

# Un théorème du col généralisé

Hans-Jörg Ruppen \*

20 novembre 2015

Nous présentons une nouvelle caractérisation variationnelle pour des niveaux critiques d'une fonction d'énergie *paire*. Ces caractérisations sont de nature à nous fournir des points critiques *multiples*. Nous allons notamment considérer le cas de équation de Schrödinger non-linéaire du type suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u - q(x)|u|^\sigma u = \lambda u, & (x \in \mathbf{R}^N) \\ u \in H^1(\mathbf{R}^N) \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Nous supposons dans ce contexte que

- $N \geq 3$ ,
- $q(x) \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$ ,  $q(x) > 0$  p.p. avec  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} q(x) = 0$  et
- $0 < \sigma < \frac{4}{N-2}$ .

Nos résultats peuvent s'appliquer de façon *identique* aux trois cas suivants :

1.  $V(x) \equiv 0$ ;
2.  $V(x)$  est un potentiel de Coulomb et
3.  $V(x) \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$  avec  $V(x+k) \equiv V(x)$  pour tout  $k \in \mathbf{Z}^N$ .

La valeur propre  $\lambda$  est située à l'extérieur du spectre ; mais elle *peut ou ne peut pas être dans une lacune spectrale*.

Notre caractérisation variationnelle est «simple» et de ce fait parfaitement adaptée à la discussion de *bifurcations multiples* de solutions.

## Références

- [1] Antonio Ambrosetti and Paul H. Rabinowitz. Dual variational methods in critical point theory and applications. *J. Functional Analysis*, 14 :349–381, 1973.
- [2] Wojciech Kryszewski and Andrzej Szulkin. Generalized linking theorem with an application to a semilinear Schrödinger equation. *Adv. Differential Equations*, 3(3) :441–472, 1998.
- [3] Hans-Jörg Ruppen. A generalized mountain pass theorem. to appear.
- [4] Hans-Jörg Ruppen. Odd linking and bifurcation in gaps : the weakly indefinite case. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 143(5) :1061–1088, 2013.
- [5] Hans-Jörg Ruppen. A generalized min-max theorem for functionals of strongly indefinite sign. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 50(1-2) :231–255, 2014.
- [6] C. A. Stuart. Bifurcation into spectral gaps. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, (suppl.) :59, 1995.

---

\*Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL), Suisse, [hans-joerg.ruppen@epfl.ch](mailto:hans-joerg.ruppen@epfl.ch)