1) = s(A_1)$. □

Comme second exemple, on traite l'équation du mouvement de la poutre de Timoshenko :

$$\begin{cases} \rho\partial_{tt}u = K\partial_{xx}u - K\partial_x v & \text{sur } \mathbb{R}_*^+ \times (0,\ell), \\ \mathrm{I}_\rho \partial_{tt}v = EI\partial_{xx}v + K(\partial_x u - v) - b(x)\partial_t v & \text{sur } \mathbb{R}_*^+ \times (0,\ell), \\ u(t,0) = u(t,\ell) = v(t,0) = v(t,\ell) = 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

où la fonction u représente le déplacement transversal de la poutre et v l'angle de rotation du filament de la poutre, $b(x)$ est une fonction continue sur $[0,\ell]$ telle que : $b(x) \geq b_0 > 0$ sur $[0,\ell]$ et ρ, K, I_ρ et I sont des constantes positives. Le cas de la stabilisation de la poutre de Timoshenko par une seule force de contrôle a été considéré par Soufyane [5] (*voir* la bibliographie qui y est proposée). On présente une démonstration du résultat de ce dernier utilisant le théorème 1. Le changement de variables :

$$p = -\sqrt{\frac{K}{\rho}}\,\partial_x u + \partial_t u, \quad q = \sqrt{\frac{K}{\rho}}\,\partial_x u + \partial_t u, \quad \varphi = -\sqrt{\frac{EI}{\mathrm{I}_\rho}}\,\partial_x v + \partial_t v, \quad \psi = \sqrt{\frac{EI}{\mathrm{I}_\rho}}\,\partial_x v + \partial_t v,$$

permet de se ramener à un système du type (1.1) avec : $M = \mathrm{diag}\left[\sqrt{\frac{K}{\rho}}, \sqrt{\frac{EI}{\mathrm{I}_\rho}}, -\sqrt{\frac{K}{\rho}}, -\sqrt{\frac{EI}{\mathrm{I}_\rho}}\right]$, $N = \begin{pmatrix} \widetilde{N} & \widetilde{N}^* \\ \widetilde{N} & \widetilde{N}^* \end{pmatrix}$, $\widetilde{N} = \begin{pmatrix} 0 & -K/2\rho\sqrt{I\rho/EI} \\ \sqrt{K\rho}/2I\rho & b(x)/2I\rho \end{pmatrix}$, les autres matrices étant définies comme dans l'exemple précédent.

THÉORÈME 3. – *Le C_0-semi-groupe $T_0(t)$ de générateur A_0 défini sur $H = \left(\mathrm{L}^2(0,1)\right)^4$ est exponentiellement stable si et seulement si $\frac{EI}{\mathrm{I}_\rho} = \frac{K}{\rho}$.*

Démonstration (*abrégée*). – Si $\frac{EI}{\mathrm{I}_\rho} \neq \frac{K}{\rho}$, alors $N_0 = \mathrm{diag}\left[0, \frac{b(x)}{2\mathrm{I}_\rho}, 0, \frac{b(x)}{2\mathrm{I}_\rho}\right]$. D'après [3], Lemma 5, p. 336, on a $\omega_{\mathrm{ess}}(T_1) = s(A_1)$. Un calcul simple montre que $s(A_1) = 0$; ce qui prouve que la condition est nécessaire.

Si $\frac{EI}{\mathrm{I}_\rho} = \frac{K}{\rho}$, alors la matrice M admet des valeurs propres doubles. On a encore $\omega_{\mathrm{ess}}(T_0) = \omega_{\mathrm{ess}}(T_1)$, où $T_1(t)$ est le semi-groupe de générateur A_1 avec N_0 diagonale par blocs comme dans (iii) de l'hypothèse (H). On montre ensuite que $T_1(t)$ est exponentiellement stable. Pour cela, on introduit la fonction $\Phi_\varepsilon(t) = E(t) + \varepsilon\left[\langle p,\varphi\rangle - \langle q,\psi\rangle + \langle p, hp\rangle + \langle \varphi, k\varphi\rangle\right]$, pour une solution (p,φ,q,ψ), où h et k sont deux fonctions C^1 en x et indépendantes de t, et

$$E(t) = \frac{1}{2}\left[\|p\|^2 + \|q\|^2 + \frac{\alpha}{2\beta}\left(\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2\right)\right]$$

est l'énergie associée à la solution. On vérifie aisément que, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe deux constantes positives $c_1$et c_2 telles que $c_1\,E(t) \leq \Phi_\varepsilon(t) \leq c_2\,E(t)$ et que, d'autre part, il existe h et k ainsi que $c > 0$ tels que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\Phi_\varepsilon(t) \leq -c\,\Phi_\varepsilon(t)$. On en déduit que : $\exists M > 0$ et $\omega > 0$ tels que $E(t) \leq M\,\mathrm{e}^{-\omega t}$, $\forall t \geq 0$. Il s'ensuit que $\omega_{\mathrm{ess}}(T_1) < 0$. À l'aide du principe d'invariance de Lasalle on montre que $\sigma(A_0) \cap i\mathbb{R} = \varnothing$. D'où le résultat. □

Références bibliographiques

[1] Ammar Khodja F., Bader A., Benabdallah A., Dynamic Stabilization of Systems via Decoupling Techniques, à paraître dans ESAIM: COCV.

[2] Kapitonov B.V., Uniform Stabilization and Exact Controllability for a Class of Coupled Hyperbolic Systems, Comp. Appl. Math. 15 (3) (1996) 199–212.

[3] Neves A.F., De Souza Ribeiro H., Lopes O., On the Spectrum of Evolution Operators Generated by Hyperbolic Systems, J. Funct. Anal. 67 (1986) 320–344.

[4] Renardy M., On the Type of Certain C_0-Semigroups, Commun. Partial Differ. Eq. 18 (7 & 8) (1993) 1299–1307.

[5] Soufyane A., Stabilisation de la poutre de Timoshenko, C. R. Acad. Sci. Paris 328 Série I (1999) 731–734.

[6] Van Neerven J., The Asymptotic Behaviour of Semigroups of Linear Operators, Operator Th. Adv. Appl. 88, Birkhäuser, 1996.