

# Caractérisation et approximation des limites singulières : le cas des lois de conservation

Boris Andreianov

Université de Franche-Comté, Besançon, France

basé sur les travaux en collaboration avec

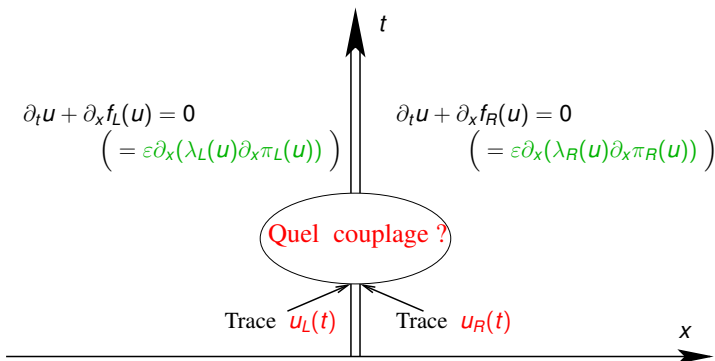
Clément Cancès, Paola Goatin, Kenneth H. Karlsen,  
Darko Mitrović, Nils H. Risebro, Karima Sbihi, Nicolas Seguin

# Motivations

## Un exemple de problème dont il sera question.

Equation de Buckley-Leverett 1D dans un milieu composé de deux roches avec propriétés distinctes

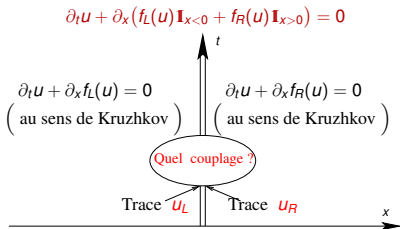
$$\partial_t u + \partial_x (f_L(u) \mathbf{1}_{x < 0} + f_R(u) \mathbf{1}_{x > 0}) = 0$$



**Remarque :** en premier temps, on est obligé de voir la “solution”  $u$  d’un tel problème comme la limite des solutions  $u^\varepsilon$  des problèmes déjà bien compris :  $u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u^\varepsilon$ .

## Les questions qui se posent

### Loi de conservation avec flux discontinu :



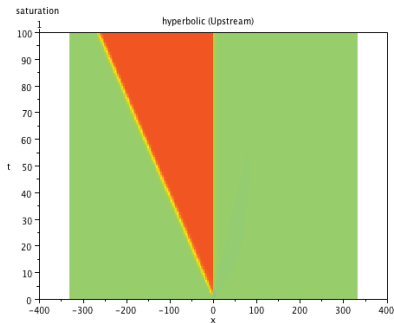
- Quelle notion de solution ?  
comment caractériser la solution *intransèquement* ?
- Unicité ?
- Existence (passage à la limite) ?  
stabilité de la formulation ?
- Approximation numérique ?
- *Limite singulière et propriétés héréditaires*  
En quoi le modèle “se souvient” des modèles plus complexes  
(cas Buckley-Leverett : modèles avec  $\varepsilon$ ) dont il serait la limite ?

---

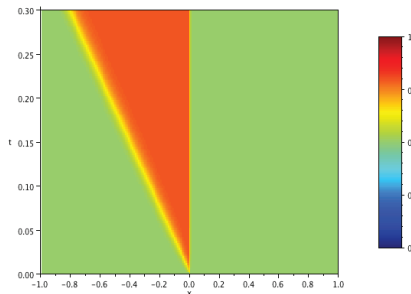
**Remarque :** dans le cas “sans interface”,  
la notion de solution *entropique* dite *de Kruzhkov*  
+ approximations Volumes Finis avec *flux monotones*  
répondent à toutes ces questions.

## Exemples numériques : l'intérêt du modèle limite

Le comportement qualitatif et même quantitatif du **modèle approché** et celui du **modèle limite** sont très proches...



**(a)** Solution numérique  $u_h$  du problème limite (hyperbolique)

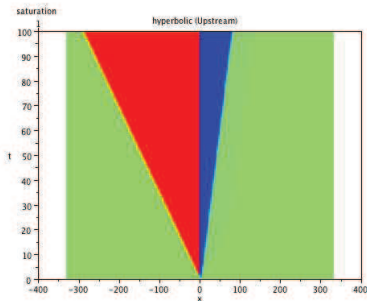


**(b)** Solution numérique  $u_h^\varepsilon$  du problème parabolique ( $\varepsilon = 10^{-3}$ )

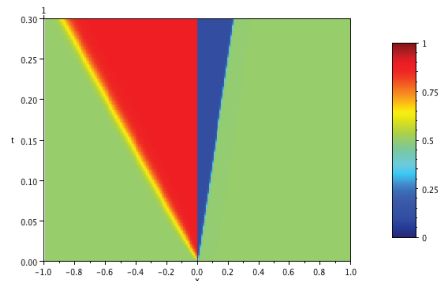
**Modèle limite** : grand gain dans le temps de calcul des solutions numériques ( ici : avec  $\varepsilon = 0^+$ , le calcul est accéléré de facteur 800 ! )

## Exemples numériques : le modèle est limite sous-déterminé

Pour un autre jeu de valeurs des paramètres  $\pi_{L,R}(\cdot)$ ,  
 les solutions (pour  $\varepsilon > 0$  et  $\varepsilon = 0^+$ ) restent proches l'une de l'autre...  
 mais on trouve des solutions très différentes du cas précédent !



(c) Solution numérique  $u_h$  du problème limite (hyperbolique)



(d) Solution numérique  $u_h^\varepsilon$  du problème parabolique ( $\varepsilon = 10^{-3}$ )

**Conclusion :** l'équation limite dépend – implicitement ! – de  $\pi_{L,R}(\cdot)$   
**Objectif :** comprendre et formaliser cette dépendance  
 en explicitant le couplage interfacial sous-jacent

## Plan de l'exposé

- 1 Problème étudié et questions qui se posent :** Fait !!
- 2 Solutions de Kruzhkov pour la loi de conservation dans  $\mathbb{R}$ .**  
Notion de solution – techniques – approximation numérique
- 3 Problèmes des lois de conservation avec interface interne.**  
Cadre des “flux discontinus”. Théorie des germes  $L^1$ -dissipatifs.
- 4 Problèmes aux limites : conditions aux limites dissipatives.**  
Condition au Bord (CB) prescrite par un graphe monotone.
- 5 Le problème avec interface interne : analogie avec les CB.**  
Condition de couplage à l'Interface (CCI) prescrite par un graphe monotone.

# Préliminaires

(LdC dans l'espace entier)



## Solutions classiques, faibles, admissibles. Limites de viscosité.

**Fondements** : la loi de conservation  $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$  dans  $\mathbb{R}$ .

- Méthode des caractéristiques,  
pour avoir une idée des solutions classiques
- Données classiques :
  - unique solution classique locale en temps
  - non-existence globalement en temps
- Solutions faibles  $\equiv$  au sens des distributions :
  - exemples explicites de solutions discontinues  $C^1$ /morceaux  
pour prolonger les solutions classiques globalement en temps
  - exemples de non-unicité
- Admissibilité des solutions faibles (sélectionner “la bonne”):
  - divers arguments math/modélisation
  - au croisement des deux :  
définition de  $u$  comme limite des  $u^\varepsilon$   
solutions de  $\partial_t u + \partial_x f(u) = \varepsilon \partial_{xx}^2 u$ .

Il s'agit d'une *limite singulière*...

## Solutions classiques, faibles, admissibles. Limites de viscosité.

**Fondements** : la loi de conservation  $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$  dans  $\mathbb{R}$ .

- Méthode des caractéristiques,  
pour avoir une idée des solutions classiques
- Données classiques :
  - unique solution classique locale en temps
  - non-existence globalement en temps
- Solutions faibles  $\equiv$  au sens des distributions :
  - exemples explicites de solutions discontinues  $C^1$ /morceaux  
pour prolonger les solutions classiques globalement en temps
  - exemples de non-unicité
- Admissibilité des solutions faibles (sélectionner “la bonne”) :
  - divers arguments math/modélisation
  - au croisement des deux :  
définition de  $u$  comme limite des  $u^\varepsilon$   
solutions de  $\partial_t u + \partial_x f(u) = \varepsilon \partial_{xx}^2 u$ .

Il s'agit d'une *limite singulière*...

## Une information héréditaire : inégalité de Kato

Notre  $u$  définie comme limite de  $u^\varepsilon$  est singulière à plusieurs titres.

- À la limite on perd le caractère parabolique de l'équation. On gagne, par exemple, la **vitesse finie de propagation**
- $u$  est différente de  $u^\varepsilon$  qualitativement : **apparaissent des ondes (de choc, de raréfaction)** qui sont des singularités spécifiques
- **On perd la régularité** parabolique ( $H^1$  en espace, voire classique):  $u$  est  $L^\infty$  ou, au mieux,  $u$  est à variation bornée (BV)
- **Approximation numérique de  $u$  délicate** :  
elle requiert des méthodes très différentes de celles pour  $u^\varepsilon$

Mais  $u$  hérite de certaines propriétés "plus fines" de  $u^\varepsilon$  :

- **formulation faible**,  
notamment, le coté conservatif (forme divergentielle)
- condition  $E$  (Oleïnik) sur les variations de  $u^\varepsilon$ :  $\partial_x u^\varepsilon \leq \frac{\text{const}}{t}$
- ...
- **inégalité de Kato** : pour  $u^\varepsilon, \hat{u}^\varepsilon$  deux solutions,  
$$\partial_t |u^\varepsilon - \hat{u}^\varepsilon| + \partial_x \text{sign}(u^\varepsilon - \hat{u}^\varepsilon)(f(u^\varepsilon) - f(\hat{u}^\varepsilon)) \leq \varepsilon \text{Reste}^\varepsilon \text{ dans } \mathcal{D}'$$

## Une information héréditaire : inégalité de Kato

Notre  $u$  définie comme limite de  $u^\varepsilon$  est singulière à plusieurs titres.

- À la limite on perd le caractère parabolique de l'équation. On gagne, par exemple, la **vitesse finie de propagation**
- $u$  est différente de  $u^\varepsilon$  qualitativement : **apparaissent des ondes (de choc, de raréfaction)** qui sont des singularités spécifiques
- **On perd la régularité** parabolique ( $H^1$  en espace, voire classique):  $u$  est  $L^\infty$  ou, au mieux,  $u$  est à variation bornée ( $BV$ )
- **Approximation numérique de  $u$  délicate** : elle requiert des méthodes très différentes de celles pour  $u^\varepsilon$

Mais  $u$  hérite de certaines propriétés "plus fines" de  $u^\varepsilon$  :

- **formulation faible**,  
**notamment, le coté conservatif** (forme divergentielle)
- condition  $E$  (Oleïnik) sur les variations de  $u^\varepsilon$ :  $\partial_x u^\varepsilon \leq \frac{\text{const}}{t}$
- ...
- **inégalité de Kato** : pour  $u^\varepsilon, \hat{u}^\varepsilon$  deux solutions,

$$\partial_t |u^\varepsilon - \hat{u}^\varepsilon| + \partial_x \text{sign}(u^\varepsilon - \hat{u}^\varepsilon)(f(u^\varepsilon) - f(\hat{u}^\varepsilon)) \leq \varepsilon \text{Reste}^\varepsilon \text{ dans } \mathcal{D}'$$

## Solutions entropiques de Kruzhkov. Existence. Unicité. Traces.

**Définition** (caractérisation intrinsèque de solution)

$u \in L_{t,x}^\infty$ ,  $u \in C_t(L_x^{1,loc})$  est dite **solution entropique de Kruzhkov** pour  $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$  si

$$\forall k \in \mathbb{R} \quad \partial_t |u - k| + \partial_x \text{sign}(u - k)(f(u) - f(k)) \leq 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'.$$

Ici,  $k$  joue le rôle de  $\hat{u}$  dans l'inégalité de Kato .

En effet,  $k$  est une solution évidente (faible, admissible) !

**Theorème** (le problème de Cauchy est bien posé)

Pour toute donnée initiale  $u_0 \in L^\infty$ , le problème de Cauchy pour  $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$  admet une unique solution de Kruzhkov.

**Elements de preuve :**

- existence des  $u^\varepsilon$  (variante : existence des approx. numériques!)  
puis passage à la limite dans l'inégalité de Kato, avec  $\hat{u}^\varepsilon = k$
- unicité, via "dédoublage des variables": utiliser  $k = \hat{u}(s, y)$  pour retrouver l'inégalité de Kato générale entre  $u$  et  $\hat{u}$ .

Inégalité de Kato + vitesse finie de propagation donnent  
contraction  $L^1$ :  $\|u(t, \cdot) - \hat{u}(t, \cdot)\|_{L^1(\dots)} \leq \|u_0 - \hat{u}_0\|_{L^1(\dots)}$ .

## Solutions entropiques de Kruzhkov. Existence. Unicité. Traces.

**Définition** (caractérisation intrinsèque de solution)

$u \in L_{t,x}^\infty$ ,  $u \in C_t(L_x^{1,loc})$  est dite **solution entropique de Kruzhkov** pour  $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$  si

$$\forall k \in \mathbb{R} \quad \partial_t |u - k| + \partial_x \text{sign}(u - k)(f(u) - f(k)) \leq 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'.$$

Ici,  $k$  joue le rôle de  $\hat{u}$  dans l'inégalité de Kato .

En effet,  $k$  est une solution évidente (faible, admissible) !

**Theorème** (le problème de Cauchy est bien posé)

Pour toute donnée initiale  $u_0 \in L^\infty$ , **le problème de Cauchy** pour  $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$  **admet une unique solution de Kruzhkov.**

**Elements de preuve :**

- existence des  $u^\varepsilon$  (variante : existence des approx. numériques!)  
puis passage à la limite dans l'inégalité de Kato, avec  $\hat{u}^\varepsilon = k$
- unicité, via "dédoublage des variables": utiliser  $k = \hat{u}(s, y)$  pour retrouver l'inégalité de Kato générale entre  $u$  et  $\hat{u}$ .

Inégalité de Kato + vitesse finie de propagation donnent  
**contraction  $L^1$** :  $\|u(t, \cdot) - \hat{u}(t, \cdot)\|_{L^1(\dots)} \leq \|u_0 - \hat{u}_0\|_{L^1(\dots)}$ .

## Existence des traces pour une solution entropique

La définition de Kruzhkov peut être “localisée”. On a alors

$$\partial_t u + \partial_x (f_L(u) \mathbf{1}_{x < 0} + f_R(u) \mathbf{1}_{x > 0}) = 0$$

$\left( \partial_t u + \partial_x f_L(u) = 0 \right)$        $\left( \partial_t u + \partial_x f_R(u) = 0 \right)$   
 ( au sens de Kruzhkov )      ( au sens de Kruzhkov )

Trace  $u_L$       Trace  $u_R$

Quel couplage ?

**Theorème** (un résultat très fin de régularité)

Toute solution de Kruzhkov *locale* admet une trace au sens fort (convergence p.p.) au bord.

( **Enoncé mensonger ! - légèrement -** mais utilisable en pratique).

Preuve : utilise la formulation cinétique + non-linéarité du flux  $f(\cdot)$ .

## Approximation volumes finis, flux numériques monotones

Pour approcher les solutions de Kruzhkov numériquement, on ne veut (évidemment !) pas utiliser le calcul des  $u^\varepsilon$ .

Mais **comment capturer l'“admissibilité” (les inégalités de Kruzhkov) ?**

**Réponse classique : utiliser une méthode de volumes finis.**

---

Au  $n$ ème pas de temps, utiliser Euler pour calculer solution  $u^n(\cdot) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} u_i^n \mathbf{1}_{[(i-1)\Delta x, i\Delta x[}$  constante/morceaux en  $x$ :

$$u_i^n = u_i^{n-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}_{i,i+1}^? - \mathcal{F}_{i-1,i}^?)$$

avec  $\mathcal{F}_{i+1,i} \sim f(u_{i+1}) \sim f(u_i)$  (consistance).

---

L'approximation du type suivant marche :  $\mathcal{F}_{i,i+1} = G(u_i, u_{i+1})$  où

- (consistance du flux numérique)  $G(a, a) = f(a)$
- (monotonie du flux numérique)  
pour tout  $b$ ,  $G(\cdot, b)$  croissante au sens large  
pour tout  $a$ ,  $G(a, \cdot)$  décroissante au sens large
- Si schéma explicite, une condition (dite CFL) :  $\frac{\Delta t}{\Delta x}$  petit

**Remarque.** Respect de ces conditions  $\Rightarrow$  inégalités de Kato OK  
Non-respect de ces conditions  $\Rightarrow$  gros problèmes...



## Approximation volumes finis, flux numériques monotones

Pour approcher les solutions de Kruzhkov numériquement, on ne veut (évidemment !) pas utiliser le calcul des  $u^\varepsilon$ .

Mais **comment capturer l'“admissibilité” (les inégalités de Kruzhkov) ?**

**Réponse classique : utiliser une méthode de volumes finis.**

---

Au  $n$ ème pas de temps, utiliser Euler pour calculer solution  $u^n(\cdot) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} u_i^n \mathbf{1}_{[(i-1)\Delta x, i\Delta x[}$  constante/morceaux en  $x$ :

$$u_i^n = u_i^{n-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \mathcal{F}_{i,i+1}^? - \mathcal{F}_{i-1,i}^? \right)$$

avec  $\mathcal{F}_{i+1,i} \sim f(u_{i+1}) \sim f(u_i)$  (consistance).

---

L'approximation du type suivant marche :  $\mathcal{F}_{i,i+1} = G(u_i, u_{i+1})$  où

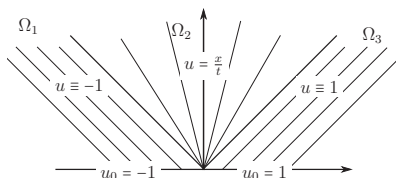
- (consistance du flux numérique)  $G(a, a) = f(a)$
- (monotonie du flux numérique)  
pour tout  $b$ ,  $G(\cdot, b)$  croissante au sens large  
pour tout  $a$ ,  $G(a, \cdot)$  décroissante au sens large
- Si schéma explicite, une condition (dite CFL) :  $\frac{\Delta t}{\Delta x}$  petit

**Remarque.** Respect de ces conditions  $\Rightarrow$  inégalités de Kato OK  
Non-respect de ces conditions  $\Rightarrow$  gros problèmes...

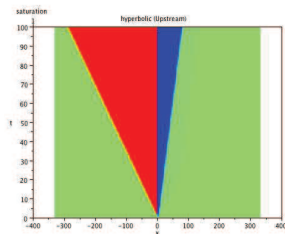
## Problème de Riemann, flux de Godunov

**Question spécifique** aux lois de conservation  $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$  :  
**résolution des problèmes de Riemann** (donnée  $u_0$  type Heaviside).

données :  $u_-, u_+ \in \mathbb{R}$ ,  $u_0(x) = u_- \mathbf{1}_{x < 0} + u_+ \mathbf{1}_{x > 0}$



(e) Solution d'un pb. de Riemann



(f) Solution d'un pb. de Riemann

Ceci permet de :

- approcher la solution d'un problème de Cauchy (WFT, Glimm...)
- définir un flux monotone particulier : **flux de Godunov**

$G_{\text{God}}(a, b) =$  la valeur du flux  $f(u)|_{t=0}$

dans le pb. de Riemann avec  $u_- = a$ ,  $u_+ = b$

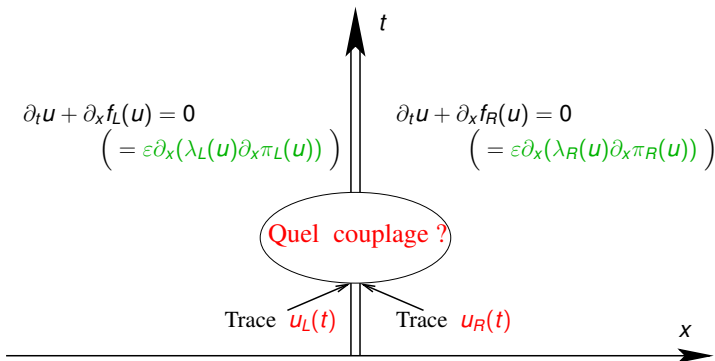
“Flux discontinu”

ou

LdC avec interface interne

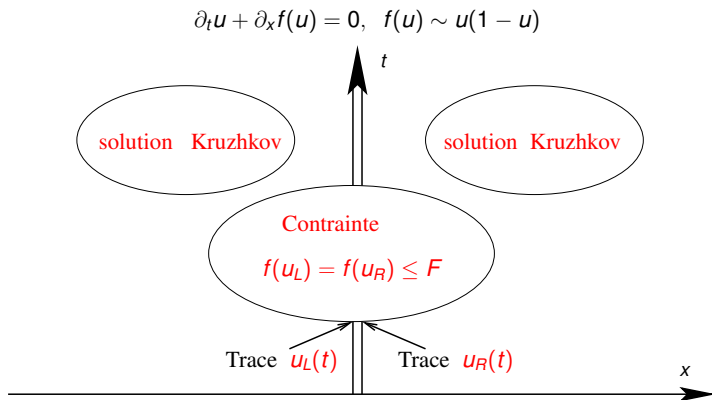
## Exemple 1 : Buckley-Leverett dans un milieu poreux à Deux Roches

$$\partial_t u + \partial_x (f_L(u) \mathbf{1}_{x < 0} + f_R(u) \mathbf{1}_{x > 0}) = 0$$



Limite singulière de l'approximation par capillarité évanescence.

## Exemple 2 : Trafic Routier avec Contrainte

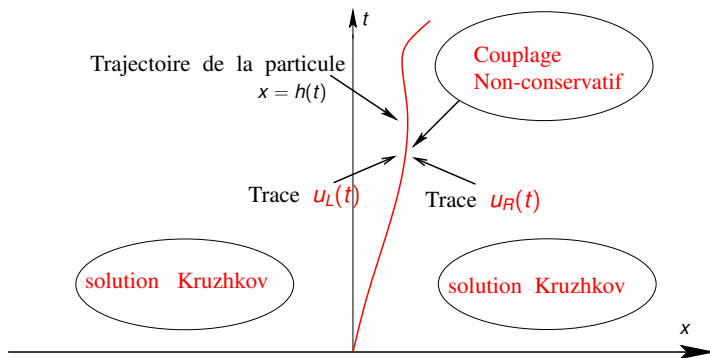


On peut voir le problème comme la limite (singulière) de l'approximation volumes finis "naïve" avec flux numérique

- consistant et monotone, par ex.  $\mathcal{F}_{i,i+1} = G_{\text{God}}(u_i, u_{i+1})$
- **contraint à l'interface  $\{x = 0\}$  :  $\mathcal{F}_{0,1} = \min\{G_{\text{God}}(u_0, u_1), F\}$ .**

## Exemple 3 : Couplage Burgers-Particule par une force de trainée

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} = -(u - h'(t))\delta_0(x - h(t)), \\ h''(t) = u(t, h(t)) - h'(t) \end{cases}$$

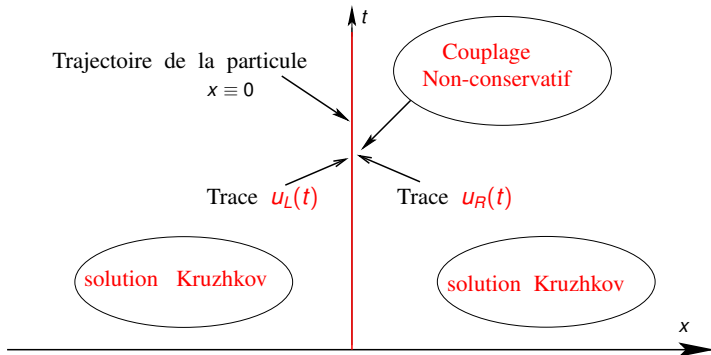


- Arguments de splitting (temps fractionnaire) ou de point fixe  $\Rightarrow$  découplage
- Changement de variable  $\Rightarrow$  réduction au cas  $h' \equiv 0$ .

## Exemple 3bis : Burgers perturbé par une particule rigide

Version simplifiée du problème précédent :

$$\partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} = -u \delta_0(x)$$



On peut (on doit...) voir le problème comme la limite (singulière) de l'équation de Burgers avec particule épaissie : source  $\delta_0 \equiv \partial_x(\text{Heaviside})$  remplacé par  $\partial_x(\text{Heaviside} * \rho^\varepsilon)$ .

## Solutions de Kruzhkov locales et dissipation à l'interface.

### État de l'art :

- beaucoup de définitions d'admissibilité avec existence, unicité
- (prèsque) aucune preuve qui arrive à “ne pas regarder l'interface”

### Schéma des preuves d'unicité :

- solutions Kruzhkov locales  $\Rightarrow$  **inégalité de Kato locale** :

$$-\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left( |u - \hat{u}| \partial_t \xi_h + \text{sign}(u - \hat{u}) (f(x, u) - f(x, \hat{u})) \partial_x \xi_h \right) \leq 0$$

avec  $\xi_h \equiv 0$  sur l'interface

- **passage à la limite**  $\xi_h \rightarrow \mathbf{1}_{[0, T]}(t) \mathbf{1}_{\mathbb{R}}(x)$ , existence des traces  $u_{L,R}(\cdot)$  :

$$\begin{aligned} \|u - \hat{u}\|_{L^1(\mathbb{R})} - \|u_0 - \hat{u}_0\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ \leq - \left( \text{sign}(u_L - \hat{u}_L) (f_L(u_L) - f_L(\hat{u}_L)) \right. \\ \left. - \text{sign}(u_R - \hat{u}_R) (f_R(u_L) - f_R(\hat{u}_R)) \right) =: \Delta_{u_{L,R}, \hat{u}_{L,R}} \stackrel{?}{\leq} 0 \end{aligned}$$

- justification du fait que la partie droite  $\Delta_{u_{L,R}, \hat{u}_{L,R}}$  est négative ,  
grâce aux conditions d'“admissibilité à l'interface”  $\Rightarrow$  **contraction  $L^1$**



## Tentatives d'adaptation des inégalités de Kruzhkov.

Quelles conditions d'admissibilité fournissent  $\Delta_{\dots} \leq 0$ , et comment ?  
 Essayons de partir sur la base des inégalités de Kruzhkov.

**Difficulté** : dans le cas  $x$ -dépendant,  $k \equiv \text{const}$  n'est plus solution

Adaptation classique (Kruzhkov) pour flux  $f(x, u)$  régulier :

$$\partial_t |u - k| + \partial_x \text{sign}(u - k)(f(x, u) - f(x, k)) \leq -\text{sign}(u - k) \partial_x f(x, k).$$

Si  $x \mapsto f(x, k)$  a des sauts, ou a un problème de multiplication de distributions. Majoration ( $\Rightarrow$  perte d'information)  $\Rightarrow$  formulation

$$\partial_t |u - k| + \partial_x \text{sign}(u - k)(f(x, u) - f(x, k)) \leq |\partial_x f(x, k)| \equiv |f_R(k) - f_L(k)| \delta_0(x).$$

Avec cette formulation :  $\Delta_{\dots} \leq 0$  et l'unicité peut être faux.

---

Une meilleure (?) formulation ([A., D. Mitrović], en préparation):

$u$  est dite admissible s'il existe  $p_u$  définie sur l'interface telle que

$$\partial_t |u - k| + \partial_x \text{sign}(u - k)(f(x, u) - f(x, k)) \leq -\text{sign}(p_u(t) - k)(f_R(k) - f_L(k)) \delta_0(x).$$

Existence, unicité vraies mais preuves totalement indirectes !

**Question ouverte** : trouver des preuves commercialisables...

## Tentatives d'adaptation des inégalités de Kruzhkov.

Quelles conditions d'admissibilité fournissent  $\Delta_{\dots} \leq 0$ , et comment ?  
 Essayons de partir sur la base des inégalités de Kruzhkov.

**Difficulté** : dans le cas  $x$ -dépendant,  $k \equiv \text{const}$  n'est plus solution

Adaptation classique (Kruzhkov) pour flux  $f(x, u)$  régulier :

$$\partial_t |u - k| + \partial_x \text{sign}(u - k)(f(x, u) - f(x, k)) \leq -\text{sign}(u - k) \partial_x f(x, k).$$

Si  $x \mapsto f(x, k)$  a des sauts, ou a un problème de multiplication de distributions. Majoration ( $\Rightarrow$  perte d'information)  $\Rightarrow$  formulation

$$\partial_t |u - k| + \partial_x \text{sign}(u - k)(f(x, u) - f(x, k)) \leq |\partial_x f(x, k)| \equiv |f_R(k) - f_L(k)| \delta_0(x).$$

Avec cette formulation :  $\Delta_{\dots} \leq 0$  et l'unicité peut être faux.

Une meilleure (?) formulation ([A., D. Mitrović], en préparation):

$u$  est dite admissible s'il existe  $p_u$  définie sur l'interface telle que

$$\partial_t |u - k| + \partial_x \text{sign}(u - k)(f(x, u) - f(x, k)) \leq -\text{sign}(p_u(t) - k)(f_R(k) - f_L(k)) \delta_0(x).$$

Existence, unicité vraies mais preuves totalement indirectes !

**Question ouverte** : trouver des preuves commercialisables...

## Tentatives d'adaptation des inégalités de Kruzhkov.

Quelles conditions d'admissibilité fournissent  $\Delta_{\dots} \leq 0$ , et comment ?  
 Essayons de partir sur la base des inégalités de Kruzhkov.

**Difficulté** : dans le cas  $x$ -dépendant,  $k \equiv \text{const}$  n'est plus solution

Adaptation classique (Kruzhkov) pour flux  $f(x, u)$  régulier :

$$\partial_t |u - k| + \partial_x \text{sign}(u - k)(f(x, u) - f(x, k)) \leq -\text{sign}(u - k) \partial_x f(x, k).$$

Si  $x \mapsto f(x, k)$  a des sauts, ou a un problème de multiplication de distributions. Majoration ( $\Rightarrow$  perte d'information)  $\Rightarrow$  formulation

$$\partial_t |u - k| + \partial_x \text{sign}(u - k)(f(x, u) - f(x, k)) \leq |\partial_x f(x, k)| \equiv |f_R(k) - f_L(k)| \delta_0(x).$$

Avec cette formulation :  $\Delta_{\dots} \leq 0$  et l'unicité peut être faux.

---

Une meilleure (?) formulation ([A., D. Mitrović], en préparation):

$u$  est dite admissible s'il existe  $p_u$  définie sur l'interface telle que

$$\partial_t |u - k| + \partial_x \text{sign}(u - k)(f(x, u) - f(x, k)) \leq -\text{sign}(p_u(t) - k)(f_R(k) - f_L(k)) \delta_0(x).$$

Existence, unicité vraies mais preuves totalement indirectes !

**Question ouverte** : trouver des preuves commercialisables...

## Entropies adaptées et germes

**Meilleure idée :** garder l'esprit de la définition Kruzhkov, pas la forme

Remplacer  $k \equiv \text{const}$  (qui ne sont plus solutions)  
par des solutions - admissibles ! - évidentes.

---

On va partir d'une solution admissible  $u$  quelconque.

Si  $u$  a les traces  $u_L(t_0)$ ,  $u_R(t_0)$  en un point  $t_0$  de l'interface, alors

$$k(x) := k_L \mathbf{1}_{x < 0} + k_R \mathbf{1}_{x > 0}, \text{ avec } k_{L,R} = u_{L,R}(t_0)$$

est encore une solution admissible évidente, et elle est "simple"  
(invariance de l'équation sous homothéties de  $(t, x)$  !).

⇒ inégalités entropiques adaptées ( $\equiv$  Kato) :

$$\partial_t |u - k(x)| + \partial_x \text{sign}(u - k(x))(f(x, u) - f(x, k(x))) \leq 0$$

le couple  $(k_L, k_R)$  étant un couple admissible de traces à l'interface.

---

⇒ essayons de décrire les couples  $(k_L, k_R)$  qui seraient possibles .

## Théorie des germes $L^1 D$ . Solutions $\mathcal{G}$ -entropiques et leur unicité.

### Definition (Germes $L^1$ -dissipatifs)

Une partie  $\mathcal{G}$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  est dite

- **germe  $L^1 D$** , si elle vérifie
  - (cas conservatif uniquement...)  $\forall (k_L, k_R) \in \mathcal{G}, f_L(k_L) = f_R(k_R)$
  - $\forall (k_L, k_R), (\hat{k}_L, \hat{k}_R) \in \mathcal{G},$   
 $\text{sign}(k_L - \hat{k}_L)(f_L(k_L) - f_L(\hat{k}_L)) - \text{sign}(k_R - \hat{k}_R)(f_R(k_L) - f_R(\hat{k}_R)) \geq 0;$
- un germe  $L^1 D$  est maximal s'il n'a pas d'extension non-triviale;
- un germe  $L^1 D$  est défini s'il a une unique extension maximale.

---

**Definition** (admissibilité des solutions, variante 1)

Soit  $\mathcal{G}$  un germe  $L^1 D$  défini. Fct.  $u \in L^\infty$  est solution  $\mathcal{G}$ -entropique pour  $\partial_t u + \partial_x (f_L(u) \mathbf{1}_{x < 0} + f_R(u) \mathbf{1}_{x > 0}) = 0$  si elle est solution Kruzhkov locale sur  $\{\pm x > 0\}$  et pour p.t.  $t, (u_L(t), u_R(t)) \in \text{ext.max. de } \mathcal{G}.$

---

**Theorème** (unicité)

Soit  $\mathcal{G}$  un germe  $L^1 D$  défini. Pour toute donnée de Cauchy, il peut y avoir au plus une solution  $\mathcal{G}$ -entropique.

**Preuve** : On a  $\Delta_{\dots} \leq 0$  par définition.

## Théorie des germes $L^1D$ . Solutions $\mathcal{G}$ -entropiques et leur unicité.

**Definition** (Germes  $L^1$ -dissipatifs)

Une partie  $\mathcal{G}$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  est dite

- **germe  $L^1D$** , si elle vérifie
  - (cas conservatif uniquement...)  $\forall (k_L, k_R) \in \mathcal{G}, f_L(k_L) = f_R(k_R)$
  - $\forall (k_L, k_R), (\hat{k}_L, \hat{k}_R) \in \mathcal{G},$   
 $\text{sign}(k_L - \hat{k}_L)(f_L(k_L) - f_L(\hat{k}_L)) - \text{sign}(k_R - \hat{k}_R)(f_R(k_L) - f_R(\hat{k}_R)) \geq 0;$
- **un germe  $L^1D$  est maximal** s'il n'a pas d'extension non-triviale;
- **un germe  $L^1D$  est défini** s'il a une unique extension maximale.

**Definition** (admissibilité des solutions, variante 1)

Soit  $\mathcal{G}$  un germe  $L^1D$  défini. Fct.  $u \in L^\infty$  est **solution  $\mathcal{G}$ -entropique** pour  $\partial_t u + \partial_x (f_L(u)\mathbf{1}_{x < 0} + f_R(u)\mathbf{1}_{x > 0}) = 0$  si elle est solution Kruzhkov locale sur  $\{\pm x > 0\}$  et pour p.t.  $t, (u_L(t), u_R(t)) \in \text{ext.max. de } \mathcal{G}$ .

**Theorème** (unicité)

Soit  $\mathcal{G}$  un germe  $L^1D$  défini. Pour toute donnée de Cauchy, il peut y avoir au plus une solution  $\mathcal{G}$ -entropique.

**Preuve** : On a  $\Delta_{\dots} \leq 0$  par définition.

## Théorie des germes $L^1 D$ . Existence et approximation des solutions.

La définition précédente est “trop explicite” au niveau de l'interface et elle n'est pas pratique pour prouver l'existence.

**Definition** (admissibilité des solutions, variante 2)

Soit  $\mathcal{G}$  un germe  $L^1 D$  défini. Fct.  $u \in L^\infty$  est **solution  $\mathcal{G}$ -entropique** si elle est **solution Kruzhkov locale** sur  $\{\pm x > 0\}$  et elle vérifie les **inégalités entropiques adaptées** ( $\equiv$  Kato) avec

$$\hat{u} = k(x) := k_L \mathbf{1}_{x < 0} + k_R \mathbf{1}_{x > 0}, \quad \forall (k_L, k_R) \in \mathcal{G}.$$

**Definition** (Germes  $L^1$ -dissipatifs, suite)

- un germe  $L^1 D$  est **complet**  
s'il permet de résoudre tout pb. de Riemann.

**Theorème** (existence + approximation)

Soit  $\mathcal{G}$  un germe  $L^1 D$  défini dont l'extension maximale est complète.

- Pour tout  $u_0$ , **il existe une unique solution  $\mathcal{G}$ -entropique**.
- D'une façon générale, **l'unique solution  $\mathcal{G}$ -entropique peut être obtenue par le schéma de Godunov adapté à l'interface**.

Détails : [A., K.H. Karlsen, N.H. Risebro '11]

## Identification des germes. Retour sur les exemples.

**Remarque** : le problème de flux discontinu est sous-déterminé :  
choix du germe  $\Leftrightarrow$  choix d'un semigroupe de solutions.

**Question** : comment identifier le germe derrière chaque modèle ?  
Rappelons que tous les exemples étaient des limites singulières !  
On doit savoir déduire l'existence par ces passages à la limite.

---

**Réponse** : on arrive souvent à identifier le germe du modèle limite  
en récençant les solutions - limites singulières - évidentes.

Pour les exemples précédents : en étudiant les "profils"  
(de viscosité, de capillarité, d'"épaississement", ou numériques)

- on trouve quelques états stationnaires
  - et on prove que cela constitue un germe  $L^1 D$  maximal  
ou (peu de profils suffisent !) défini
  - la complétude du germe est le plus souvent "gratuite"  
(équivalente à la compacité des suites de solutions approchées).
- 

**Objectif** : mieux comprendre la relation modèle / son germe...

Chercher une autre façon de décrire le couplage interfacial?  
Chercher des stratégies d'approximation autres que Godunov/WFT?



## Identification des germes. Retour sur les exemples.

**Remarque** : le problème de flux discontinu est sous-déterminé :  
choix du germe  $\Leftrightarrow$  choix d'un semigroupe de solutions.

**Question** : comment identifier le germe derrière chaque modèle ?  
Rappelons que tous les exemples étaient des limites singulières !  
On doit savoir déduire l'existence par ces passages à la limite.

---

**Réponse** : on arrive souvent à identifier le germe du modèle limite  
en récençant les solutions - limites singulières - évidentes.

Pour les exemples précédents : en étudiant les "profils"  
(de viscosité, de capillarité, d'"épaississement", ou numériques)

- on trouve quelques états stationnaires
  - et on prove que cela constitue un germe  $L^1 D$  maximal  
ou (peu de profils suffisent !) défini
  - la complétude du germe est le plus souvent "gratuite"  
(équivalente à la compacité des suites de solutions approchées).
- 

**Objectif** : mieux comprendre la relation modèle / son germe...

Chercher une autre façon de décrire le couplage interfacial?  
Chercher des stratégies d'approximation autres que Godunov/WFT?

## Identification des germes. Retour sur les exemples.

**Remarque** : le problème de flux discontinu est sous-déterminé :  
choix du germe  $\Leftrightarrow$  choix d'un semigroupe de solutions.

**Question** : comment identifier le germe derrière chaque modèle ?  
Rappelons que tous les exemples étaient des limites singulières !  
On doit savoir déduire l'existence par ces passages à la limite.

---

**Réponse** : on arrive souvent à identifier le germe du modèle limite  
en récençant les solutions - limites singulières - évidentes.

Pour les exemples précédents : en étudiant les “profils”  
(de viscosité, de capillarité, d’“épaississement”, ou numériques)

- on trouve quelques états stationnaires
  - et on prove que cela constitue un germe  $L^1 D$  maximal  
ou (peu de profils suffisent !) défini
  - la complétude du germe est le plus souvent “gratuite”  
(équivalente à la compacité des suites de solutions approchées).
- 

**Objectif** : mieux comprendre la relation modèle / son germe...

Chercher une autre façon de décrire le couplage interfacial?  
Chercher des stratégies d'approximation autres que Godunov/WFT?

# Problèmes aux limites pour LdC

## Problèmes aux limites pour les lois de conservation

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, & x < 0 \\ +CB & x = 0^- \end{cases}$$

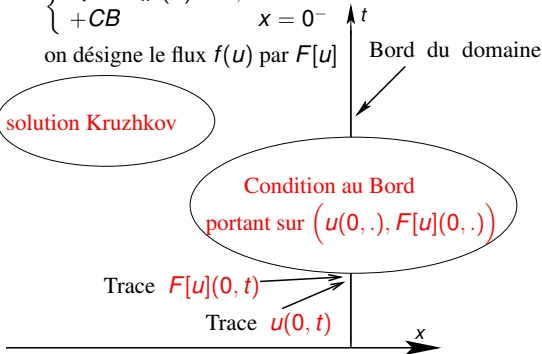
on désigne le flux  $f(u)$  par  $F[u]$

solution Kruzhkov

Condition au Bord  
portant sur  $(u(0, \cdot), F[u](0, \cdot))$

Trace  $F[u](0, t)$

Trace  $u(0, t)$



## Cas Dirichlet : la condition de Bardos-LeRoux-Nédélec.

Pour la loi de conservation avec CB Dirichlet  $u = u^D$  sur le bord:

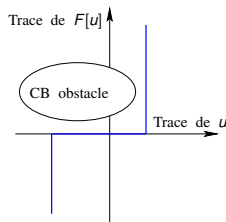
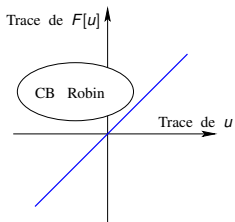
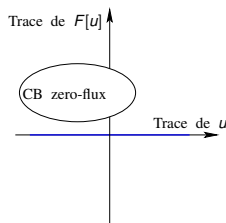
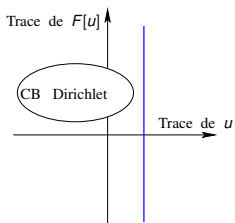
- Le problème formel est mal posé (car on ne peut pas prescrire les traces de  $u$  et du flux  $F[u] \equiv f(u)$  en même temps !)
- Le problème avec  $\dots = \varepsilon \partial_{xx}^2 u$  est bien posé et sa limite singulière est une solution Kruzhkov locale vérifiant la "condition Bardos-LeRoux-Nédélec":  $u|_{\text{bord}} \in I(u^D)$
- Le problème de Dirichlet au sens Kruzhkov-BLN est bien posé

- On comprend mieux l'ensemble  $I(u^D)$  si l'on dessine  $f|_{I(u^D)}$ .  
On voit que  $f|_{I(u^D)}$  est un sous-graphe maximal monotone  $\tilde{\beta}$  de  $f$  !
- On peut décrire  $\tilde{\beta}$  en termes du flux de Godunov :

$$\tilde{\beta} = \left\{ (u, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} = f(u) = G_{\text{God}}(u, u^D) \in \mathbb{R} \right\}$$

Les deux derniers points de vue (avec  $\tilde{\beta}$ ) se généralisent très bien...

## Conditions aux limites classiques



Dans ces cas,  $(u, F[u]) \in \beta$  pour un graphe maximal monotone  $\beta$ .

**Cadre général :** CB posée en termes d'une dépendance maximale monotone entre la solution  $u$  et le flux  $F[u]$  au bord

## Cadre général des CB monotones. Dissipation de bord. Projection

Pour la loi de conservation avec CB  $(u, F[u]) \in \beta$  sur le bord:

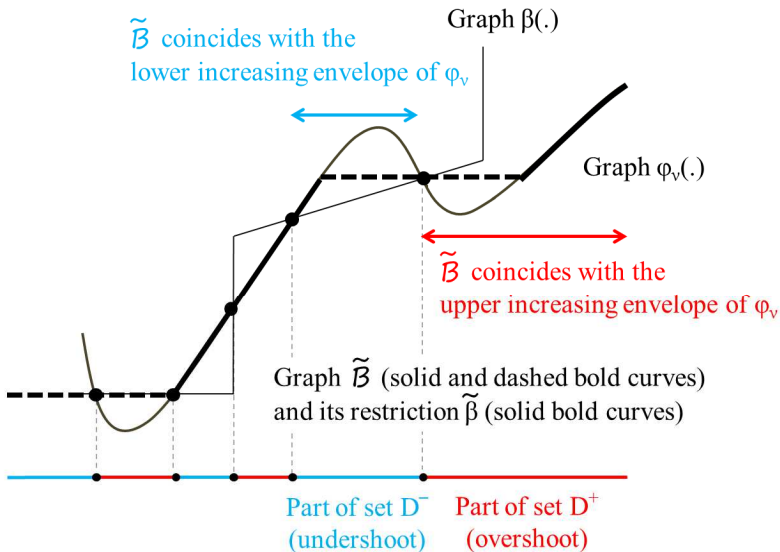
- l'unicité pour le problème formel est évidente (dissipation de bord :  
 $\text{sign}(u - \hat{u})(f(u) - f(\hat{u})) = \text{sign}(u - \hat{u})(F - \hat{F}) \geq 0$  !)
- Le problème formel est mal posé (pas d'existence)
- Le problème avec  $\dots = \varepsilon \partial_{xx}^2 u$  est bien posé et sa **limite singulière est une solution Kruzhkov locale vérifiant la condition  $u \in \text{Dom}(\tilde{\beta})$ ,  $\tilde{\beta}$  étant un projeté de  $\beta$**
- **Le problème de Dirichlet en ce sens projeté est bien posé**

- **On comprend mieux la condition si on dessine  $\tilde{\beta}$ .**  
 On observe :  $\tilde{\beta}$  est le sous-graphe maximal monotone de  $f$  le plus proche possible de  $\beta$  !
- **On peut décrire  $\tilde{\beta}$  en termes du flux de Godunov :**

$$\tilde{\beta} = \left\{ (u, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} = f(u) = G_{\text{God}}(u, \tilde{u}) \in \beta(\tilde{u}) \right\}$$

Détails : [A., K. Sbihi], à paraître

## Exemple pour une CB générale : procédure de projection





# Conditions de Couplage à l'Interface :

CCI joue le même rôle que CB ?

## Cas des "Transmission maps"

Il y a une classe particulière de germes ([A., C. Cancès], préprint) définie par "transmission maps".

Étant donné  $\gamma$  un graphe maximal monotone dans  $\mathbb{R}$ , on pose

$$\mathcal{G}(\gamma) := \left\{ (u_L, u_R) \mid f_L(u_L) = G_{\text{God},L}(u_L, \tilde{u}_L) \right.$$

**Théorème**  $\left. = G_{\text{God},R}(\tilde{u}_R, u_R) = f_R(u_R) \text{ pour } (\tilde{u}_L, \tilde{u}_R) \in \gamma \right\}$

- Ceci définit un germe maximal, complet (sous des conditions...)
- Une démarche analogue définit un flux numérique d'interface.
- On peut remplacer Godunov par un flux plus pratique (Rusanov,...)

Retour sur les exemples :

- Buckley-Leverett 1D avec capillarité évanescence :  
 $\gamma = \{(u_L, u_R) \mid \pi_L(u_L) = \pi_R(u_R)\}$  où  $\pi_{L,R}(\cdot)$  sont les capillarités
- Burgers-particule : on pose  $\gamma = \text{Id} - 1$  (choix numérique de [A., N. Seguin'12]) et remplace la conservation par une dissipation

Toutefois,

- dans l'exemple de trafic routier avec contrainte :  $\gamma$  est peu naturel
- l'ensemble de  $\mathcal{G}(\gamma)$  ne contient pas tous les germes possibles

## Cas des "Transmission maps"

Il y a une classe particulière de germes ([A., C. Cancès], préprint) définie par "transmission maps".

Étant donné  $\gamma$  un graphe maximal monotone dans  $\mathbb{R}$ , on pose

$$\mathcal{G}(\gamma) := \left\{ (u_L, u_R) \mid f_L(u_L) = G_{\text{God},L}(u_L, \tilde{u}_L) \right.$$

**Théorème**  $\left. = G_{\text{God},R}(\tilde{u}_R, u_R) = f_R(u_R) \text{ pour } (\tilde{u}_L, \tilde{u}_R) \in \gamma \right\}$

- Ceci définit un germe maximal, complet (sous des conditions...)
- Une démarche analogue définit un flux numérique d'interface.
- On peut remplacer Godunov par un flux plus pratique (Rusanov,...)

### Retour sur les exemples :

- Buckley-Leverett 1D avec capillarité évanescence :  
 $\gamma = \{(u_L, u_R) \mid \pi_L(u_L) = \pi_R(u_R)\}$  où  $\pi_{L,R}(\cdot)$  sont les capillarités
- Burgers-particule : on pose  $\gamma = \text{Id} - 1$  (choix numérique de [A., N. Seguin'12]) et remplace la conservation par une dissipation

Toutefois,

- dans l'exemple de trafic routier avec contrainte :  $\gamma$  est peu naturel
- l'ensemble de  $\mathcal{G}(\gamma)$  ne contient pas tous les germes possibles

## Conditions de couplage à l'interface (CCI): analogie avec les CB

**Definition** On dit que  $\beta \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  est maximal somme-monotone s'il est maximal tel que  $\forall \left( (u_L, u_R), (\mathcal{F}_L, -\mathcal{F}_R) \right), \left( (\hat{u}_L, \hat{u}_R), (\mathcal{F}_L, -\hat{\mathcal{F}}_R) \right) \in \beta$

$$\text{sign}(u_L - \hat{u}_L)(\mathcal{F}_L - \hat{\mathcal{F}}_L) + \text{sign}(u_R - \hat{u}_R)(\mathcal{F}_R - \hat{\mathcal{F}}_R) \geq 0.$$

### Conjectures :

- À chaque CCI définie par un graphe somme-monotone  $\beta$  correspond son projeté  $\tilde{\beta}$  donné par

$$\tilde{\beta} = \left\{ \left( (u_L, u_R), (\mathcal{F}_L, \mathcal{F}_R) \right) \mid \begin{array}{l} \mathcal{F}_L = f_L(u_L) = G_{\text{God},L}(u_L, \tilde{u}_L) \text{ et} \\ -\mathcal{F}_R = -f(u_R) = G_{\text{God},-R}(u_R, \tilde{u}_R) \\ \text{pour } ((\tilde{u}_L, \tilde{u}_R), (\mathcal{F}_L, -\mathcal{F}_R)) \in \beta \end{array} \right\}.$$

- Le domaine de  $\tilde{\beta}$  est un germe maximal  $L^1 D$ .
- Le problème avec  $\tilde{\beta}$  est bien posé.
- La notion de solution relaxée (limite singulière) qu'il faut associer au CCI  $\beta$  est celle correspondant à son projeté  $\tilde{\beta}$

**La suite ?** Développer ce point de vue pour faire + facilement les liens modèle / notion de solution / schéma numérique adéquat.