Solutions auto-similaires du problème de Riemann pour une loi de conservation scalaire quasilinéaire à fonction de flux continue avec la viscosité $\varepsilon t u_{xx}$.

Boris P. Andreyanov

L'Université Lomonossov de Moscou (Russie) et

L'Université de Franche-Comté (Besançon, France).

On considère le problème de Cauchy suivant:

$$(1_\varepsilon) \quad U_t + f(U)_x = \varepsilon t U_{xx}, \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \in \mathbf{C}; \quad U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^1; \quad \varepsilon \geq 0$$

$$(2) \quad U|_{t=0} = \begin{cases} u_-, & x < 0 \\ u_+, & x > 0 \end{cases}; \qquad \text{on suppose que } u_- < u_+ \text{ pour simplifier.}$$

Le problème $(1_\varepsilon), (2)$ admet une solution auto-similaire $U(t,x) = U(\xi)$ où $\xi = x/t$. Si $\varepsilon = 0$ (ce qui représente le cas de la loi de conservation quasilinéaire), on appelle alors solution de $(1_0), (2)$ une solution au sens de l'inégalité entropique de S.Kruzhkov ([7]-[10]). Si $\varepsilon > 0$, on appelle alors solution de $(1_\varepsilon), (2)$ une solution au problème suivant (que l'on obtient en intégrant l'équation différentielle pour $U(\xi)$):

$$(3) \quad \varepsilon U'(\xi) = -\int_0^\xi \zeta U'(\zeta) d\zeta + f(U(\xi)) + K,\ K \in \mathbb{R}; \quad U(\pm\infty) = u_\pm,\ U \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}).$$

Dans cette note on prouve que pour $\varepsilon > 0$ il existe une unique solution $U(\xi)$ du problème $(1_\varepsilon), (2)$ au sens (3). Lorsque $\varepsilon \to 0$, les solutions correspondantes tendent p.p. vers la fonction

$$(4) \quad U_0(x/t) = \partial/\partial x \max_{u_- \leq v \leq u_+} (xv - tf(v))$$

Notons que d'après la formule de Fenchel $U_0(\xi)$ est l'inverse de la dérivée de l'enveloppe convexe de $f(u)$ sur $[u_-, u_+]$. On montre que la fonction $U_0(x/t)$ est une solution de $(1_0), (2)$. Elle est l'unique solution entropique pour tout $f \in \mathbf{C}[u_-, u_+]$ en vertu de résultats de [2],[10]. Le cas où f est seulement continue a été traité pour la première fois par Ph.Bénilan ([3]). Dans le cas où la fonction de flux $f(u)$ est régulière l'expression explicite de la solution entropique en fonction de l'enveloppe convexe de f a été proposée par I.Gelfand ([4]) et justifiée d'une manière détaillée par S.Kruzhkov ([9]), tout en s'appuyant sur l'argument d'unicité d'une solution entropique. Les premiers résultats pour l'équation (1_ε) ont été établis par A.Kalashnikov ([6]). On peut comparer la formule (4) aux formules proposées pour des cas différents dans [5],[12],[11]. En vertu de l'unicité toutes ces formules sont équivalentes pour le cas du problème de Riemann avec une fonction de flux f régulière convexe.

Les démonstrations détaillées d'une partie des assertions de cette note sont présentées dans [1].

On fixe $\varepsilon > 0$.

<u>L e m m e 1.</u> *Toute solution* $U(\xi)$ *du problème* (3) *est croissante sur* $\mathbb{R}$ *.*

La preuve ([1]) se fait en raisonnant par l'absurde dans un voisinage d'un point d'extremum de la solution.

Par suite, la fonction $\Xi(u) = [U(\xi)]^{-1}$ est définie p.p. sur $[u_-, u_+]$ et monotone.

<u>L e m m e 2.</u> *Soit une fonction* $U(\xi)$ *une solution du problème* (3) *, alors la fonction* $\Phi(u) = \int_{U(0)}^{u} \Xi(v)dv - K$ *sur* $[u_-, u_+]$ *est une solution du problème suivant :*

$$(5) \quad \begin{cases} \Phi \in \mathbf{C}[u_-, u_+] \textit{ et } \Phi \textit{ est convexe} \\ \Phi(u) \le f(u) \textit{ sur } [u_-, u_+] \textit{ et } \Phi(u_\pm) = f(u_\pm) \\ \frac{\varepsilon}{f-\Phi} \in \mathbf{L}_1^{loc}]u_-, u_+[\\ \left.\begin{array}{l} \ddot{\Phi}(u) \ge \frac{\varepsilon}{f(u)-\Phi(u)} \\ (f(u) - \Phi(u))\left(\ddot{\Phi}(u) - \frac{\varepsilon}{f(u)-\Phi(u)}\right) = 0 \end{array}\right\} \textit{au sens de mesures sur }]u_-, u_+[\end{cases}$$

(où $\dot{}$ *signifie* d/du *dans tout ce qui suit.)*
Inversement, soit $\Phi(u)$ *une solution de* (5) *, alors la fonction* $U(\xi) = [\dot{\Phi}(u)]^{-1} \equiv \equiv \partial/\partial x \max_{u_- \le v \le u_+} (xv - t\Phi(v))$ *est une solution de* (3) *.*

<u>Démonstration.</u> <u>$(3) \Rightarrow (5)$</u> On réécrit l'équation (3) sous la forme

$$(6) \quad \varepsilon U'(\xi) = f(U(\xi)) - \Phi(U(\xi)),$$

d'où $\Phi \in \mathbf{C}]u_-, u_+[$ et $\Phi \le f$. Puisque $\dot{\Phi}(u) = \Xi(u)$ est une fonction continue p.p. croissante, alors Φ est convexe. Posons $\Omega = \{u | \exists \xi : U(\xi) = u, U'(\xi) = 0\}$. La mesure de Lebesgue $|\Omega|$ est zéro d'après le lemme de Sard et $\Omega \equiv \{u | \Phi(u) = f(u)\}$. Pour tout $u \in [u_-, u_+] \setminus \Omega$ il existe $\ddot{\Phi}(u) = \dot{\Xi}(u) = 1/U'(\xi) > 0$; $\ddot{\Phi}(u) = \frac{\varepsilon}{f(u)-\Phi(u)}$ et $\Phi(u) < f(u)$; et comme $(f - \Phi)\ddot{\Phi} = 0$ sur Ω , alors $(f - \Phi)\left(\ddot{\Phi} - \frac{\varepsilon}{f-\Phi}\right) = 0$ au sens de mesures sur $]u_-, u_+[$. Puisque $|\Omega| = 0$ et $\ddot{\Phi} \ge 0$, alors $\ddot{\Phi} \ge \frac{\varepsilon}{f-\Phi}$ sur $]u_-, u_+[$ au même sens. Par suite, pour tout segment $[a, b] \subset]u_-, u_+[$ on a $\int_a^b \frac{\varepsilon}{f(u)-\Phi(u)} du \le \dot{\Phi}(b + 0) - \dot{\Phi}(a - 0) < \infty$, d'où $\frac{\varepsilon}{f-\Phi} \in \mathbf{L}_1^{loc}]u_-, u_+[$. L'équation (6) avec $U(\pm\infty) = u_\pm$ impliquent qu'il existe $\lim_{\xi \to \pm\infty} U'(\xi) = 0$, alors $\Phi(u_\pm) = f(u_\pm)$ et $\Phi \in \mathbf{C}[u_-, u_+]$.

<u>$(5) \Rightarrow (3)$</u> La fonction $\Xi(u) := \dot{\Phi}(u)$ est croissante, on peut donc définir $U(\xi) = [\Xi(u)]^{-1}$. Maitenant si $u^0 \notin \Omega$, alors il existe $\dot{\Xi}(u) = \frac{\varepsilon}{f(u)-\Phi(u)} > 0$ sur un

voisinage de u^0, et donc (6) est vérifiée en $\xi^0 = \Xi(u^0)$. Si $u^0 \in \Omega$, alors pour chaque $\alpha > 0$ il existe un voisinage de u^0 tel que $f(u) - \Phi(u) < \varepsilon\alpha$ et donc $\ddot{\Phi} > 1/\alpha$ sur le voisinage. Par conséquent, $|\Xi(u^0+\delta) - \Xi(u^0)| \geq |\delta|/\alpha$ pour tout δ assez petit; il existe donc $U'(\xi^0) = 0$ et (6) est vérifiée dans tous les cas. Alors $U \in \mathbf{C}^1$ et (6) implique (3) d'après la définition de $U(\xi)$. Evidemment, $U(\pm\infty) = u_\pm$. $\triangle$

R e m a r q u e. Il est intéressant que d'après le lemme 2 la fonction $w(t,x) = \dot{\Phi}(U(t,x))$ vérifie l'équation de Hopf ([5]) $w_t + ww_x = 0$ si U est une solution de $(1_\varepsilon), (2)$ au sens (3).

L e m m e 3. *Pour tous* $\varepsilon > 0$, $u_- < u_+$ *et* $f \in \mathbf{C}[u_-, u_+]$ *il existe une unique solution du problème* (5).

Démonstration. Afin de prouver l'unicité on raisonne par l'absurde; il suffit de traiter un point d'extremum de la différence de deux solutions à (5) ([1]).

Pour démontrer l'existence on introduit le problème pénalisé:

$$(7) \quad \begin{cases} \ddot{\Phi}_n(u) = G_n(u, \Phi_n(u)) = \frac{\varepsilon}{f(u) - \Phi_n(u)} \wedge n, \quad n = 1, 2, ... \\ \Phi_n(u_\pm) = f(u_\pm), \ \Phi_n \in \mathbf{C}^2[u_-, u_+]. \end{cases}$$

Puisque $G_n(u, \Phi)$ est continue en u et Φ et bornée, il existe une solution de (7).

Comme $G_n(u, \Phi)$ est croissante en Φ, le principe de maximum est alors vérifié pour les équations du type (7). On pose $G = \sqrt{\varepsilon(u-u_-)(u_+-u)}$ et dénote par F l'enveloppe convexe de f sur $[u_-, u_+]$. Alors $(F-G)^{\cdot\cdot} \geq -\ddot{G} \geq \frac{\varepsilon}{G} \geq \frac{\varepsilon}{f-(F-G)}$, et $(F-G)$ est donc une sous-solution du problème (7) avec $G_\infty = \frac{\varepsilon}{f(u)-\Phi}$. On a pour $n \geq m$ $G_\infty(u,\Phi) \geq$ $\geq G_n(u,\Phi) \geq G_m(u,\Phi)$ et donc d'après le principe de maximum $\Phi_m(u) \geq \Phi_n(u) \geq$ $\geq F(u) - G(u)$ sur $[u_-, u_+]$.

Ainsi $\Phi_n(u) \downarrow \Phi(u) \in \mathbb{R}$, $u \in [u_-, u_+]$, $\Phi(u_\pm \mp 0) = \Phi(u_\pm) = f(u_\pm)$, $\Phi \in \mathbf{C}[u_-, u_+]$ et convexe. Aussi $G_n(u, \Phi_n(u))$ tend vers $\frac{\varepsilon}{f(u)-\Phi(u)} \in \overline{\mathbb{R}}^+$ sur $[u_-, u_+]$. On prend une fonction test $\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty]u_-, u_+[$ et $\varphi \geq 0$; d'après (7) et le lemme de Fatou, on a

$$(8) \quad \int\limits_{u_-}^{u_+} \ddot{\varphi}\Phi(u)\, du = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{u_-}^{u_+} \ddot{\varphi}\Phi_n(u)\, du = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{u_-}^{u_+} \varphi G_n(u, \Phi_n(u))\, du \geq \int\limits_{u_-}^{u_+} \varphi \frac{\varepsilon}{f(u)-\Phi(u)}\, du.$$

Alors $\ddot{\Phi} \geq \frac{\varepsilon}{f-\Phi}$ au sens de mesures sur $]u_-, u_+[$ et $\frac{\varepsilon}{f-\Phi} \in \mathbf{L}_1^{loc}]u_-, u_+[$.

Si on prend maintenant une fonction test $\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty[u_-, u_+]$ à $\operatorname{supp}\varphi \subset \{u | \, \Phi < f\}$, alors le (8) se transforme en égalité, car il existe $N = N(\varphi)$ tel que pour tout $n \geq N$ $G_n(u, \Phi_n(u)) \leq G_N(u, \Phi_N(u))$ sur $\operatorname{supp}\varphi$. Puisque $f - \Phi = 0$ sur $[u_-, u_+] \setminus \{u | \, \Phi < f\}$, on a $(f-\Phi)\left(\ddot{\Phi} - \frac{\varepsilon}{f-\Phi}\right) = 0$, toujours au sens de mesures sur $]u_-, u_+[$. $\triangle$

On montre facilement que pour une f Lipshitzienne la solution de (5) est une solution classique de l'équation $\ddot{\Phi} = \frac{\varepsilon}{f-\Phi}$ sur $]u_-, u_+[$. Cependant on peut montrer à l'aide du principe de maximum que pour $f(u)$ du type $\sqrt{|u|}$ et pour tout intervalle $]u_-,u_+[\ni 0$ assez petit la dérivée de la solution de (5) a un saut positif en 0 . Ce saut correspond à un intervalle de constance de la solution $U(\xi)$ de $(1_\varepsilon),(2)$.

Des lemmes 2 et 3 résulte le

<u>Théorème 1.</u> *Pour tous $\varepsilon>0$, $u_-<u_+$ et $f\in\mathbf{C}[u_-,u_+]$ il existe une solution unique $U_\varepsilon(x/t)$ du problème $(1_\varepsilon),(2)$ au sens (3) . Elle est fournie par la formule analogue à (4) , à savoir, $U_\varepsilon(x/t)=\partial/\partial x \max\limits_{u_-\le v\le u_+}(xv-t\Phi_\varepsilon(v))$ où $\Phi_\varepsilon(u)$ est donnée par (5) .*

On introduit ici l'indice ε dans les notations des solutions de (3) et (5) en vue de passer à la limite pour ε tendant vers zéro. On aura également besoin des deux lemmes suivantes :

<u>Lemme 4.</u> *Soit $F(u)$ l'enveloppe convexe de f sur $[u_-,u_+]$. Alors $\Phi_\varepsilon(u)$ tendent vers $F(u)$ uniformément sur $[u_-,u_+]$, quand $\varepsilon\to+0$.*

<u>Démonstration.</u> D'une part, $\Phi_\varepsilon\le F$ évidemment.

D'autre part, pour chaque $\alpha>0$ il existe une fonction $G\in\mathbf{C}^2[u_-,u_+]$ telle que $0<F-G<\alpha$ et $\ddot G\ge C(\alpha)>0$ sur $[u_-,u_+]$. Soit $c(\varepsilon,\alpha)$ le point du maximum de $G-\Phi_\varepsilon$ sur $[u_-,u_+]$ et soit ce maximum positif. Alors $\Phi_\varepsilon(c)\le G(c)<F(c)\le f(c)$ et il existe donc $\ddot\Phi_\varepsilon(c)\ge\ddot G(c)\ge C(\alpha)$. Par suite $\frac{\varepsilon}{f(c)-\Phi_\varepsilon(c)}\ge C(\alpha)$ et pour tout ε assez petit $G-\Phi_\varepsilon<\alpha$ sur $[u_-,u_+]$. On en tient enfin que $F-\Phi_\varepsilon<2\alpha$ sur $[u_-,u_+]$ dans ce cas; cette inégalité est d'ailleurs évidente si le maximum n'est pas positif, et le lemme est alors démontré. $\triangle$

<u>Lemme 5.</u> *Soit $F_n(u)$, $n=1,2,\ldots$ une suite de fonctions convexes qui converge vers $F_0(u)$ uniformément sur $[u_-,u_+]$. Alors la suite $U_n(\xi)$ tend vers $U_0(\xi)$ au points de continuité de U_0 , où $U_n(\xi)$, $n=0,1,\ldots$ sont les fonctions construites par la formule (4) à partir des fonctions F_n .*

Le lemme 5 découle de théorèmes générales de l'analyse fonctionnelle et de la formule de Fenchel. On peut trouver une démonstration élémentaire du lemme dans [1].

Etablissons finalement la relation entre les problèmes $(1_\varepsilon),(2)$, $\varepsilon>0$ et $(1_0),(2)$:

<u>Théorème 2.</u> *Soit $U_\varepsilon(x/t)$ les solutions du problème $(1_\varepsilon),(2)$ construites dans le théorème 1 ci-dessus. Alors lorsque $\varepsilon\to+0$, $U_\varepsilon(x/t)$ tendent p.p. vers la fonction $U_0(x/t)=\partial/\partial x\max\limits_{u_-\le v\le u_+}(xv-tF(v))\equiv\partial/\partial x\max\limits_{u_-\le v\le u_+}(xv-tf(v))$, où U_0 est une solution du problème $(1_0),(2)$ au sens de Kruzhkov.*

La convergence des U_ε résulte immédiatement des lemmes 4 et 5. En utilisant la technique de Kruzhkov ([7]-[9]), on démontre facilement que $U_0(x/t)$ est une solution entropique de $(1_0),(2)$ par le passage à la limite dans la suite U_ε lorsque $\varepsilon\to+0$.

Les méthodes de ce travail fournissent des résultats analogues dans le cas du problème de Riemann pour le système

$$\begin{cases} u_t + f(v)_x &= \varepsilon t u_{xx} \\ v_t + u_x &= 0 \end{cases}$$

avec une fonction de flux f continue croissante.

L'auteur tient à exprimer à quel point il est reconnaissant au Prof. Stanislav N.Kruzhkov pour l'avoir initié aux mathématiques et en particulier lui avoir proposé ce problème.

Références

1. B.Andreyanov "Vanishing viscosity method and explicit formulae for solutions to the Riemann problem for scalar conservation laws." Vestnik Mosc. Univ., à paraître.
2. L.Barthélemy "Problème d'obstacle pour une équation quasilinéaire du premier ordre." Ann. Fac. Sci. Toulouse, 1988, Vol.9, No.2, pp. 137-159.
3. Ph.Bénilan "Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications." Thèse Doctorat d'Etat, Univ. Paris Sud, Orsay, 1972
4. I.M.Gelfand "Some problems in the theory of quasilinear equations." Uspekhi mat. nauk, Moscou, 1959, V.14, No.2, pp.87-158.
5. E.Hopf "The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$." Comm. Pure Appl. Math., 1950, V.3, No.3, pp.201-230.
6. A.S.Kalashnikov "Construction of generalized solutions of quasilinear equations of first order without convexity conditions as limits of solutions of parabolic equations with a small parameter." Dokl. Akad. Nauk URSS, 1959, V.127, No.1, pp.27-30.
7. S.N.Kruzhkov "Generalized solutions of the Cauchy problem in the large for first-order nonlinear equations." Dokl. Akad. Nauk URSS, 1969, V.187, No.1, pp.29-32.
8. S.N.Kruzhkov "First-order quasilinear equations in several independent variables." Mat. Sbornik, Moscou, 1970, V.81, No.2, pp.228-255.
9. S.N.Kruzhkov "Nonlinear partial differential equations. Part II." (Lections 3,4), Mosc. St. Univ., preprint, 1970.
10. S.N.Kruzhkov, E.Y.Panov "First-order quasilinear conservation laws with infinite initial data dependence area." Dokl. Akad. Nauk URSS, 1990, V.314, No.1, pp.79-84.
11. S.N.Kruzhkov, N.S.Petrosyan "Asymptotic behaviour of the solutions of the Cauchy problem for non-linear first order equations." Russian Math. Surveys, 1987, V.42, No.5, pp.1-47.
12. P.D.Lax "Hyperbolic systems of conservation laws II." Comm. Pure Appl. Math., 1957, V.10, No.4, pp. 537-566.