C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I, p. 477–482, 2001
Analyse numérique/*Numerical Analysis*

L'approche « continue » pour une méthode de volumes finis

Boris P. ANDREIANOV [a], Michaël GUTNIC [b], Petra WITTBOLD [b]

[a] Laboratoire de mathématiques, Université de Franche-Comté, 25030 Besançon, France
[b] Irma, Université Louis-Pasteur, 67000 Strasbourg, France
Courriel : Boris.Andreianov@math.univ-fcomte.fr; Michael.Gutnic@math.u-strasbg.fr; Petra.Wittbold@math.u-strasbg.fr

(Reçu le 29 mai 2000, accepté après révision le 4 décembre 2000)

Résumé. Sur l'exemple du problème de Dirichlet pour le système elliptique-parabolique doublement non-linéaire $b(v)_t = \operatorname{div}(|\mathrm{D}v|^{p-2}\mathrm{D}v)$, nous montrons comment les techniques variationnelles peuvent être appliquées pour obtenir des résultats de convergence des solutions approchées construites par les méthodes de volumes finis. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

The "continuous" approach for a finite volume method

Abstract. *On the example of the Dirichlet problem for the doubly nonlinear elliptic-parabolic system* $b(v)_t = \operatorname{div}(|\mathrm{D}v|^{p-2}\mathrm{D}v)$, *we show how variational techniques can be applied to obtain results of convergence of approximate solutions constructed by finite volume methods.* © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Finite volume methods are methods of approximation of differential equations. Such a method produces a system of algebraic equations for a discrete unknown. The analysis of the convergence of solutions of this system, as the discretization step goes to zero, is inspired by the techniques developed for the continuous case, i.e., for the differential equation one studies. Nevertheless, they do not apply directly to the discrete equations obtained by finite volume schemes. Usually, one can develop the "discrete" versions of these techniques; this approach has provided numerous results, in particular in the case of quasilinear partial differential equations (*cf.* [6] and their references).

We are interested in a strongly nonlinear problem, where additional difficulties occur. We have asked how to adapt the discrete equations to the techniques of the "continuous" case, rather than adapt these techniques to the discrete equations. One of the aims of this work is to show that such an adaptation is possible, for the case of the model problem (P) below.

Note présentée par Philippe G. CIARLET.

S0764-4442(00)01830-9/FLA

We study finite volume discretizations of the nonlinear elliptic-parabolic problem:

$$\text{(P)}\qquad \begin{cases} b(v)_t = \operatorname{div}\big(|\mathrm{D}v|^{p-2}\mathrm{D}v\big)\ \big(= \operatorname{div} a_p(\mathrm{D}v)\big) & \text{on } Q = (0,T)\times\Omega,\\ v = 0 & \text{on } \Sigma = (0,T)\times\partial\Omega,\\ b(v)(0,\cdot) = u^0 & \text{on } \Omega. \end{cases}$$

We prove, in the case $p \neq 2$, the existence of discrete solutions and their convergence to a weak solution of (P), as the discretization step tends to zero. For $p = 2$, the problem has been solved in [7] by the "discrete" approach.

In (P), Ω is an open polygonal domain of $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$, and $T > 0$; $b(\cdot)$ is the gradient of a convex differentiable function; $p \in (1, +\infty)$ and $|\mathrm{D}v| = \big(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^d |\partial v_i/\partial x_j|^2\big)^{1/2}$.

The notion of weak solution of (P) is given in Definition 1 below; various existence results are given in [9,1,5,4,2]. To our knowledge, the uniqueness of a weak solution has only been shown in the case $N = 1$ (*cf.* [10]). Thus we are concerned in this note with convergence of a subsequence of approximate solutions to a weak solution of (P).

The approximation of (P) by a finite volume scheme can be viewed as a perturbation of the continuous problem (*cf.* Proposition 1). For its analysis, we use the arguments of the proof of stability of weak solutions to general elliptic-parabolic systems with respect to perturbations of data and coefficients. We follow the work [2], where the authors have revisited and systematized the variational techniques of Alt and Luckhaus [1].

We are led to introduce the notion of consistency for the schemes we use (*cf.* Definition 4), motivated by Proposition 1. Then we define the class of so-called admissible schemes (*cf.* Definitions 2 and 3) for which we are able to prove the consistency, and subsequently the convergence of corresponding discrete solutions. In order to obtain an admissible scheme, we do not only need to approach the normal component of the gradient but the whole nonlinear flux $|\mathrm{D}v|^{p-2}\mathrm{D}v$. So the standard scheme (case $p = 2$, *cf.* [7,6]) has to be completed. The detailed proofs of the results of this Note as well as examples of admissible schemes are given in [3]. Our results also extend to the case of equation with convection term, considered in [5].

1. Introduction

Les méthodes de volumes finis sont des méthodes d'approximation pour des équations différentielles. Une telle méthode produit un système d'équations algébriques pour une inconnue discrète. L'analyse de la convergence des solutions de ce système, lorsque le pas de discrétisation tend vers zéro, s'inspire des techniques développées pour le cas « continu », c'est-à-dire, pour l'équation différentielle en question. Toutefois, elles ne s'appliquent pas directement aux équations « discrètes » obtenues par les schémas de volumes finis. Il est alors habituel de développer les analogues « discrètes » de ces techniques ; cette approche a fourni un grand nombre de résultats, notamment dans le cas d'équations aux dérivées partielles quasi linéaires (*cf.* [6] et les références de cet ouvrage).

Nous nous sommes intéressés à un problème fortement non linéaire pour lequel des difficultés supplémentaires se présentent. Nous avons cherché à adapter les équations discrètes aux techniques du « continu », plutôt que d'adapter les techniques du « continu » aux équations discrètes. Un des objectifs de ce travail est de montrer qu'une telle adaptation est possible, dans le cas du problème modèle (P) ci-dessus.

Nous étudions la discrétisation par les méthodes de volumes finis du problème elliptique-parabolique doublement non linéaire (P). Nous montrons, dans le cas $p \neq 2$, l'existence des solutions discrètes et leur convergence vers une solution faible de (P) lorsque le pas de discrétisation tend vers zéro. Pour $p = 2$, le problème a été résolu dans [7] par l'approche « discrète ».

Dans (P), Ω est un domaine ouvert polygonal de $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$; $T > 0$; $b(\cdot)$ est le gradient d'une fonction convexe différentiable ; $p \in (1, +\infty)$ et $|\mathrm{D}v| = \big(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^d |\partial v_i/\partial x_j|^2\big)^{1/2}$.

La notion de solution faible de (P) est précisée dans définition 1 ci-dessous. Différents résultats d'existence sont donnés dans [9,1,5,4,2]. À notre connaissance, l'unicité de la solution faible a été prouvée uniquement dans le cas $N=1$ (*cf.* [10]). Ainsi, il s'agit dans cette Note de la convergence d'une sous-suite de solutions approchées vers une solution faible de (P).

L'approximation de (P) par un schéma de volumes finis peut être vue comme une perturbation du problème continu (*cf.* proposition 1). Pour l'analyser, nous empruntons les arguments de la preuve de stabilité des solutions faibles des systèmes elliptiques-paraboliques généraux par rapport aux perturbations des données et des coefficients. Nous nous appuyons sur le travail [2], où les auteurs ont repris et systématysé les techniques variationnelles dues à Alt et Luckhaus [1].

Nous sommes amenés d'une part, à introduire la notion de consistance des schémas utilisées (*cf.* définition 4), motivée par la proposition 1, et d'autre part, à définir la classe des schémas dites admissibles (*cf.* définitions 2 et 3) pour laquelle nous pouvons démontrer la consistance, puis la convergence des solutions discrètes correspondantes. Pour obtenir un schéma admissible, nous devons approcher d'une manière satisfaisante le flux non linéaire $|\mathrm{D}v|^{p-2}\mathrm{D}v$ au lieu de la seule composante normale du gradient. Nous devons donc compléter le schéma standard adapté au cas $p=2$ [7,6].

Les preuves détaillées des résultats de cette note ainsi que des exemples de schémas admissibles sont donnés dans [3]. Nos résultats se généralisent au cas de l'équation avec un terme de convection considérée dans [5].

2. Définitions

En suivant [1], nous supposons que $b(z)=\mathrm{d}/\mathrm{d}z\,\Phi(z)$, où $\Phi:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ est convexe différentiable. Définissons $B: z\in\mathbb{R}^N\mapsto\Phi^*(b(z))\in\mathbb{R}$, où Φ^* est la fonction convexe conjuguée de Φ. Nous supposons que $u^0\in\mathrm{L}^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$ et $\Phi^*(u^0)\in\mathrm{L}^1(\Omega)$.

DÉFINITION 1. – Une fonction $v\in E=\mathrm{L}^p(0,T;\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^N))$ est une solution faible de (P) si $b(v)\in\mathrm{L}^1(Q;\mathbb{R}^N)$, $b(v)_t\in E'=\mathrm{L}^{p'}(0,T;\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega;\mathbb{R}^N))$, et on a $b(v)_t=\operatorname{div}a_p(\mathrm{D}v)$ dans E' avec $b(v)(t,\cdot)-u_0\to 0$ essentiellement dans $\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ quand $t\to 0^+$.

Notations (*cf.* [6,3] *pour les détails*). – Les maillages de $Q=(0,T)\times\Omega$ sont notés $(\mathcal{T}^h,k^h)$. Le maillage en espace $\mathcal{T}^h$ consiste en mailles polygonales de $\mathbb{R}^d$, notées K, L, etc., munies de « centres » x_K, x_L, etc. Elles sont disjointes et couvrent Ω, sauf un ensemble de mesure nulle qui consiste en les interfaces entre deux mailles voisines. L'ensemble des mailles L voisines de K est noté $\mathcal{N}(K)$, l'interface entre K et L est noté $K|L$, $\nu_{K,L}$ est la normale à $K|L$ extérieure à K, $d_{K,L}=|x_K-x_L|$. Les mesures d- et $(d-1)$-dimensionnelles de K et $K|L$ sont notées $\mathrm{m}(K)$ et $\mathrm{m}(K|L)$, respectivement. La notation $S(K|L)$ est utilisée pour le « diamant » de base $K|L$, i.e., le plus petit convexe contenant $K|L,\ x_K,\ x_L$.

Nous considérons une suite de maillages parametrée par une suite $h\to 0$ telle que

$$k^h+\max_{K\in\mathcal{T}^h}\operatorname{diam}K\leqslant h.$$

DÉFINITION 2. – Une famille de maillages $(\mathcal{T}^h,k^h)_h$ est admissible si :
(D2-i) pour tout $K\in\mathcal{T}^h$, $L\in\mathcal{N}(K)$, on a $\overrightarrow{x_K\ x_L}\perp K|L$;
(D2-ii) le nombre d'éléments de $\mathcal{N}(K)$ est borné, uniformément en h ;
(D2-iii) les maillages sont « proportionnés », i.e., il existe $\zeta>0$ indépendant de h tel que

$$\zeta\max_{K\in\mathcal{T}^h}\operatorname{diam}K\leqslant\min_{K\in\mathcal{T}^h,\,L\in\mathcal{N}(K)}\operatorname{dist}(x_K,K|L).$$

Soit h fixé. L'approximation recherchée $\overline{v}^h$ d'une solution faible v de (P) est constante par maille d'espace-temps $Q_K^n=I^n\times K$, où $I^n=(k^h(n-1),k^hn)$, i.e., $\overline{v}^h|_{Q_K^n}=v_K^n\in\mathbb{R}^N$, $K\in\mathcal{T}^h$, $n=1,\dots,[T/k^h]+1$. Nous approchons le terme $b(v)_t$ dans Q_K^n par la différence finie $\big(b(v_K^n)-b(v_K^{n-1})\big)/k^h$. Dans le cas $p=2$ et sous la condition (D2-i), on approche le flux de $|\mathrm{D}v|^{p-2}\mathrm{D}v=\mathrm{D}v$ à travers $I^n\times(K|L)$

à l'aide de l'opérateur $\mathcal{D}^h_\perp : (v^n_K, v^n_L) \in (\mathbb{R}^N)^2 \mapsto (v^n_L - v^n_K)/d_{K,L} \in \mathbb{R}^N$ (*cf.* [6,7]). Pour un opérateur elliptique général, par exemple le p-Laplacien dans (P), on peut utiliser l'ensemble des valeurs $(v^n_K)_{K,n}$ pour approcher $\mathrm{D}v$ sur $I^n \times (K|L)$. Ainsi, un gradient discret est un opérateur $\mathcal{D}^h : (v^n_K)_{K,n} \subset \mathbb{R}^N \mapsto (g^n_{K|L})_{K|L,n}$. Afin de simplifier les formules, nous nous limiterons ici au cas de gradients discrets constants par interface.

Par abus de notation, on notera aussi $\mathcal{D}^h$ l'opérateur qui à $\eta \in \mathrm{L}^1(Q;\mathbb{R}^N)$ associe $\mathcal{D}^h\eta = (\mathcal{L}^h \circ \mathcal{D}^h \circ \mathcal{M}^h)\eta \in \mathrm{L}^\infty(Q;(\mathbb{R}^d)^N)$. De même pour $\mathcal{D}^h_\perp$. Ici, $\mathcal{M}^h : \eta \mapsto \left(\frac{1}{|Q^n_K|}\iint_{Q^n_K}\eta\right)_{K,n}$ donne l'ensemble des moyennes de η, et $\mathcal{L}^h : (g^n_{K|L})_{K|L,n} \mapsto \sum_{K,n} g^n_{K|L}\,\mathbb{1}_{I^n\times S(K|L)}$ étend dans le diamant $S(K|L)$ les valeurs de $(\mathcal{D}^h \circ \mathcal{M}^h)\eta$ associées à un interface $K|L$. Notons que $\mathcal{M}^h\overline{v}^h = (v^n_K)_{K,n}$ et que $\|\mathcal{D}^h_\perp \overline{v}^h\|_{\mathrm{L}^p(Q)}$ est la « norme $\mathrm{W}^{1,p}_0$-discrète » de $\overline{v}^h$.

DÉFINITION 3. – Soit $\Upsilon_\kappa(Q^n_K) = \{x \in Q^\ell_L : \mathrm{dist}(Q^n_K, Q^\ell_L) \leqslant \kappa h\}$. Une famille $(\mathcal{D}^h)_h$ de gradients discrets est admissible si : il existe $\kappa \in \mathbb{N}$, $C > 0$ indépendants de h tels que, pour tout $(v^n_K)_{K,n} \subset (\mathbb{R}^d)^N$:

(D3-i) $\displaystyle\iint_{Q^n_K} |\mathcal{D}^h(v^n_K)_{K,n}|^p \leqslant C \iint_{\Upsilon_\kappa(Q^n_K)} |\mathcal{D}^h_\perp(v^n_K)_{K,n}|^p$;

(D3-ii) $\mathcal{D}^h(v^n_K)_{K,n}|_{Q^n_K} = \mathrm{D}w(x_K)$, si pour tout $Q^\ell_L \subset \Upsilon_\kappa(Q^n_K)$ on a $v^\ell_L = \dfrac{1}{\mathrm{m}(L)}\displaystyle\int_L w(x)\,\mathrm{d}x$ avec une fonction w affine en x et constante en t ;

(D3-iii) $\dfrac{v^n_L - v^n_K}{d_{K,L}} = g^n_{K|L}\nu_{K,L}$;

(D3-iv) $\mathcal{D}^h$ est linéaire ;

(D3-v) $a_p(\mathcal{D}^h)$ est monotone, i.e., pour tout $(\tilde{v}^n_K)_{K,n} \subset (\mathbb{R}^d)^N$,

$$\sum_{K|L,n} k^h \mathrm{m}(K|L) d_{K,L}\big(a_p(g^n_{K|L}) - a_p(\tilde{g}^n_{K|L})\big) : \left(\frac{v^n_L - v^n_K}{d_{K,L}} - \frac{\tilde{v}^n_L - \tilde{v}^n_K}{d_{K,L}}\right)\nu_{K,L} \geqslant 0.$$

Des exemples de schémas admissibles dans le cas de maillages structurés rectangulaires et hexagonaux sont présentés dans [3]. Une généralisation est possible au cas de maillages de Voronoï duaux aux maillages triangulaires, quand les « centres » des mailles sont suffisamment proches de leurs barycentres. La restriction (D2-iii) est technique et peut être affaiblie, notamment dans le cas de certains maillages de Voronoï.

Pour un maillage $(\mathcal{T}^h, k^h)$ et un gradient discret $\mathcal{D}^h : (v^n_K)_{K,n} \mapsto (g^n_{K|L})_{K|L,n}$ donnés, avec des données initiales $(u^0_K)_K \subset \mathbb{R}^N$, on définit le schéma de volumes finis pour (P) :

$$(\mathrm{P}^h) \qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{m}(K)}{k^h}\big(b(v^n_K) - b(v^{n-1}_K)\big) = \displaystyle\sum_{L\in\mathcal{N}(K)} \mathrm{m}(K|L)\,a_p\big(g^n_{K|L}\big)\,\nu_{K,L} \quad \text{pour } K \in \mathcal{T}^h,\ n \in \mathbb{N}, \\ v^n_K = 0 \quad \text{pour } K \in \mathcal{T}^h \text{ tels que } \partial K \cap \partial\Omega \neq \varnothing,\ n \in \mathbb{N}, \\ b(v^0_K) = u^0_K \quad \text{pour } K \in \mathcal{T}^h. \end{cases}$$

Nous allons réécrire ce système d'équations discrètes sous la forme continue (2) ci-dessous. Pour un ensemble arbitraire $(g^n_{K|L})_{K|L,n} \subset (\mathbb{R}^d)^N$, considérons les problèmes suivants :

$$\begin{cases} \operatorname{div} a_p(\mathrm{D}w) = \dfrac{1}{\mathrm{m}(K)} \displaystyle\sum_{L\in\mathcal{N}(K)} \mathrm{m}(K|L)\,a_p\big(g^n_{K|L}\big)\,\nu_{K,L} \quad \text{dans } K, \\ a_p(\mathrm{D}w)\,\nu_{K,L}|_{K|L} = a_p\big(g^n_{K|L}\big)\,\nu_{K,L}, \end{cases} \tag{1}$$

pour tous $K \in \mathcal{T}^h$, $n \in \mathbb{N}$. Notons qu'il existe une unique solution (à constante près) de (1) dans $\mathrm{W}^{1,p}(K)$. Considérons l'opérateur $-A^h$ qui à $\eta \in E$ fait correspondre la divergence (au sens de distributions) de la fonction $a_p(\widetilde{\nabla}\eta^h)$, où $\widetilde{\nabla}\eta^h \in \mathrm{L}^p(Q)$ est définie par $\widetilde{\nabla}\eta^h = \sum_{K,n} \mathrm{D}w_K^n \, \mathbb{1}_{Q_K^n}$, où w_K^n vérifie (1) avec $g_{K|L}^n = \mathcal{D}^h \eta|_{I^n \times (K|L)}$.

PROPOSITION 1. – *Soit $(v_K^n)_{K,n}$ solution de* (P^h). *Soient $v^h \in E$ telles que $\mathcal{M}^h v^h = (v_K^n)_{K,n}$, et A^h défini ci-dessus. Soit $\tilde{u}^h \in \mathrm{L}^1(Q)$ définie par*

$$\tilde{u}^h(t,x)|_{Q_K^n} = b\big(v_K^n\big) + \frac{t - k^h n}{k^h}\big(b\big(v_K^n\big) - b\big(v_K^{n-1}\big)\big).$$

Alors on a

$$\tilde{u}_t^h = -A^h v^h \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(Q). \tag{2}$$

On peut dire qu'un schéma de volumes finis (P^h) produit l'approximation A^h de l'opérateur $A : \eta \in E \mapsto -\operatorname{div} a_p(D\eta) \in E'$. Cela nous amène à introduire la notion suivante.

DÉFINITION 4. – L'approximation de (P) par (P^h) est consistante si, pour tout $\eta \in E$, on a $A^h \eta \to A\eta$ dans E' lorsque $h \to 0$.

3. Résultats et idées des démonstrations

Soit $(\mathcal{D}^h)_h$ une suite admissible de gradients discrets associés à une suite admissible de maillages $(\mathcal{T}^h, k^h)_h$, parametrée par $h \to 0$. Supposons que $b(\cdot)$ et u^0 vérifient les hypothèses du paragraphe 2, et $\Phi^*\big(\sum_{K \in \mathcal{T}^h} u_K^0 \mathbb{1}_K\big) \to \Phi^*(u^0)$ dans $\mathrm{L}^1(\Omega)$ quand $h \to 0$.

L'existence d'une solution $(v_K^n)_{K,n}$ du problème discret (P^h) peut être établie par l'application de l'argument de point fixe de Brouwer ; l'unicité vient de (D3-v). La fonction $\overline{v}^h = \sum_{K,n} v_K^n \, \mathbb{1}_{Q_K^n}$, engendrée par $(v_K^n)_{K,n}$, sera aussi appelée solution de (P^h).

THÉORÈME 1. – *La famille des solutions $\overline{v}^h$ de* (P^h) *est relativement faiblement compacte dans* $\mathrm{L}^p(Q)$. *Tout point limite dans $\mathcal{D}'(Q)$ est une solution faible de* (P).

Par abus de notation, on supprimera les indices dans les notations des sous-suites. Dans un premier temps, on obtient les estimations a priori suivantes.

LEMME 1. – *Toute solution $\overline{v}^h$ du problème* (P^h) *vérifie les estimations $\|\mathcal{D}_\perp^h \overline{v}^h\|_{\mathrm{L}^p(Q)} \leqslant C$, $\|\mathcal{D}^h \overline{v}^h\|_{\mathrm{L}^p(Q)} \leqslant C$ et $\|B(\overline{v}^h)\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^1(\Omega))} \leqslant C$. De plus, il existe des fonctions $v^h \in E$ telles que $\|v^h - \overline{v}^h\|_{\mathrm{L}^p(Q)} \to 0$ lorsque $h \to 0$, $\|v^h\|_E \leqslant C$, et $\mathcal{M}^h v^h = (v_K^n)_{K,n}$. On a aussi $\|A^h v^h\|_{E'} \leqslant C$, avec A^h défini dans le paragraphe* 2. *Ces estimations sont uniformes en h.*

La démonstration des trois premières estimations suit l'idée de [1], Lemma 1.5, et utilise les propriétés (D3-i), (D3-iii) du schéma. Pour construire v^h, on peut régulariser $\overline{v}^h$ par convolution en x avec le paramètre $\zeta h/2$ (*cf.* (D2-iii)), puis rétablir la valeur v_K^n de la moyenne sur Q_K^n. La dernière estimation se démontre à partir des définitions de A^h, v^h, en utilisant l'estimation de $\|\mathcal{D}^h \overline{v}^h\|_{\mathrm{L}^p(Q)}$ et une version de l'inégalité de Poincaré [3].

On déduit de la première estimation du lemme 1 que $(v^h)_h$ est relativement faiblement compacte dans $\mathrm{L}^p(Q)$. On peut donc extraire une sous-suite, noteé encore v^h, qui converge faiblement dans E vers une fonction v. Par construction de v^h, on a également $\overline{v}^h \rightharpoonup v$ dans $\mathrm{L}^p(Q)$. Le lemme suivant, dû essentiellement à Kruzhkov [8], permet de déduire de l'équation (2) et du lemme 1 la compacité forte de $(\tilde{u}^h)$ dans $\mathrm{L}^1(Q)$.

LEMME 2 (cf. [2], Lemma 6). – *Soient $u^\varepsilon \in \mathrm{L}^1(Q)$, prolongées par zéro en dehors de Q, qui vérifient $\partial/\partial t \, u^\varepsilon(t,x) = F^\varepsilon(t,x)$ dans $\mathcal{D}'(Q)$. Supposons que les estimations suivantes sont uniformes en ε :*

(L1-i) $\|u^\varepsilon\|_{\mathrm{L}^1(Q)} \leqslant C$;

(L1-ii) $\|F^\varepsilon\|_{\mathrm{L}^1(0,T;\mathrm{W}^{-m,1}(\Omega))} \leqslant C$, *pour un certain $m \in \mathbb{N}$* ;

(L1-iii) $\sup_{|\Delta x|\leqslant\Delta} \iint_Q \left|u^\varepsilon(t,x+\Delta x)-u^\varepsilon(t,x)\right| \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant \omega(\Delta)$, *où* $\lim_{\Delta\to 0}\omega(\Delta)=0$.

Alors la famille (u^ε) *est relativement compacte dans* $\mathrm{L}^1(Q)$.

Grâce à la monotonie de $b(\cdot)$, la limite de $\tilde{u}^h$ dans $\mathrm{L}^1(Q)$ s'identifie à $b(v)$. Pour passer à la limite dans (2) et ainsi démontrer le théorème 1, nous utilisons la version suivante de l'argument de Minty–Browder.

LEMME 3 (cf. [2], Lemma 7). – *Soit* $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E',E}$ *le produit de dualité entre un espace de Banach* E *et son dual* E'. *Soient* $A : E \to E'$ *un opérateur hémicontinu et* $A^h : E \to E'$ *une suite d'opérateurs monotones qui converge vers* A *ponctuellement. Supposons que* : (L2-i) $v^h \rightharpoonup v$ *dans* E ; (L2-ii) $A^h v^h \overset{*}{\rightharpoonup} \chi$ *dans* E' ; *si de plus, on a* (L2-iii) $\liminf_{h\to 0}\langle A^h v^h, v^h\rangle_{E',E} \leqslant \langle\chi, v\rangle_{E',E}$, *alors* $Av=\chi$.

La propriété (D3-v) des gradients discrets implique la monotonie de A^h. Le lemme 1, l'équation (2) et [1], Lemma 1.5, assurent (L2-i)–(L2-iii), avec $\chi = -b(v)_t$. Il nous reste à démontrer la convergence ponctuelle de A^h vers A, i.e., la consistance du schéma (*cf.* définition 4). Pour une suite de maillages et de gradients discrets admissibles (*cf.* définitions 2 et 3), on a :

THÉORÈME 2. – *L'approximation de* (P) *par* (P^h) *est consistante.*

En effet, nous montrons que les opérateurs $A^h : E \to E'$ sont localement uniformément höldériens. Il suffit donc de démontrer que $A^h\eta \to A\eta$ pour toute $\eta \in E$ affine par morceaux en x et constante par morceaux en t. Dans ce cas, la propriété (D3-ii) des gradients discrets assure que les mailles d'espace-temps suffisamment éloignées de l'ensemble des discontinuités de $\widetilde{\nabla}\eta^h$ ne contribuent pas dans $\|A^h\eta - A\eta\|_{E'}$. De plus, (D3-i) permet de majorer la contribution des autres mailles par l'intégrale de $\mathrm{D}\eta$ sur un ensemble de mesure $\mathrm{O}(h)$, ce qui termine la preuve des théorèmes 2 et 1.

Références bibliographiques

[1] Alt H.W., Luckhaus S., Quasilinear elliptic-parabolic differential equations, Math. Z. 183 (3) (1983) 311–341.
[2] Andreianov B., Bénilan Ph., Elliptic-parabolic problems: existence and continuity with respect to the data of weak solutions (en préparation).
[3] Andreianov B., Gutnic M., Wittbold P., Convergence of finite volume approximations for a nonlinear elliptic-parabolic problem: a variational approach (en préparation).
[4] Bénilan Ph., Wittbold P., On mild and weak solutions of elliptic-parabolic equations, Adv. Differ. Eq. 1 (6) (1996) 1053–1073.
[5] Diaz J.I., De Thélin F., A nonlinear parabolic problem arising in some models related to turbulent flows, SIAM J. Math. Anal. 25 (4) (1994) 1085–1111.
[6] Eymard R., Gallouët T., Herbin R., Finite volume methods, in: Ciarlet P.G., Lions J.-L. (Eds.), Handbook of Numerical Analysis, Vol. VII, Elsevier, 2000.
[7] Eymard R., Gutnic M., Hilhorst D., The finite volume method for an elliptic-parabolic equation, Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.) 67 (1) (1998) 181–195.
[8] Kruzhkov S.N., Results concerning the nature of the continuity of solutions of parabolic equations and some of their applications, Math. Notes 6 (1) (1969) 517–523.
[9] Lions J.-L., Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris, 1969.
[10] Otto F., L^1-Contraction and uniqueness for quasilinear elliptic-parabolic problems, J. Differ. Eq. 131 (1) (1996) 20–38.