Calcul approché d'intégrales.

1. L'exercice proposé au candidat.

On cherche à obtenir un encadrement de la valeur de l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 e^{\sin x}\,\mathrm{d}x$.

1° Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin x - x$. Étudier les variations de la fonction f sur $[0,1]$ et en déduire que pour tout $x \in [0,1]$, on a $e^{\sin x} \leqslant e^x$.

2° Soit g la fonction définie par $g(x) = e^x - 1 - x$. Étudier les variations de la fonction g sur $[0,1]$ et en déduire que pour tout $x \in [0,1]$, on a $e^{\sin x} \geqslant 1 + \sin x$.

3° Déduire des questions précédentes un encadrement de l'intégrale I par deux intégrales de fonctions que l'on sait primitiver. En déduire un encadrement numérique de I.

2. Travail demandé au candidat.

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Après avoir résolu et analysé cet exercice, le candidat résumera son analyse sur la fiche tout en répondant aux questions suivantes :

1° À votre avis, pourquoi l'énoncé de l'exercice s'intéresse-t-il à une intégrale de la fonction $x \longmapsto e^{\sin x}$?

2° La méthode utilisée dans cet exercice pour obtenir un encadrement de I présente plusieurs inconvénients. Donner au moins deux de ces inconvénients.

3° Proposer un exercice basé sur le même principe, toujours pour encadrer la même intégrale I, mais dans lequel on utiliserait, pour minorer $e^{\sin x}$ une fonction meilleure que la fonction du 2°.

4° Proposer un exercice basé sur une toute autre méthode, qui permette en théorie d'encadrer I avec toute précision ε fixée à l'avance. Votre énoncé devra demander explicitement l'utilisation de la calculatrice pour obtenir un encadrement de I de largeur inférieure à 10^{-3}.

5° Proposer un ou plusieurs autres exercices sur le même thème (calcul approché d'une intégrale).