Université de Franche-Comté
Licence de Mathématiques L3-S6, 2015-16

Examen de Calcul Différentiel

Première session
Mardi 17 mai 2016
Durée 3h00
Le sujet comporte 3 pages

Aucun document n'est autorisé. Les téléphones portables, les traducteurs et les calculatrices sont interdits et doivent être rangés.

Les notations utilisées sont celles introduites dans le cours

---

Exercice 1

Soient E et F des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow F$ une application définie sur E.
Les quatre questions sont indépendantes les unes des autres.

1. Quand dit-on que f est différentiable en $a \in E$?

2. Dans cette question $E = F = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels que l'on munit d'une norme $\| \ \|$ vérifiant $\|XY\| \leq \|X\| \ \|Y\|, \quad \forall\, X, Y \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   (a) En utilisant **seulement la définition** de la différentiabilité, montrer que $f : A \in E \mapsto A^2 \in E$ est différentiable sur E et donner l'expression de sa différentielle.

   (b) Rappeler, sans la justifier, la formule donnant la différentielle de l'application $A \mapsto A^{-1}$.
   Montrer que $g : A \in E \mapsto (A^{-1})^2 \in E$ est différentiable sur un ouvert $U \subset E$ que l'on précisera et donner l'expression de sa différentielle sur U.

   (c) Montrer que f est deux fois différentiable sur E et donner l'expression de sa différentielle seconde.

3. Dans cette question $\alpha \in \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^2$, $f \in \mathscr{C}^1(E)$ vérifie $f(0) = 0$ et sa matrice jacobienne en 0 est donnée par $J_f(0) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

   (a) Donner l'expression de la différentielle de f en 0.

   (b) Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre α l'application $\partial_2 f(0)$, différentielle partielle de f par rapport à sa seconde variable du produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, définit-elle un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$?

   (c) Enoncer sous sa forme générale, le théorème des fonctions implicites.

   (d) Que permet dans le cas présent d'affirmer ce théorème ?
   Si φ désigne la fonction implicite donnée par le théorème, que vaut $d\varphi(0)$?

4. En précisant bien toutes les hypothèses concernant E, F et f, énoncer *sous sa forme la plus générale* **l'égalité** des accroîssements finis.
   Cette égalité est-elle encore valable lorsque $dim(F) > 1$? Prouver votre affirmation.

Exercice 2

Soit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles carrées d'ordre n que l'on munit d'une norme $\| \ \|$ vérifiant

$$\|XY\| \leq \|X\| \ \|Y\|, \quad \forall \ X, Y \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

Pour $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note $Tr(X)$ la trace de la matrice X.

1. Justifier l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $\forall \ X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad |Tr(X)| \leq C\|X\|$.
2. Montrer que $f : X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto Tr(X^2) \in \mathbb{R}$ est différentiable sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et donner l'expression de sa différentielle.
3. Montrer que $\forall \ (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \ |Tr(A^2) - Tr(B^2)| \leq 2C \ \max\{\|A\|, \|B\|\} \ \|A - B\|$.
4. Montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que f soit contractante sur $B_\rho(0)$ (boule ouverte de centre 0 et de rayon ρ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour la norme $\| \ \|$)

Exercice 3

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$ l'application définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2$.

1. Déterminer le gradient de f et en déduire l'expression de sa différentielle.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Etudier la nature du point critique $(1, -1)$
4. Montrer que les résultats vus en cours ne permettent pas de conclure quant à la nature du point critique $(0, 0)$.
5. Montrer que $(0, 0)$ n'est pas un extremum local de f.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne $\| \ \|_2$, on note $(e_i)_{i=1}^n$ sa base canonique et on pose

$$\overline{B} = \{x \in \mathbb{R}^n, \ \|x\|_2 \leq 1\} \ , \quad B = \{x \in \mathbb{R}^n, \ \|x\|_2 < 1\} \text{ et } S = \{x \in \mathbb{R}^n, \ \|x\|_2 = 1\}$$

Dans la suite, on considère une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie continue sur $\overline{B}$ et de classe $\mathscr{C}^2$ sur B.

On notera $\Delta f = \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ le *laplacien* de f.

1. Justifier le fait que f admet sur $\overline{B}$ un maximum et un minimum.
2. *On suppose dans cette question que f est constante sur S.*

   Montrer que dans ce cas : $\exists x_0 \in B, \ df(x_0) = 0.$ (1)

3. *On suppose dans cette question que : $\forall x \in B, \ \Delta f(x) > 0$ et $\exists x_0 \in B, \ \forall x \in \overline{B}, \ f(x) \leq f(x_0)$.*

   (a) Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $g_i : t \in \mathbb{R} \mapsto f(x_0 + te_i)$.
   Justifier le fait que g_i est bien définie dans un voisinage de $t = 0$, qu'elle y est deux fois dérivable et vérifie $g_i''(0) \leq 0$.

   (b) Montrer que $\Delta f(x_0) \leq 0$.
   (c) En déduire que si $\Delta f > 0$ sur B alors f atteint son maximum sur $\overline{B}$ en un point de S.

4. *On suppose maintenant que : $\forall x \in B,\ \Delta f(x) \geq 0$.*
   On veut alors montrer que f atteint encore son maximum sur $\overline{B}$ en un point de S
   Pour $\varepsilon > 0$, on pose $f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon \|x\|_2^2$ pour tout $x \in \overline{B}$ et on suppose que :
   $\exists x_0 \in B,\ \forall x \in \overline{B},\ f(x) \leq f(x_0)$ avec $\forall x \in S,\ f(x) < f(x_0)$.

   (a) Montrer que : $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall x \in S,\ f(x) + \varepsilon_0 < f(x_0)$.
   (b) En déduire que : $\forall x \in S,\ f_{\varepsilon_0}(x) < f_{\varepsilon_0}(x_0)$.
   (c) Justifier que $f_{\varepsilon_0} \in \mathscr{C}^2(B)$ et calculer Δf_{ε_0}.
   (d) Utiliser la question 3 pour conclure.

5. *Application.* On suppose que $f(x) = 0$ pour tout $x \in S$ et que $\Delta f(x) = 0$ pour tout $x \in B$.
   Montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \overline{B}$.

Exercice 5

1. Rappeler la définition d'un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme.

2. On pose $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ et on considère $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

   (a) Montrer que f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme local au voisinage de tout $X_0 = (x_0, y_0) \in U$ (i.e. qu'il existe un voisinage ouvert $U_0 \subset U$ de X_0 tel que f soit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de U_0 dans $f(U_0)$).
   (b) Quelle formule générale relie la différentielle de f en $X_0 \in U$ à celle de la bijection réciproque associée ? Expliciter cette relation à l'aide des matrices jacobiennes.
   (c) Enoncer le théorème d'inversion globale.
   Montrer que f n'est pas un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme global de U sur $f(U)$.

3. Montrer que si une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme local au voisinage de tout réel alors c'est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme global de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.

Université de Franche-Comté
Licence de Mathématiques L3-S6, 2015-16

Examen de Calcul Différentiel
Première session
Correction de l'Examen du 17 mai 2016

Exercice 1

1. On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire *et continue* $L : E \longrightarrow F$ telle que $\lim\limits_{h\longrightarrow 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)-Lh}{\|h\|_E}=0$, On note alors $df(a)=L\in\mathbb{B}(E,F)$ la différentielle de f en a.

2. (a) Pour $A,H\in E$, on a $f(A+H)-f(A)=AH+HA+H^2$. Posant $LH=AH+HA$ et $R(H)=H^2$ on a alors d'une part $L\in\mathbb{B}(E)$ et d'autre part $\|R(H)\|\leq\|H\|^2$ d'où $\lim\limits_{H\longrightarrow 0}\dfrac{R(H)}{\|H\|}=0$. Ceci montre que f est différentiable en A avec pour tout $H\in E$, $df(A)H=AH+HA$.

   (b) Par le cours, $A\mapsto Inv(A)=A^{-1}$ est différentiable sur $U=GL_n(\mathbb{R})$, ensemble des matrices inversibles d'ordre n, qui est un ouvert de E, avec pour tout $H\in E$, $dInv(A)H=-A^{-1}HA^{-1}$.
   Ainsi on obtient que $g=f\circ Inv$: composée d'applications différentiables et donc différentiable.
   On a alors $\forall A\in U$, $\forall H\in E$,
   $dg(A)H=df(Inv(A))\circ dInv(A)H=df(A^{-1})(-A^{-1}HA^{-1})=A^{-1}(-A^{-1}HA^{-1})+(-A^{-1}HA^{-1})A^{-1}$
   et donc $dg(A)H=-A^{-1}(A^{-1}H+HA^{-1})A^{-1}$.

   (c) Posant $f_1 : A\in E\mapsto(A,A)\in E\times E$ (linéaire continue donc deux fois différentiable) et $f_2 : (A,B)\in E\times E\mapsto AB\in E$ (bilinéaire continue donc deux fois différentiable), on obtient que $f=f_2\circ f_1$ est deux fois différentiable sur E.
   Pour déterminer l'expression de sa différentielle seconde, on pose $g_H(A)=df(A)H$ et on a alors (cours) pour tout $K\in E$, $d^2f(A)(H,K)=dg_H(A)K=g_H(K)$ (puisque g_H est linéaire) et donc $d^2f(A)(H,K)=HK+KH$.

3. (a) On a pour tout $h\in\mathbb{R}$, $k=(k_1,k_2)\in\mathbb{R}^2$, $df(0)(h,k)=J_f(0)\begin{pmatrix}h\\k_1\\k_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-h+2k_1\\-h+\alpha k_2\end{pmatrix}$.

   (b) On a $\partial_2 f(0)\in Isom(\mathbb{R}^2)$ si et seulement si la jacobienne associée est inversible donc si et seulement si $det\begin{pmatrix}2&0\\0&\alpha\end{pmatrix}\neq 0$ ce qui donne $\alpha\neq 0$.

   (c) Soit $k\in\mathbb{N}$ et E_1, E_2, F des espaces de Banach vérifiant $dim(E_2)=dim(F)$ si la dimension est finie, $U\subset E_1\times E_2$ un ouvert, et $f : U\longrightarrow F$ telle que $f\in\mathscr{C}^{k+1}(U)$.
   S'il existe $(x_0,y_0)\in U$ tel que $f(x_0,y_0)=0$ et $\partial_2 f(x_0,y_0)\in\mathrm{Isom}(E_2,F)$ alors il existe $U_1\subset E_1$ voisinage ouvert de x_0, $U_2\subset E_2$ voisinage ouvert de y_0 et une application $\varphi : U_1\longrightarrow U_2$, $\varphi\in\mathscr{C}^{k+1}(U_1)$ tels que $\begin{pmatrix}(x,y)\in U_1\times U_2\\f(x,y)=0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}x\in U_1\\y=\varphi(x)\end{pmatrix}$.

   (d) Ici, l'application $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ vérifie $f(0)=0$ et $\partial_2 f(0)\in Isom(\mathbb{R}^2)$. Donc il existe $U_1\subset\mathbb{R}$ voisinage ouvert de 0, $U_2\subset\mathbb{R}^2$ voisinage ouvert de 0 et $\varphi : U_1\longrightarrow U_2$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que pour tout $(x,y)\in U_1\times U_2$, on a $\Big(f(x,y)=0\Longleftrightarrow y=\varphi(x)\Big)$.
   Par ailleurs, on a $d\varphi(0)=-\Big(\partial_2 f(0)\Big)^{-1}\partial_1 f(0)\sim-\begin{pmatrix}2&0\\0&\alpha\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac12&0\\0&\frac1\alpha\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac12\\\frac1\alpha\end{pmatrix}$ soit $\forall h\in\mathbb{R}$, $d\varphi(0)h=\begin{pmatrix}\frac12 h\\\frac1\alpha h\end{pmatrix}$.

4. Enoncé :
soit E e.v.n, $U \subset E$ un ouvert et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur U et $a, b \in E$ tels que $[a, b] \subset U$. Si f est continue sur $[a, b]$ et différentiable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = df(c)(b - a)$.
Lorsque $dim(F) > 1$:
le résultat n'est plus valable comme le montre la fonction $f : t \in \mathbb{R} \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ qui est continue sur $[0, 2\pi]$, dérivable sur $]0, 2\pi[$ et pour laquelle $\forall c \in]0, 2\pi[$, $f'(c) \neq 0 = f(2\pi) - f(0)$.

Exercice 2

1. Cette propriété traduit le fait que la trace est continue (puisque linéaire en dimension finie).

2. Par l'exercice 1 question 2a, l'application $g : X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto X^2 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est différentiable et pour tout $X, H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $dg(X)H = XH + HX$.
Donc $f = Tr \circ g$ est différentiable car Tr l'est (linéaire continue) et g aussi.
De plus, pour tout $X, H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,
$$f(X)H = Tr(g(X)) \ \circ \ dg(X)H = Tr(dg(X)H) = Tr(XH + HX) = Tr(XH) + Tr(HX) = 2Tr(XH).$$

3. Fixons $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ arbitraires avec $A \neq B$. Alors pour tout $X \in [A, B]$, et tout $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
$$|df(X)H| = |2Tr(XH)| \leqslant 2C\|X\| \ \|H\|,$$
d'où $\|df(X)\| \leqslant 2C\|X\| \leqslant 2CMax(\|A\|, \|B\|)$ et on conclut par le théorème des accroîssements finis.

4. Puisque f est différentiable, pour qu'elle soit contractante sur $B_\rho(0)$, il suffit que $\|df\| < 1$ sur $B_\rho(0)$. Or avec ce qu'on vient de voir, on a $\|df(X)\| \leqslant 2C\|X\| < 2C\rho$ pour tout $X \in B_\rho(0)$ et il suffit donc de prendre $\rho \leq \frac{1}{2C}$.

Exercice 3

1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \ , \ \frac{\partial f}{\partial y} \right)(x, y) = \left(\ 4x^3 - 2(x - y) \ , \ 4y^3 + 2(x - y) \ \right)$, et $\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2$, on a $df(x, y)(h, k) = \nabla f(x, y). \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = (4x^3 - 2(x - y))h + (4y^3 + 2(x - y))k.$

2. Les points critiques de f sont les solutions de $df(x, y) = 0$ soit à résoudre $4x^3 - 2(x - y) = 0$ et $4y^3 + 2(x - y) = 0$. En ajoutant ces 2 équations on trouve que $x = -y$ avec donc $2x^3 - 2x = 0$ ce qui donne $(x, y) \in \{(0, 0), (1, -1), (-1, 1)\}$.

3.4. La matrice hessienne de f en (x, y) est donnée par
$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & 2 \\ 2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour le point critique $(1, -1)$, on trouve $H_f(1, -1) = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$ qui est définie positive (déterminant et trace strictement positifs) et donc il s'agit d'un minimum.
Concernant le point critique $(0, 0)$, on a $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ dont le déterminant vaut 0 ce qui montre que $H_f(0, 0)$ n'est pas définie et on ne peut donc pas conclure directement.

5. Puisque $f(0, 0) = 0$ et que $f(x, x) = 2x^4 > 0$ et $f(x, -x) = 2x^2(x^2 - 2) < 0$, on obtient que pour tout $x \in] - \sqrt{2}, \sqrt{2}[$ non nul, $f(x, -x) < f(0, 0) < f(x, x)$ et donc $(0, 0)$ n'est pas un extremum puisqu'il découle de cette propriété que pour tout voisinage ouvert V de $(0, 0)$, il existe $X_0, X_1 \in V$ tels que $f(X_0) < f(0)$ et $f(X_1) > f(0)$.

Exercice 4

1. Puisque f est continue sur $\overline{B}$ qui est compact, elle y est bornée et atteint ses bornes donc admet sur $\overline{B}$ un maximum et un minimum.

2. Puisque f est constante sur S, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f = \alpha$ sur S.
Si $f = \alpha$ sur $\overline{B}$ alors le résultat est évident.
Si f n'est pas constante puisqu'elle atteint un maximum et un minimum sur $\overline{B}$ nécessairement au moins l'un des deux appartient à B. Puisque f est différentiable sur B, un tel point est forcément critique pour f ce qui montre (1).

3. (a) Puisque $x_0 \in B$ ouvert, il existe $\rho > 0$, $B_\rho(x_0) \subset B$ et il suffit donc de choisir $t \in \mathbb{R}$ tel que $\|te_i\| < \rho$ donc $|t| < \rho$ pour que g_i est bien définie.
Puisque $f \in \mathscr{C}^2(B)$, et $\psi_i : t \mapsto x_0 + te_i$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ avec $\psi_i(]-\rho,\rho[) \subset B$, on a bien que $g_i = f \circ \psi_i$ de classe $\mathscr{C}^2$ (donc deux fois différentiable) en $t = 0$.
Ainsi par hypothèse, $\forall |t| < \rho$, $f(x_0 + te_i) \leq f(x_0)$ et donc $g_i(t) \leq g_i(0)$: $t = 0$ est donc un maximum pour g_i et donc $g_i''(0) \leq 0$ (g étant deux fois dérivable).
   (b) On a $g_i'(t) = df(x_0 + te_i)e_i$ et puisque f est deux fois différentiable, $g_i''(t) = d^2 f(x_0 + te_i)(e_i, e_i)$ et donc $g_i''(0) = d^2 f(x_0)(e_i, e_i) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0)$ d'où $\Delta f(x_0) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) = \sum_{i=1}^{n} g_i''(0) \leq 0$ ce qui est impossible puisque par hypothèse $\Delta f(x_0) > 0$.
   (c) On vient de montrer que si $\Delta f > 0$ sur B alors le maximum x_0 de f sur $\overline{B}$ n'est pas dans B. Puisque ce maximum existe c'est qu'il est situé sur S.

4. (a) Par hypothèse, on a $\forall x \in S$, $f(x) < f(x_0)$.
Or f est continue sur S qui est compact et elle atteint donc un maximum sur S en $x_1 \in S$: $\forall x \in S$, $f(x) \leq f(x_1)$.
Puisque $x_1 \in S$, en particulier $f(x_1) < f(x_0)$, et donc $\exists \varepsilon_0 > 0$, $\forall x \in S$, $f(x) + \varepsilon_0 < f(x_0)$: il suffit en effet de choisir $0 < \varepsilon_0 < f(x_0) - f(x_1)$ pour avoir $f(x) + \varepsilon_0 < f(x) + f(x_0) - f(x_1) \leq f(x_0) + 0$ pour tout $x \in S$.
   (b) On en déduit que $\forall x \in S$, $f_{\varepsilon_0}(x) = f(x) + \varepsilon_0 \|x\|_2^2 = f(x) + \varepsilon_0 < f(x_0) \leq f(x_0) + \varepsilon_0 \|x_0\|_2^2 = f_{\varepsilon_0}(x_0)$.
Donc f_{ε_0} admet un maximum sur $\overline{B}$ en $x_0 \in B$.
   (c) On a $f_{\varepsilon_0} \in \mathscr{C}^2(B)$ car f l'est et $x \mapsto \|x\|_2^2 = x.x$ l'est aussi car composée de $x \mapsto (x, x)$ (linéaire continue donc $\mathscr{C}^2$) et du produit scalaire euclidien (bilinéaire continue donc $\mathscr{C}^2$).
Calculons alors $\Delta f_{\varepsilon_0}(x)$ pour $x \in B$.
On a $f_{\varepsilon_0}(x) = f(x) + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j^2$ d'où $\frac{\partial f_{\varepsilon_0}}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + 2x_i$ puis $\frac{\partial^2 f_{\varepsilon_0}}{\partial x_i^2}(x) = \frac{\partial f^2}{\partial x_i^2}(x) + 2$. Ainsi, on trouve $\Delta f_{\varepsilon_0}(x) = \Delta f(x) + 2n$.
   (d) Par la question 4b, f_{ε_0} admet son maximum sur $\overline{B}$ en un point $x_0 \in B$.
Or, $f_{\varepsilon_0} \in \mathscr{C}^2(B)$ vérifie $\Delta f_{\varepsilon_0}(x) = \Delta f(x) + 2n > 0$ et donc par la question 3c on en conclut que f_{ε_0} admet son maximum sur $\overline{B}$ en un point $x_0 \in S$ ce qui conduit à une contradiction (puisque f_{ε_0} ne peut être constante). On ne peut donc pas avoir $x_0 \in B$ et $x_0 \notin S$ ie $\exists x_0 \in B$, $\forall x \in \overline{B}$, $f(x) \leq f(x_0)$ avec $\forall x \in S$, $f(x) < f(x_0)$ donc nécessairement $x_0 \in S$.

5. On a $\Delta f = 0 \Longleftrightarrow \Big(\Delta f \geq 0 \text{ et } \Delta f \leq 0\Big)$.
Or, si $\Delta f \geq 0$ sur B alors f atteint son maximum sur $\overline{B}$ en un point de S (où elle est nulle) et donc $f \leq 0$ sur $\overline{B}$.
De plus, si $\Delta f \leq 0$ alors $\Delta(-f) \geq 0$ et donc $-f$ atteint son maximum sur $\overline{B}$ en un point de S (où elle est nulle) et donc $-f \leq 0$ à savoir $f \geq 0$ sur $\overline{B}$.
On obtient donc bien que $f = 0$ sur $\overline{B}$.

Exercice 5

1. f est un difféomorphisme sur U ouvert si $f \in \mathscr{C}^1(U)$ est bijective de bijection réciproque $\mathscr{C}^1$ sur $f(U)$.

2. (a) Soit $X_0 = (x_0, y_0) \in U$.
   On a $f \in \mathscr{C}^1(U)$ (dérivées partielles continues) de jacobienne $J_f(X_0) = \begin{pmatrix} 2x_0 & -2y_0 \\ 2y_0 & 2x_0 \end{pmatrix}$, inversible puisque son déterminant vaut $4(x_0^2 + y_0^2) \neq 0$ pour $X_0 \in U$. Donc $df(X_0) \in Isom(\mathbb{R}^2)$ et on peut donc appliquer le théorème d'inversion locale qui donne le résultat demandé.

   (b) On note $g : V = f(U) \longrightarrow U$ la bijection réciproque associée. On a $dg(f(X_0)) = (df(X_0))^{-1}$ ce qui se traduit par $J_g(f(X_0)) = (J_f(X_0))^{-1}$ pour les jacobiennes.

   (c) Puisque $f \in \mathscr{C}^1(U)$, on sait qu'elle définit un difféomorphisme global de U dans $f(U)$ si et seulement si elle est injective et que $df(X) \in Isom(\mathbb{R}^2)$ pour tout $X \in U$ (Th. inversion globale). Or, pour tout $x \neq 0$, on a $f(-x, -y) = f(x, y)$ ce qui montre que f n'est pas injective sur U et que donc ce n'est pas un difféomorphisme global sur U.

3. Si f est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de $\mathbb{R}$ alors par le théorème d'inversion globale, ce sera un difféomorphisme global dès lors qu'elle est injective.
   Or c'est nécessairement le cas puisque s'il existait $a < b$ réels tels que $f(a) = f(b)$ alors par le théorème de Rolle, on aurait $\exists c \in]a, b[$, $f'(c) = 0$ et f ne serait donc pas un difféomorphisme local au voisinage de c.