Les « objets mathématiques » comme modèles mathématiques: introduction historique et inventaire

Stefan Neuwirth

Introduction.

Les modèles mathématiques de la deuxième moitié du 19e siècle ont marqué l'histoire de l'art du 20e en devenant des « figures » et des « formes mathématiques » en 1932 dans les légendes des photographies de Henry Swift du groupe *f*.64 (Heyman, 1992), puis des « objets mathématiques » photographiés par Man Ray pour les *Cahiers d'art* de Christian Zervos (1936) et exposés dans la galerie Charles Ratton (1936). Les catalogues illustrés Brill (1881, 1882, 1885, 1888, 1892) et Schilling (1903, 1911) de ces modèles ont été exploités par Max Ernst pour ses collages. Cette histoire est racontée en détail par Gabriele Werner (2002) et illustrée dans le catalogue d'Emmanuel Guigon (1997). On la retrouve dans un article du *Dictionnaire de l'objet surréaliste* (Villani et Strauss, 2013) qui accompagne l'exposition homonyme au Centre Pompidou. Aujourd'hui, ces modèles deviennent des « formes conceptuelles » dans l'œuvre d'Hiroshi Sugimoto (2004). Ils ont aussi inspiré des sculpteurs : Naum Gabo, Barbara Hepworth, Henry Moore, Antoine Pevsner (un frère de Gabo) et Ruth Vollmer : voir entre autres Drechsler (2008), Rottmann (2008b,c), Vierling-Claassen (2010).

Les modèles du Laboratoire de mathématiques de Besançon ont tous été édités par la maison Ludwig Brill entre 1877 et 1886. Cet éditeur était en fait le frère d'un mathématicien impliqué dans la conception des originaux : le professeur Alexander Brill, alors collègue de Felix Klein à Munich. La maison a été rachetée en 1900 par Martin Schilling, lui aussi frère de mathématicien, en l'occurrence Friedrich Schilling, un élève de Klein à Göttingen. Quelques détails de l'histoire de ces modèles sont donnés par Gerd Fischer (1986a), que l'on peut retrouver en français dans Chotteau et collab. (2001), y compris la recette de la pâte à modeler utilisée pour produire les originaux des plâtres. Polo-Blanco (2007), Palladino et Palladino (2009), Rowe (2013) fournissent des détails précieux.

Cussons et Coxeter (1961) donnent une introduction générale aux différents types de modèles mathématiques et Michael Rottmann (2008a) en propose une histoire succincte. Herbert Mehrtens (2004) en fait la présentation la plus complète : j'en ai tiré les trois citations ci-dessous.

Les modèles ne servaient pas à la vulgarisation mais à l'illustration des théories mathématiques en pointe à l'époque : théorie des surfaces algébriques, géométrie différentielle, théorie des fonctions, physique mathématique. Voici comment Klein (1891, page 194) exprime leur importance dans son *Programme d'Erlangen* en 1872.

> Il existe une Géométrie proprement dite qui ne peut pas, comme les recherches qui nous ont occupé, n'être qu'une forme sensible de considérations abstraites. Il y faut concevoir les figures de l'espace dans la pleine vérité de leur forme et (ce qui constitue le côté mathématique) apercevoir leurs relations comme des conséquences évidentes des postulats de l'intuition de l'espace. Pour cette Géométrie, un modèle, qu'il soit exécuté et examiné ou seulement figuré avec force, n'est pas un moyen pour atteindre au but, mais la chose elle-même.

La période d'or des modèles se termine au début du 20e siècle. Mehrtens décrit bien l'ambiguïté du modèle mathématique qui pose problème aux mathématiciens.

> Le plâtre a été produit pour montrer sa figure, sa *Gestalt*. Il représente un seul cas de la surface en question. Le modèle transforme la réalité virtuelle de la surface en réalité physique. Dans le monde virtuel de la géométrie différentielle et algébrique, elle est de taille indéfinie et s'étend à l'infini. Pour réaliser physiquement un cas unique [de la surface], il faut fixer tous les paramètres de sorte que l'objet obtenu ait les symétries et singularités que l'on voulait rendre visibles. L'objet physique incorpore alors des mathématiques et, utilisé ou observé par les

> mathématiciens, il incarne des mathématiques. J'ai observé ailleurs qu'un obus incorpore aussi des mathématiques (Mehrtens, 1996, 112, 122). Je les appelais "mathématiques rattachées", qui "cessent d'être des mathématiques dans la signification disciplinaire du mot, c'est-à-dire qu'elles sont le processus effectif de calculs complexes et de constructions à des fins extra-mathématiques" (Mehrtens, 1996, 91). [Mehrtens (2004, page 287), ma traduction]

Les mathématiciens d'aujourd'hui ont en général un souvenir très vague des recherches illustrées par ces modèles : même les spécialistes de géométrie différentielle ou des surfaces algébriques ignorent presque tout des surfaces exposées ici. Ils sont intéressés par d'autres aspects de concepts analogues plus généraux : « la connaissance de "détails" », diraient-ils, « ne nous intéresse pas. » Richard Baldus (1921, page 9, ma traduction) l'a exprimé ainsi.

> [...] l'intuition intérieure travaille en chaque instant au service d'une pensée très précise, n'examine jamais à l'aveuglette, elle vise toujours une propriété spatiale donnée. Le modèle mathématique ne peut pas en tenir compte ; il montre ainsi plus qu'on ne désire dans l'ensemble et trop peu dans le détail.
>
> ....
>
> Dans l'ensemble, les modèles mathématiques auront de la valeur pour l'éveil de certaines représentations abstraites-intuitives, particulièrement de l'apprenant ; ils sont le matériau sur lequel l'esprit peut s'exercer en vue des figures [seulement pensées et] non tracées. Dès qu'ils ont atteint ce but, ils sont devenus superflus, ils gênent même l'expert dans ses considérations abstraites, quand bien même il s'y laisse guider par l'intuition.

1 Les catalogues Brill, Dyck et Schilling.

L'identification de nos modèles a été faite à partir de la septième édition du *Catalogue de modèles mathématiques pour l'enseignement supérieur des mathématiques* (Schilling, 1911), qui contient une brève description de chaque modèle en deux fois. Dans la première partie, il apparaît comme n° d'une des séries I à XL rangées par ordre chronologique d'édition ; la deuxième partie, *Classement des modèles selon leur affinité objective*, donne sous un numéro allant de **1** à **377**

— le titre du modèle et un descriptif mathématique ;
— les dimensions ;
— le concepteur du modèle ainsi que l'initiale du professeur à l'initiative du modèle : ce sont surtout, outre Brill, Schilling et Klein, Walther Dyck, Hermann Schwarz et Hermann Wiener ;
— son prix : le premier modèle, qui est parmi les plus chers, coûte de l'ordre du dixième du salaire mensuel d'un professeur titulaire et de l'ordre du salaire mensuel moyen de l'époque (voir Sozialgesetzbuch, 2002, Anlage 1) ;
— parfois, une gravure sur bois (celle du modèle **96** est signée) : elle est alors reproduite ici.

Voici les prédécesseurs de ce catalogue :

— Catalogues de la maison Ludwig Brill recensés par le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* : Brill (1881, 1882, 1885, 1888).
— Cinquième édition Brill (1892) de ce catalogue ainsi que la collection Brill des explications livrées avec les modèles, mentionnées dans le catalogue de la salle de lecture mathématique de l'université de Göttingen de Hiemenz (1907).
— Catalogue de l'exposition prévue pour l'assemblée de la Société allemande des mathématiciens à Nuremberg en 1892, annulée pour des raisons de santé publique, mais qui aura eu lieu en 1893 à Munich : Dyck (1892) y classe les groupes de modèles par thématique et leur donne un numéro courant. Il y est fait mention d'un *Specialkatalog*, qui doit être le catalogue de Brill ci-dessus. Le *Rapport introductif* de Dyck (1894) contient une description de cette exposition. Voir aussi Hashagen (1999, 2003).
— Catalogue de l'exposition mathématique à l'exposition universelle de Chicago en 1893 : Dyck (1893), version réduite du précédent. Les actes du congrès mathématique international tenu en marge de l'exposition universelle contiennent une introduction à cette exposition par Dyck (1896).
— Catalogues de la maison Martin Schilling recensés par le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* : Schilling (1900, 1903).

FIGURE 1 – Salle de géométrie de l'exposition des modèles mathématiques et mathématico-physiques à l'Université technique de Munich en 1893 (Deutsches Museum, Bildstelle).

2 Les collections.

De nombreuses universités et de nombreux musées possèdent des collections de modèles de la maison Brill/Schilling. Je ne cite que celles qui ont fait l'objet d'une publication ou d'un site internet.

— Collections allemandes : voir Universitätssammlungen in Deutschland.
— Collections américaines : voir Kidwell (1996).
— Collections italiennes : voir Palladino.
— Institut Henri Poincaré : voir Institut Henri Poincaré, Brette (2000), Chotteau et collab. (2001), Laraby (2012), Apéry (2012).
— MIT : voir Vierling-Claassen (2007).
— Université de Coimbra : voir Tenreiro, Simões et Tenreiro (2013).
— Université de Dresde : voir Lordick.
— Université de Groningue : voir Polo Blanco et van der Zalm, Polo-Blanco (2007).
— Université de Göttingen : voir Georg-August-Universität Göttingen.
— Université de Halle : voir Richter et Sommer, Richter (2008).
— Université de Harvard : voir Knill (2006), Harvard graduate school of design (2012).
— Université de l'Illinois : voir Department of mathematics, University of Illinois.
— Université de Jérusalem : voir Levin (2013).
— Université de Marbourg : voir Agricola (2013).
— Musée national de la science et de la technologie "Léonard de Vinci" à Milan : voir Museo nazionale scienza e tecnologia "Leonardo da Vinci".
— Université de Naples : voir Carbone et collab. (1999).

— Université de Pavie : voir Olivati (2001).
— Université de Saragosse : voir Bernués Pardo et collab. (2012).
— Université de Tucson : voir The University of Arizona.
— Université de Turin : voir Todesco et Ferrarese, Ferrarese et Palladino (1998), Ferrarese, Giorgio (2004).
— Université de Vienne : voir Stachel (2012), Fendt (2010), Rabl (2010).

3 Besançon et les modèles mathématiques.

3.1 Tentative d'histoire de la collection.

Les modèles appartiennent au Laboratoire de mathématiques de Besançon où ils étaient un peu négligemment exposés dans la salle de convivialité et dans la bibliothèque. On témoigne que l'algébriste François Châtelet était encore sensible aux mathématiques incarnées par ces modèles dans les années 1970. Ils y sont arrivés du Laboratoire de mécanique rationnelle qui lui a été incorporé en 1966 ; ils y décoraient déjà la bibliothèque.

La collection était auparavant à l'Institut de chronométrie dans les bâtiments de l'École d'horlogerie, exposée dans une vitrine du bureau de son directeur Pierre Mesnage. Jules Haag, fondateur et premier directeur de l'institut, décrit dans le deuxième tome (Haag, 1921) de son *Cours complet de mathématiques spéciales* consacré à l'étude des courbes et des surfaces, beaucoup des concepts illustrés par les modèles.

Deux raisons indiquent que ces modèles ont été achetés dès le 19e siècle : leurs étiquettes sont au nom de Brill et sont donc antérieures au changement de direction en 1900 ; tous ont été édités entre 1877, date de fondation de l'entreprise, et 1886. Il est même plausible que leur achat ait été groupé, par exemple à l'occasion de l'installation d'un professeur dans sa chaire. À cette époque, deux chaires de la faculté des sciences de Besançon pouvaient s'intéresser à ces modèles : celle de *Mathématiques pures*, occupée par Victor-Zéphirin Elliot entre 1877 et 1894, et qui la renomme *Calcul différentiel et intégral*, et celle de *Mathématiques appliquées*, occupée par Louis Saint-Loup de 1872 à 1881, date à laquelle elle prend le nom de *Mécanique rationnelle et appliquée*. Elle sera occupée deux ans par Louis-Jules Gruey, puis deux ans par Gabriel Koenigs, puis deux ans par Jules Molk (après trois années comme chargé de cours), avant d'être reprise par Louis Saint-Loup jusqu'en 1901.

L'exemplaire du catalogue de la Fabrique de modèles pédagogiques de Jakob Peter Schröder (1877) à la bibliothèque universitaire de Besançon contient deux correspondances du 5 et du 9 janvier 1878 adressées par son auteur en réponse à deux lettres du 2 et du 5 janvier, dans lesquelles Saint-Loup a montré son intérêt pour les modèles de pistons 699, 700 et 701. Le hasard veut que cette maison soit de Darmstadt comme la maison Brill, de sorte que ces lettres prouvent le commerce de modèles mécaniques à cette époque. De plus, la deuxième thèse de Saint-Loup, *Sur les lignes géodésiques*, est en géométrie. Mais le choix des modèles correspond davantage aux intérêts scientifiques d'Elliot et encore plus à ceux de Koenigs. Ce dernier évoque d'ailleurs un modèle mécanique élaboré à Besançon en 1886 dans Darboux et Kœnigs (1889).

3.2 Description de la collection.

La collection du Laboratoire de mathématiques de Besançon comporte deux types d'objets :
— des structures de fils de soie parfois de différentes couleurs tendus sur des cadres de laiton pour représenter des surfaces réglées – dans certains modèles, les fils sont attachés par un bout et tendus par un poids attaché à l'autre bout ;
— des plâtres pour représenter des surfaces : lorsque celles-ci ont des points singuliers, des fils de fer sont nécessaires pour articuler les morceaux de plâtre. Des lignes distinguées de différentes couleurs étaient tracées à la surface des plâtres. Leur signification était explicitée dans des brochures accompagnant les modèles, mais la couleur et les brochures ont disparu. Ces brochures ont été rassemblées et publiées séparément dans Schilling (1904).

Chaque objet portait une étiquette à l'origine : il n'en reste la plupart du temps qu'un fragment ou des traces de colle, voire rien.

Voici une liste des concepts illustrés par les modèles exposés :
— surfaces algébriques du 2nd degré, appelées *quadriques* : un modèle variable de l'hyperboloïde ;

— surfaces algébriques du 3^e degré, appelées *cubiques* : sept modèles ;
— surfaces algébriques du 4^e degré, appelées *quartiques* : cyclides (quatre modèles), surface de Kummer, voûte bohémienne, surfaces réglées (trois modèles) ;
— surfaces *hélicoïdales* : un modèle représente un serpentin ;
— surfaces qui illustrent des concepts de la géométrie différentielle :
  — *lignes de courbure* : deux modèles ;
  — courbes *asymptotes* et *paraboliques* sur les surfaces : trois modèles ;
  — surfaces de *courbure négative constante* et à ce titre modèles de la géométrie non euclidienne : deux modèles ;
  — surfaces de *courbure moyenne constante* ;
— *fonctions d'une variable complexe* : modèle de la fonction $6w = e^{1/6z}$ et cinq modèles des fonctions *doublement périodiques* $\wp$ de Weierstrass ;
— *figures d'équilibre* en mécanique ;
— *trajectoires* en cinématique ;
— *fronts d'onde* en optique.

[Tous les textes encadrés sont des descriptions des modèles extraites du *Catalogue de modèles mathématiques pour l'enseignement supérieur des mathématiques* (Schilling, 1911) de Martin Schilling.]

Erklärung* der nachfolgend gebrauchten *Abkürzungen.

1. Die der laufenden Nummer in Klammern beigefügten Zahlen geben die Serie und Nummer aus dem *ersten Teil* des Katalogs an. Die Klammer am Schluß enthält die Größe des Modells in cm.
2. Das Zeichen ° an der laufenden Nummer bedeutet, daß das Modell nicht einzeln abgegeben wird, sondern nur mit den anderen Modellen derselben Serie oder Gruppe zusammen.
3. Die Buchstaben (B), (D), (K), (S), (W), (Sg) bedeuten: hergestellt unter Leitung oder auf Anregung von Prof. *Brill*, jetzt in Tübingen, Prof. *Dyck* in München, Prof. *Klein*, jetzt in Göttingen, Prof. *Schwarz*, jetzt in Berlin, † Geh. Hofrat *Wiener* in Karlsruhe, Prof. Fr. *Schilling*, jetzt in Danzig.
4. Die Modelle sind, wo nichts anderes angegeben ist, aus Gips angefertigt.

Inventaire de la collection.

Nous présentons les modèles dans l'ordre exact de la deuxième partie du catalogue Schilling (1911). Les références aux modèles indiquent
— d'abord leur occurrence dans Schilling (1911) par série et n° dans la série avec l'indication de l'année d'édition, puis dans la deuxième partie du catalogue ;
— puis leur occurrence dans Dyck (1892) par numéro courant et la référence au *Specialkatalog* si elle est donnée ;
— puis le cas échéant le commentaire mathématique dans Fischer (1986b) par sa page et les photographies dans Fischer (1986a) par leur numéro, et
— leur occurrence dans le catalogue du MIT par Vierling-Claassen (2007).
Chaque référence est accompagnée d'un code-barres QR qui renvoie à une page sur le site `http://epiphymaths.univ-fcomte.fr/modeles` proposant des liens et des ressources. J'indique aussi dans quelles autres collections chaque modèle se trouve.

4 Surfaces quadratiques.

4.1 Hyperboloïdes.

4.1.1 Modèle variable à fils pour la représentation de l'hyperboloïde à une nappe par ses génératrices, cercles directeurs inégaux.

Ce modèle a subi une rénovation qui le fige dans la position du cône tronqué et rend impossible l'usage qui en était prévu. Deux systèmes de fils étaient attachés aux œillets du cercle directeur supérieur et passaient par des œillets du cercle directeur inférieur. Vingt-deux fils partaient d'un point du cercle supérieur et passaient par des œillets d'un segment tangent au cercle inférieur. Tous ces fils étaient tendus par des poids, de sorte que le modèle était variable.

Dans une position moyenne, les deux systèmes de fils représentent un même hyperboloïde ; si on tourne le cercle supérieur, ils en forment deux. Lorsqu'on met les cercles directeurs en position parallèle et qu'on tourne celui du haut, le modèle parcourt une série de formes d'hyperboloïdes dont les formes limites sont un cône tronqué et un cône à deux nappes. Si les cercles directeurs sont en position horizontale par rapport au modèle, ce sont des hyperboloïdes de révolution ; si leurs plans font un même angle avec l'horizontale, ce sont des hyperboloïdes à trois axes. En inclinant les plans des cercles directeurs l'un vers l'autre, on engendre des surfaces quartiques gauches : en voici la définition dans Salmon (1882, note 1 page 129) :

> Une surface engendrée par le mouvement d'une droite s'appelle une surface *réglée.* Si chaque génératrice est coupée par la génératrice immédiatement consécutive, la surface réglée est dite *développable.* S'il n'en est pas ainsi, on la nomme surface *gauche.*

Références. Schilling, série IV (1879) n^{o} 3 pages 9-10 et **18** page 113. Dyck, **158** *Specialkatalog 13* pages 259-260. Fischer, page 3, photographie 6 : modèle avec cercles directeurs égaux.

Collections. Coimbra, Vienne.

17. (IV, 2.) Veränderliches **Fadenmodell zur Darstellung des einschaligen Hyperboloids** aus seinen Erzeugenden.

Stellt man die Leitkreise parallel und dreht den einen, so durchläuft das Modell eine Reihe von Hyperboloid-Formen vom Cylinder bis zum Kegel als Grenzfall. Bei horizontaler Lage der Leitkreise sind es Umdrehungshyperboloide, bei geneigter dreiaxige.

Wenn man die Ebenen der Leitkreise *gegeneinander* neigt, so entsteht eine windschiefe *Fläche 4. Ordnung.*

Diejenige Linienfläche, welche die an dem Modell angegebenen Kreistangenten zu Leitlinien hat, ist ein *Paraboloid*, das mit der durch die Leitkreise dargestellten Fläche zwei consecutive Erzeugende gemeinsam hat (vergl. Salmon-Fiedler, Raumgeometrie, 2. Teil, Art. 206). Beschreibung im 1. Teil, IV. Serie Nr. 2. (B). (22 × 55 cm.) .... Mk. 85.–.

Dasselbe mit zwei Scharen von Erzeugenden .... Mk. 90.–.

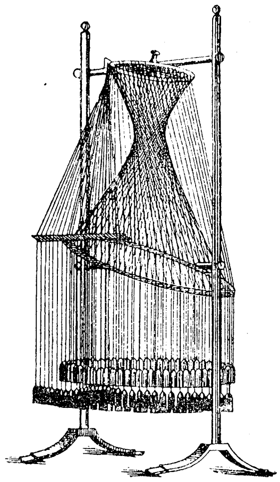

FIGURE 2 – Hyperboloïde à une nappe.

18. (IV, 3.) **Wie vorstehend,** nur sind die Leitkreise ungleich, die beiden Scharen der Erzeugenden durch Faden dargestellt, die beiden Grenzlagen Kegel. Beschreibg. Teil I. Serie IV. Nr. 3 (B). $(22{,}5 \times 50$ cm.) . . . . Mk. 90.–.

5 Courbure et indicatrice de Dupin

Avant de nous intéresser aux surfaces d'ordre supérieur, je vais essayer de décrire les concepts relatifs à la courbure d'une surface à la manière du 19ᵉ siècle.

Considérons le plan tangent à un point de la surface. S'il a un contact d'ordre 2 avec la surface, on dit qu'il l'oscule, que le point est *parabolique* et que la courbure y est *nulle.* Le lieu de ces points est la *courbe parabolique* de la surface. Sinon, considérons un plan parallèle au plan tangent qui lui soit infiniment proche et supposons qu'il coupe la surface : son intersection est une conique appelée *indicatrice*, introduite par Dupin (1813).

La surface est de courbure négative si et seulement si c'est une hyperbole ; les deux asymptotes de cette hyperbole rapportée sur le plan tangent sont alors les *tangentes asymptotes* de la surface. Les *courbes asymptotes* d'une surface sont les courbes de la surface dont ce sont les tangentes. Intuitivement, il s'agit des courbes de la surface qui sont le moins courbées. Par exemple, si la surface est un hyperboloïde à une nappe, ses courbes asymptotes sont les droites de cette surface gauche.

La surface est de courbure positive si et seulement si l'indicatrice est une ellipse. Si c'est un cercle, le point est un *ombilic* de la surface.

En tout point qui n'est ni parabolique ni un ombilic, les deux axes de la conique rapportée sur le plan tangent sont les *tangentes de plus grande et de moindre courbure*, qui sont toujours orthogonales. Les *lignes de courbure* d'une surface sont les courbes de la surface dont les uns ou les autres axes sont les tangentes. Intuitivement, il s'agit des courbes de la surface de courbure extrémale.

6 Surfaces algébriques cubiques.

6.1 Surfaces cubiques non réglées.

La 7ᵉ série de modèles de Brill a été conçue par Carl Rodenberg (1879), élève d'Alfred Clebsch, et illustre sa classification des surfaces cubiques, à la suite des travaux de Felix Klein (1873).

Les surfaces cubiques sont les surfaces définies par un polynôme f de degré 3. On préfère en général utiliser des coordonnées homogènes pour définir une surface algébrique, c'est-à-dire qu'on remplace les trois coordonnées d'espace x, y et z apparaissant dans le polynôme f par x_1/x_0, x_2/x_0 et x_3/x_0, et qu'on multiplie l'expression obtenue par x_0^3, ce qui donne un polynôme homogène.

La classification est basée sur les points singuliers de la surface, appelés dans la suite points doubles. Un point est *double* si toutes les dérivées du polynôme s'y annulent : le développement limité du polynôme au voisinage de ce point à l'ordre 2 ne contient donc pas de partie affine, de sorte qu'il définit un cône s'il est non nul : c'est pourquoi on parle de *point conique*, noté C. Mais si le développement limité se factorise, le cône dégénère en la réunion de deux plans et on appelle le point *biplanaire*, noté B ; s'il se factorise en un carré parfait, le cône dégénère en un seul plan et on appelle le point *uniplanaire*, noté U.

La classe d'une surface cubique est le nombre de points de la surface tangents à un faisceau de plans générique : il est de 12 si la surface ne contient pas de points doubles ; l'indice des lettres C, B et U indique de combien d'unités la classe est diminuée par la singularité considérée.

Dans sa thèse, Polo-Blanco (2007) fait le lien entre ces modèles et la théorie algébrique moderne. Lê (2011) propose une approche historique.

6.1.1 Surface diagonale de Clebsch.

La surface diagonale peut être considérée comme représentante de toutes les surfaces cubiques génériques, c'est-à-dire sans point double, au sens où celles-ci peuvent être obtenues à partir de celle-là par un processus de déformation tout au long duquel n'apparaît jamais de point double.

On peut définir cette surface de manière très symétrique comme l'intersection de la surface cubique dans l'espace à quatre dimensions donnée par $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0$ avec l'hyperplan donné par $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Toute la surface est courbée négativement, mis à part un nombre fini de points paraboliques, ce qui rend cette surface beaucoup moins générique.

Voici comment Klein (1898, page 26) décrit le principe qui a présidé à la conception du modèle :

> Nous pouvons énoncer ici comme une règle générale que, lorsqu'on choisit un cas particulier en vue de la construction d'un modèle, la première chose requise est la régularité. Si l'on choisit pour le modèle une forme symétrique, non seulement l'exécution en est simplifiée, mais encore, ce qui a plus d'importance, le caractère du modèle s'imprimera plus aisément dans l'esprit.

Isabelle Fortuné considère que ce modèle est le sujet de la photographie de Man Ray publiée dans (Zervos, 1936, page 9) avec la légende « Surface réglée » (sic !) : elle écrit à ce sujet qu'il « semble en effet avoir reconnu, et recherché dans ces objets mathématiques, des possibilités de suggestion figurative, et surtout, les avoir parfois créées de toutes pièces, comme dans la "Surface cubique des 27 droites", par l'opposition des zones d'ombre et de lumière et le choix de l'angle de prise de vue. » (Fortuné, 1999, page 110). Gabriele Werner arrive à la même conclusion : « la reconnaissance est rendue difficile par le fait que Man Ray a pris cette de surface "de derrière", avec une vue plongeante extrême, de sorte que les trois "singularités de surface" qui se dressent de manière ovale sont raccourcies et paraissent plus pointues, et donnent un effet plus trapu à l'objet tout entier » (Werner, 2002, page 124, ma traduction). Mais la comparaison montre que ces deux auteurs se trompent : il faudra continuer à chercher le sujet de cette photographie à l'Institut Henri Poincaré et au Palais de la découverte.

Les lignes tracées à la surface représentent les 27 droites des surfaces cubiques lisses. Il y a 72 manières de choisir parmi elles 6 droites non coplanaires deux à deux : un choix a été noté 1, 2, 3, 4, 5, 6 sur le plâtre. Il existe alors un seul ensemble de 6 autres droites non coplanaires deux à deux, notées $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$, $6'$ telles que chaque droite i rencontre toutes les droites j' sauf i'. Cette configuration est appelée « double six de Schläfli ». Il reste alors 15 autres droites sur la surface : notées ij avec $i \neq j$, chacune rencontre i, i', j et j' ; elles étaient à l'origine de couleur rouge pour les distinguer des 12 autres.

Notons que le modèle gauchit ces droites, ce qui a incité Claus Michael Ringel à commissionner un nouveau plâtre à Friedhelm Kürpig, sur lequel les droites sont réellement droites.

Ce modèle a été photographié en 2004 par Hiroshi Sugimoto (2004) : *Diagonal Clebsch surface, cubic with 27 lines*, sous-titre $x_0+x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$, $x_0^3+x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3 = 0$, $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \in \mathbb{R}P^4$.

Références. Schilling, série VII (1881) n° 1 pages 14-16 et **44** page 116. Dyck, **163** *Specialkatalog 30* pages 263-264. Fischer, pages 10-12, photographies 10-12. Vierling-Claassen, modèle 17, pages 49-50. Vidiani (2006). Institut Henri Poincaré, 19 (Maillard et Belgodère, 128 ?). Campedelli, gruppo C N. 1.

Collections. Göttingen, Halle, Harvard, Harvard, Harvard, Harvard, Italie, MIT, Pavie, Pavie. Moulages réalisés sous la direction de Luigi Campedelli en 1952 : Milan, Turin.

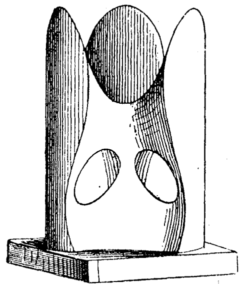

FIGURE 3 – Surface diagonale de Clebsch.

44. (VII, 1.) Die **Diagonalfläche** mit 27 reellen Geraden (Bezeichnung von Clebsch, s. Salmon-Fiedler, Analyt. Geom. d. R. II. Art. 289) kann als Repräsentant der allgemeinen F_3 mit 27 reellen Geraden angesehen werden. Zwar sind von den geradlinigen Dreiecken, welche die allgemeine Fläche enthält, auf dieser Fläche 10 in Punkte zusammengeschrumpft. Hiermit zugleich sind die diesen Dreiecken einbeschriebenen 10 Ovale der „parabolischen" Curve (derjenigen Curve auf der Fläche, welche die Partien positiver Krümmung von denen negativer trennt) auf Punkte (Ovalpunkte) reduciert. — Aber mit Hilfe eines Deformationsprocesses, dem eine Constanten-Änderung der Flächengleichung parallel läuft, lässt sich aus der Diagonalfläche die (nicht so übersichtlich darstellbare) allgemeine Fläche leicht ableiten.

Solche Deformationsprocesse sind es überhaupt, die nicht nur von den hier vorliegenden Haupttypen zu allen möglichen Formen von Flächen dritter Ordnung hinführen, sondern auch den Zusammenhang zwischen den einzelnen Typen der Serie herstellen.

Die 15 roten Geraden besitzen je zwei reelle Asymptotenpunkte, d. h. unter den Kegelschnitten, nach welchen alle durch eine solche hindurchgehenden Ebenen die Fläche schneiden, befinden sich 2 reelle, diese Gerade in den vorhin genannten Punkten berührende. Die 12 weissen Geraden bilden eine Doppelsechs, auf ihnen sind die Asymptotenpunkte imaginär. Mit Ausnahme der Ovalpunkte und der erwähnten Asymptotenpunkte ist die ganze Fläche negativ gekrümmt, (15×24 cm.)Mk. 25.–.

6.1.2 Surface avec un point double biplanaire B_4 avec une paire de plans principaux imaginaires et de plus deux points doubles coniques C_2.

La « ligne de crête » passant par le point double était tracée en vert ; c'est la droite d'intersection des plans principaux imaginaires. La « ligne de base » était tracée en rouge et relie les deux points doubles imaginaires. Ces deux lignes sont de multiplicité 4. La surface est de courbure négative.

56. (VII, 13.) **Fläche mit einem biplanaren,** die Klasse um 4 erniedrigenden **Knoten** B_4 mit **imaginärem** Hauptebenenpaar und ausserdem noch 2 imaginären conischen Knoten C_2.

Ausser der durch B_4 gehenden vierfach zu rechnenden Geraden (grün), nach welcher sich die beiden imaginären Hauptebenen daselbst schneiden, liegt noch eine die 2 imaginären Knoten verbindende vierfach zählende Gerade (rot) und, unendlich fern, die beiden eben genannten schneidend, eine unäre Gerade auf ihr. Die Fläche ist negativ gekrümmt. (13×16 cm.) . . . . Mk. 10.–.

Références. Schilling, série VII (1881) nº 13 pages 14-16 et **56** page 118. Dyck, **163** *Specialkatalog 42* pages 263-264. Fischer, pages 12-14, photographie 23. Vierling-Claassen, modèle 18, pages 51-52. Institut Henri Poincaré, 18 (Maillard et Belgodère, 143 ?). Campedelli, gruppo C N. 13.

Collections. Göttingen, Halle, Harvard, Harvard, Italie. Moulages réalisés sous la direction de Luigi Campedelli en 1952 : Milan, Turin.

6.1.3 Surface avec un point double uniplanaire U_6 dont le plan principal coupe la surface en trois droites.

Les trois droites passant par le point double étaient tracées en rouge et sont de multiplicité 8. Il reste les trois droites de « base », restées blanches. Toute la surface est courbée négativement, mis à part le point de rencontre de ces trois droites, où la courbure est nulle.

> **59.** (VII, 16.) **Fläche mit einem uniplanaren,** die Klassenzahl um 6 reducierenden **Knoten** U_6, dessen Hauptebene die Fläche in 3 achtfach zählenden roten Geraden schneidet.
>
> Sie entsteht aus Nr. 51 durch Zusammenziehen der 3 Knotenpunkte in den U_6; die 3 unären Geraden von Nr. 51 bleiben dabei erhalten und besitzen ebenfalls reelle Asymptotenpunkte. Im Allgemeinen besitzt eine solche Fläche eine parabolische Curve sechster Ordnung, welche die Form eines die 3 unären Geraden berührenden Ovals besitzt. Weil aber auf dem vorliegenden Modell diese 3 Geraden sich schneiden, verschwindet dieses Oval und die Fläche ist negativ gekrümmt. (12×15 cm.) Mk. 11.–.

Références. Schilling, série VII (1881) n^{o} 16 pages 14-16 et **59** page 118. Dyck, **163** *Specialkatalog 45* pages 263-264. Fischer, pages 12-14, photographie 28. Institut Henri Poincaré, 7 (Maillard et Belgodère, 146 ?). Campedelli, gruppo C N. 16.

Collections. Groningue, Halle, Italie. Moulages réalisés sous la direction de Luigi Campedelli en 1952 : Milan, Turin.

6.1.4 Surface avec un point double uniplanaire U_7.

Le point double se trouve dans un plan qui est tangent à la surface le long d'une droite de multiplicité 16 qui était tracée en vert, et qui la rencontre selon une droite de multiplicité 10 qui était tracée en rouge. Le plan tangent à la surface selon cette droite rencontre encore la surface selon une deuxième droite. On a tracé de plus la courbe parabolique, qui a un point de rebroussement en le point double de tangente la droite verte.

> **61.** (VII, 18.) **Fläche mit einem uniplanaren,** die Klasse um 7 reducierenden **Knoten** U_7, dessen Tangentialebene die Fläche längs der sechzehnfach zählenden grünen Geraden berührt und nach der zehnfachen roten schneidet.
>
> Die Tangentialebene längs der letzteren Geraden enthält die einzige unäre Gerade der Fläche mit 2 reellen Asymptotenpunkten. Die parabolische Curve ist, von den dazu gehörigen Geraden abgesehen (grüne sechsfach, rote doppelt), eine Curve vierter Ordnung, welche aus einem einzigen Oval besteht und in U_7 eine Spitze mit den grünen Geraden als Tangente daselbst besitzt. Durch diese Fläche findet der Übergang von Nr. 59 zu 60 statt. (12 × 15 cm.) . . . . Mk. 10.–.

Références. Schilling, série VII (1881) n^{o} 18 pages 14-16 et **61** pages 118-119. Dyck, **163** *Specialkatalog 47* pages 263-264. Fischer, pages 12-14, photographie 30. Campedelli, gruppo C N. 18.

Collections. Groningue, Halle, Italie. Moulages réalisés sous la direction de Luigi Campedelli en 1952 : Milan, Turin.

6.1.5 Surface avec un point double uniplanaire U_8.

Le plan tangent à la surface en le point double est en fait un plan *osculateur* selon sa seule droite, de multiplicité 27. On a aussi tracé le reste de la courbe parabolique, tangent à cette droite en le point double.

62. (VII, 19.) **Fläche mit einem uniplanaren Knoten U_8,** durch welche die Klassenzahl um 8 vermindert wird.

Die Tangentialebene in U_8 osculiert die Fläche längs der einzigen siebenundzwanzigfach zählenden Geraden. Sieht man von dieser als Teil der parabolischen Curve zehnfach zu rechnenden Geraden ab, so ist die parabolische Curve ein Kegelschnitt, der in U_8 die Gerade der Fläche berührt. (12×15 cm.) Mk. 7.50.

Références. Schilling, série VII (1881) n$^{\text{o}}$ 19 pages 14-16 et **62** page 119. Dyck, **163** *Specialkatalog 48* pages 263-264. Fischer, pages 12-14, photographie 31. Campedelli, gruppo C N. 19.

Collections. Groningue, Halle, Italie. Moulages réalisés sous la direction de Luigi Campedelli en 1952 : Milan, Turin.

6.1.6 Surface hessienne pour les modèles VII, 2 et VII, 5.

Si une surface est donnée par une équation $f = 0$, la surface *hessienne* est la surface donnée par l'équation dét$([\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j]_{i,j}) = 0$. Pour les surfaces cubiques, f est un polynôme homogène en 4 variables de degré 3 : ces dérivées sont linéaires et la surface hessienne est donc du 4$^{\text{e}}$ degré.

Ici, il s'agit de la surface hessienne correspondant à la surface VII, 2 décrite en 9.2.2. Elle contient 16 droites, dont six, tracées en rouge, sont aussi les droites qui relient les points doubles de la surface VII, 2 ; les dix autres étaient tracées en vert et sont aussi les arêtes du *pentaèdre* qui est à la base de la classification de Rodenberg.

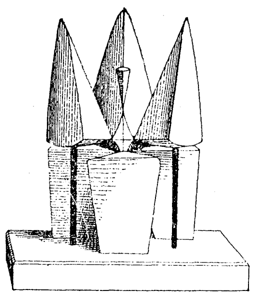

FIGURE 4 – Surface hessienne pour le modèle VII, 2.

64. (VII, 24a.) **Hesse'sche Fläche zu Nr. 45 und 48.**

Sie ist eine Fläche vierter Ordnung mit 14 reellen Doppelpunkten, von denen im vorliegenden Fall 3 im Unendlichen liegen. In den 4 Knotenpunkten der Fläche dritter Ordnung (Nr. 45), welche zugleich der Hesse'schen Fläche angehören, kommen noch diejenigen 10 Knoten hinzu, welche in den 10 Eckpunkten des ihr zugehörigen Pentaeders liegen; 6 davon sind die Schnittpunkte je einer roten und weissen Geraden (3 davon liegen im Unendlichen). Auf der Hesse'schen Fläche liegen ferner 16 Gerade, längs welchen je dieselbe Tangentialebene berührt, 10 davon sind die Kanten des der zugehörigen Fläche dritter Ordnung angehörenden Pentaeders, die 6 andern sind zugleich die 6 Knotenstrahlen der Fläche dritter Ordnung. (Wird die obige Fläche als Hesse'sche Fläche von Nr. 45 angesehen, so sind die roten Geraden auf ihr die Knotenstrahlen, die grünen Pentaederkanten, für Nr. 48 verhält es sich umgekehrt). (21×25 cm.) Mk. 45.–.

Références. Schilling, série VII (1881) n$^{\text{o}}$ 24a pages 14-16 et **64** pages 119-120. Dyck, **163** *Specialkatalog 54* pages 263-264. Maillard et Belgodère, 150 ?.

Collections. Groningue, Halle, Italie.

6.1.7 Partie de la surface précédente.

Ce modèle représente la partie bornée limitée par les points doubles de la surface précédente, agrandie et rendue symétrique par une transformation affine. Il était présenté sur une tige.

65. (VII, 24b.) Der durch die Knotenpunkte begrenzte endliche **Teil der vorhergehenden Fläche** vergrössert und regelmässig angenommen.

Derselbe würde ein Teil der Hesse'schen Fläche, einer solchen Fläche dritter Ordnung sein, für welche das Tetraeder der Knotenpunkte ein reguläres ist und bei der die Ebene der 3 unären (weissen) Geraden im Unendlichen liegt. (13 × 16 cm.) . . . . Mk. 11.–.

Références. Schilling, série VII (1881) nº 24b pages 14-16 et **65** page 120. Dyck, **163** *Specialkatalog 55* pages 263-264. Maillard et Belgodère, 151 ?.

Collections. Groningue, Halle, Italie.

7 Surfaces algébriques quartiques.

Les surfaces quartiques sont les surfaces définies par un polynôme homogène de degré 4.

7.1 Cyclides de Dupin.

Les cyclides de Dupin sont les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont des cercles ou des droites. Elles ont été découvertes par Charles Dupin dans sa thèse de 1803 et il leur consacre un chapitre dans Dupin (1822). Maxwell (1868) a décrit les différentes formes de la cyclide qui ne sont pas des surfaces de révolution : cyclide anneau, cyclide cornée, cyclide croisée, cyclide parabolique.

Les exemples élémentaires de cyclides sont les *tores*, obtenus par rotation d'un cercle autour d'un axe qui est dans le plan du cercle : si l'axe est à l'extérieur du cercle, c'est un tore *anneau* ; s'il lui est tangent, c'est un tore *corné* ; sinon, c'est un tore *croisé* (on exclut le cas où l'axe est axe de symétrie du cercle, auquel cas on obtiendrait une sphère). Toute cyclide de Dupin est alors obtenue par inversion d'un tel tore.

Unter Cycliden im *allgemeinen* Sinn (nach Darboux) versteht man alle diejenigen Flächen vierter Ordnung, welche den unendlich fernen imaginären Kugelkreis zur Doppelcurve haben. Sie sind die Enveloppen aller Kugeln, deren Mittelpunkte auf einer Fläche zweiten Grades liegen und eine gegebene Kugel stets orthogonal schneiden. Sie besitzen Scharen von Kreisen, die teilweise zugleich Krümmungslinien sein können; die Krümmungslinien sind im Allgemeinen jedoch höhere algebraische Curven. Diese Flächen können bis 4 Knotenpunkte enthalten.

Die Flächen mit 1, 2, 3, 4 Doppelpunkten erhält man auch durch Transformation mittelst reciproker Radien beziehungsweise aus folgenden Flächen zweiter Ordnung: a) allgemeine Fläche zweiter Ordnung, b) beliebiger Kegel, c) Rotationsfläche, d) Kreiskegel. Da die Krümmungslinien dabei erhalten bleiben, und Gerade und Kreise im Allgemeinen in Kreise, Ebenen und Kugeln in Kugeln übergeführt werden, so besteht im Falle b) und c) das eine System von Krümmungslinien aus Kreisen, die sich in 2 Doppelpunkten der Fläche schneiden, das andere wird durch Kugeln ausgeschnitten (ist sphärisch). Im Falle d) sind die beiden Kreisscharen, welche aus den Erzeugenden, resp. Parallelkreisen des Rotationskegels sich ergeben, von denen die ersteren sich in den 2 reellen, die anderen in den 2 imaginären Knotenpunkten sich schneiden, zugleich Krümmungslinien. Man nennt diese letzteren Dupin'sche Cycliden. Dieselben ergeben sich auch als Enveloppen aller Kugeln, welche 3 gegebene berühren. Vergl. die Abhandlung von Maxwell in Quart. Journ. of Math. Bd. 9, pag. 111, sowie Salmon-Fiedler, Geometrie des Raumes, II. Teil, Art. 318-323 (2. Aufl.).

85-91. Dupin'sche Cycliden. Sie wurden mit Ausnahme von Nr. 86, 87 u. 91 von Assistenten Dr. *P. Vogel* in München modelliert. (B).

7.1.1 Cyclide anneau.

La cyclide anneau est obtenue par inversion d'un tore anneau ; le centre de l'inversion est à l'extérieur ou à l'intérieur du tore : s'il était sur le tore, la cyclide contiendrait un point à l'infini, auquel cas on l'appelle *parabolique*.

Les deux familles de cercles tracés sur la cyclide sont ses lignes de courbure.

85. (V, 5a.) **Ringcyclide** mit 4 imaginären Knotenpunkten (davon ist die gewöhnliche Wulstfläche ein specieller Fall). Die aufgezeichneten 2 Kreisscharen sind die Krümmungslinien. (7 × 14 cm.) Mk. 10.50.

Références. Schilling, série V (1880) nº 5a pages 11-12 et **85** page 124. Dyck, **164** *Specialkatalog 57* page 265. Fischer, pages 30-33, photographie 71. Institut Henri Poincaré, 296-2. Campedelli, gruppo E N. 4.

Collections. Dresde. Göttingen, Groningue, Halle, Illinois, Italie, Pavie, Pavie, Vienne. Moulages réalisés sous la direction de Luigi Campedelli en 1952 : Milan, Turin.

7.1.2 Cyclides anneau avec courbes d'intersection de plans bitangents.

Le modèle plus bouffi porte une fausse étiquette : elle indique que c'est une « surface quartique avec 1 droite double », modèle nº 9 de la série IX, alors que c'en est le nº 7, c'est-à-dire le modèle **86** (IX, 7).

Le modèle plus mince est le modèle **87** (IX, 8).

En plus des deux familles de lignes de courbure, on a tracé sur les cyclides leur intersection avec des plans bitangents.

86. 87. (IX, 7 u. 8.) **Dieselbe** in anderen Verhältnissen. Auf beiden sind ausser den Krümmungslinien noch Schnittcurven mehrerer doppelt berührender Ebenen aufgezeichnet. Diese beiden Modelle sind Abgüsse der im Besitze des mathematischen Seminars in Berlin befindlichen, von Herrn *Kummer* angefertigten Originale. (12 × 5 u. 9 × 6 cm.) . . . . Preis zusammen Mk. 14.–.

Références. Schilling, série IX (1883) nº 7 et 8 pages 11-12 et **86 87** page 124. Dyck, **164** *Specialkatalog 58, 59* page 265. Fischer, pages 30-33. Maillard et Belgodère, 461-462.

Collections. 86 (IX, 7) : Dresde, Göttingen, Groningue, Illinois, Pavie, Vienne. **87** (IX, 8) : Dresde, Göttingen, Groningue, Harvard, Illinois, Italie, Vienne.

7.1.3 Cyclide croisée interne.

La cyclide croisée interne est obtenue par inversion d'un tore croisé ; le centre de l'inversion est à l'extérieur du tore ou à l'intérieur du fuseau qui se situe à l'intérieur du tore.

Ce modèle était fourni avec un support.

Les deux familles de cercles tracées sur la cyclide sont ses lignes de courbure.

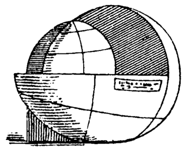

Figure 5 – Cyclide croisée interne.

89. (V, 5c.) **Spindelcyclide.** Sie besitzt neben 2 imaginären 2 reelle Knotenpunkte, welche 2 ineinander liegende Flächenmäntel vereinigen; die aufgezeichneten Kreise sind Krümmungslinien. (10 × 11 cm.) . . . . Mk. 7.50.

Références. Schilling, série V (1880) n^o 5c pages 11-12 et **89** page 124. Dyck, **164** *Specialkatalog 61* page 265. Fischer, pages 30-33, photographie 73. Maillard et Belgodère, 463 ?.

Collections. Göttingen, Groningue, Halle, Illinois, Italie, Pavie, Pavie, Vienne, Dresde.

7.2 Surfaces de Kummer.

Les surfaces de Kummer sont les surfaces quartiques avec le nombre maximal, 16, de points doubles. Il y a exactement 16 plans qui contiennent 6 parmi ces 16 points. Ces plans sont tangents à la surface selon des coniques qui ont été tracées sur le modèle. Rowe (2013) présente le contexte de l'élaboration des modèles de ces surfaces. Les fronts d'onde pour cristaux biaxiaux de la section 11.2.1 sont un autre exemple de surfaces de Kummer.

7.2.1 Surface de Kummer, tous les 16 points doubles et plans tangents doubles sont réels.

Die Kummer'sche Fläche (Singularitätenfläche eines Complexes zweiten Grades) ist von der vierten Ordnung und von der vierten Klasse und besitzt 16 Knotenpunkte und ebensoviele Doppeltangentialebenen, welche je 6 Knotenpunkte enthalten. Vergl. Kummer, Abhandlungen der Berliner Akademie von 1886 pag. 62 ff.; Plückers Werk: Neue Geometrie des Raumes etc., Leipzig 1868; Salmon, Geometrie des Raumes II. pag. 411-414, sowie Kapitel XII.

95. (II, 1a.) **Alle 16 Knotenpunkte und Doppeltangentialebenen sind reell**. (21×18 cm.) Mk. 28.–.

Alle 3 Modelle wurden von stud. math. *Rohn* in München (K) modelliert; Erläuterungen werden beigegeben.

Références. Schilling, série II (1877) n^o 1a pages 5-6 et **95** page 125. Dyck, **165** *Specialkatalog 67* page 265. Fischer, pages 15-17, photographie 34. Maillard et Belgodère, 277. Campedelli, gruppo E N. 1.

Collections. Göttingen, Groningue, Halle, Harvard, Italie. Moulages réalisés sous la direction de Luigi Campedelli en 1952 : Milan, Turin.

7.3 Surfaces quartiques avec droites doubles.

7.3.1 Surface quartique avec deux droites doubles incidentes.

Cette surface appelée « voûte bohémienne » est engendrée par translation d'un cercle horizontal de sorte que son centre décrive un cercle fixe vertical de même rayon. Quatre positions du cercle horizontal sont tracées, ainsi que la trajectoire des deux points du cercle horizontal dans le plan du cercle vertical, et des deux points qui en sont le plus éloignés.

Les deux droites doubles sont dans le plan vertical qui est perpendiculaire au plan du cercle vertical en son centre.

Sylvie Pic a pris cette surface comme point de départ de plusieurs œuvres : *Böhmisches Gewölbe*, *Bohemian dance*, *Tore dome bohemien* (2005).

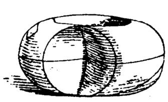

Figure 6 – Voûte bohémienne.

105. (X, 4.) **Fläche 4. Ord. mit 2 sich schneidenden Doppelgeraden** (böhmisches Gewölbe). Sie besitzt auf jeder der Doppelgeraden 2 Zwickpunkte, einen einfachen Selbstberührungspunkt, 4 nach Kreisen berührende Tangentialebenen und *entsteht* dadurch, dass man den Mittelpunkt eines Kreises auf einem andern von gleichem Radius fortrücken lässt, wobei die Ebene des beweglichen Kreises stets zu sich parallel und senkrecht zur Ebene des festen vom Mittelpunkt des beweglichen durchlaufenen bleibt. Von stud. math. *Finsterwalder* in München. (6×10 cm.) .... Mk. 4.–.

Références. Schilling, série X (1885) n° 4 pages 21-22 et **105** page 126. Dyck, **169** *Specialkatalog 77* page 267. Fischer, pages 20-21, photographie 50. Maillard et Belgodère, 274 ?.

Collections. Göttingen, Illinois, Italie.

7.4 Surfaces quartiques réglées.

Les surfaces quartiques réglées ont été classifiées par Rohn (1886), et c'est lui qui a conçu les dix modèles de cette 13e série. Le point de départ de cette classification est la *courbe double*, qui est le lieu des points d'intersection des génératrices de la surface. Les points singuliers de cette courbe sont appelés *points-pince.*

Dans sa thèse, Polo-Blanco (2007) fait le lien entre ces modèles et la théorie algébrique moderne.

7.4.1 Surface quartique réglée avec deux droites doubles sans point-pince réel.

Voici l'équation de cette surface en coordonnées homogènes : $a_{11}(x_0^2x_2^2 + x_1^2x_3^2) + a_{22}(x_0^2x_3^2 + x_1^2x_2^2) + 2a_{13}x_0x_1x_2x_3 = 0$, où les paramètres à fixer vérifient $a_{11} > 0$, $a_{22} < 0$ et $|a_{11} + a_{22}| < |a_{13}|$. La surface a deux nappes qui se rencontrent le long des deux droites doubles. La génératrice de la surface ne cesse de couper les deux droites doubles.

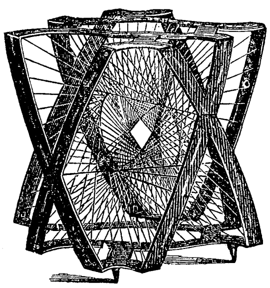

Figure 7 – Surface quartique réglée avec deux droites doubles sans point-pince réel.

107. (XIII, 2.) **Regelfläche 4. Ord. mit 2 Doppelgeraden ohne reelle Zwickpunkte;** sie besteht aus zwei congruenten Mänteln, die sich längs der beiden Doppelgeraden gegenseitig durchsetzen .... Mk. 49.–.

Références. Schilling, série XIII (1886) n° 2 pages 27-28 et **107** page 127. Dyck, **184** *Specialkatalog 164* pages 275-276. Maillard et Belgodère, 252.

Collections. Italie, Groningue.

7.4.2 Surface quartique réglée avec droite triple.

La droite triple est celle qui relie les deux centres des « étoiles à cinq branches » ; elle était figurée par un fil bleu. La génératrice passe deux fois par cette droite lorsqu'elle décrit la surface et y donne lieu à deux points-pince.

112. (XIII, 7.) **Regelfläche 4. Ord. mit dreifacher Geraden,** deren Punkte zwei constante und eine bewegliche Tangentialebene aufweisen. Während die Erzeugende die Regelfläche beschreibt, passiert sie zweimal die Lage der dreifachen Geraden, auf der zwei höhere singuläre Punkte entstehen Mk. 45.–.

Références. Schilling, série XIII (1886) n° 7 pages 27-28 et **112** page 127. Dyck, **184** *Specialkatalog 169* pages 275-276. Maillard et Belgodère, 257.

Collections. Groningue, Italie.

7.4.3 Surface quartique réglée avec cercle double et droite double.

Au milieu de la structure on voit apparaître le cercle double : il rencontre perpendiculairement la droite double, qui était figurée par un fil rouge, en un point où la surface se rencontre elle-même ; cercle et droite contiennent chacun deux points-pince.

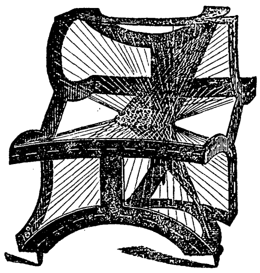

FIGURE 8 – Surface quartique réglée avec cercle double et droite double.

113. (XIII, 8.) **Regelfläche 4. Ord. mit Doppelkreis und Doppelgeraden,** die sich rechtwinklig schneiden; auf jeder Doppelcurve liegen zwei reelle Zwickpunkte. Die Fläche ist mehrfach symmetrisch; der Selbstberührungspunkt (Schnittpunkt von Kreis und Geraden) liegt reell auf der Fläche . . . . Mk. 49.–.

Références. Schilling, série XIII (1886) n° 8 pages 27-28 et **113** pages 127-128. Dyck, **184** *Specialkatalog 170* pages 275-276. Maillard et Belgodère, 258.

Collections. Italie, Groningue.

8 Surfaces hélicoïdales.

Une hélice circulaire H est une courbe incluse dans un cylindre de révolution dont les génératrices font un angle constant avec H

8.1 Surfaces hélicoïdales non réglées.

8.1.1 Serpentin.

Le serpentin, aussi appelé *hélice tubulaire*, est l'enveloppe de sphères de rayon constant dont le centre décrit une hélice circulaire. C'est une surface *canal*.

On a tracé à la surface, sans usage de couleur, les deux familles de lignes de courbure. L'une est formée des cercles perpendiculaires à l'hélice centrale. Il ne faut pas croire que l'autre consiste d'hélices circulaires : pour s'en rendre compte, on en a tracées en bleu à la surface du serpentin.

133. (VIII, 5.) **Röhrenschraubenfläche.** Sie ist die einhüllende aller Kugeln von constantem Radius, deren Centra auf einer Schraubenlinie liegen. Das eine System der Krümmungslinien besteht aus den zur mittleren Schraubenlinie senkrechten Kreisen, das andere aus transcendenten Curven (weiss), die jedoch nicht Schraubenlinien wie die blau gezeichneten sind. Das Problem der Krümmungslinien führt auf Kreisfunctionen, die Asymptotencurven führen dagegen auf elliptische Functionen. Von Assistenten *Th. Kuen* (B), dazu eine Erläuterung. (20 × 30 cm.) . . . . . . Mk. 15.50.

Références. Schilling, série VIII (1882) nº 5 pages 17-18 et **133** page 131. Dyck, **207** page 288. Maillard et Belgodère, 499 ?.

Collections. Göttingen, Illinois, Italie, Vienne.

9 Géométrie infinitésimale des surfaces.

9.1 Lignes de courbure, en particulier sur les surfaces quadratiques ; surfaces confocales.

9.1.1 Surface sur laquelle l'ellipsoïde est représenté de manière conforme par normales parallèles.

Les deux autres collections où figure ce modèle le considèrent comme non identifié : à Göttingen, on suppose que c'est une surface périodique ou une surface minimale. Pour lui retrouver sa "formule", j'ai procédé par élimination dans le catalogue Schilling qui signale l'auteur de chaque modèle ; le moment venu, j'ai fait venir la thèse de Karl Reinbeck (1886) de la Sorbonne : c'est la figure à la fin de cette section, qui en est l'unique planche, qui m'a permis de vérifier mon identification.

Comme ce modèle n'a pas été présenté ailleurs, je vais en parler plus longuement. Il montre une surface qui se représente de manière conforme sur un ellipsoïde de sorte que les normales en un point de la surface et en son image sur l'ellipsoïde sont parallèles : Reinbeck décrit cette surface dans sa thèse et il y donne toutes les données numériques qui lui ont servi pour réaliser le modèle.

Le point de départ de Reinbeck est le théorème ci-dessous de Christoffel (1867) qui repose sur les trois définitions suivantes.

— Une application est *conforme* si elle préserve les angles en tout point : un angle de tangentes en un point est envoyé sur un angle égal de tangentes.

— Une surface s'applique sur une autre *par parallèles normales* si les droites normales en les points appliqués l'un sur l'autre sont parallèles.

— Les lignes de courbure d'une surface la *divisent en carrés infinitésimaux* s'il existe une application conforme de la surface dans le plan qui applique les lignes de courbure sur les parallèles à deux axes orthogonaux du plan.

Théorème. *Les lignes de courbure d'une surface la divisent en carrés infinitésimaux si et seulement si elle peut être appliquée de manière conforme par normales parallèles sur une surface qui ne lui soit pas semblable.*

La figure ci-dessous, tirée de (Schilling, 1911, page 137), montre les lignes de courbure d'un ellipsoïde et illustre son application conforme sur une sphère et sur un plan. On y devine un ombilic : c'est le point où la ligne de plus grande courbure issue de A devient une ligne de moindre courbure.

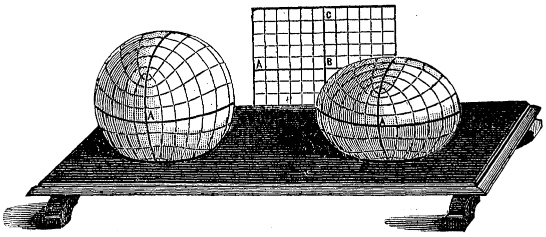

FIGURE 9 – Sphère avec 3 grands cercles et 18 coniques sphériques confocales qui correspondent aux droites de la plaque rectangulaire et aux lignes de courbure de l'ellipsoïde, qu'elles divisent en carrés infinitésimaux.

Il s'avère que les deux surfaces du théorème doivent être de courbure opposée et que les lignes de courbure de l'une s'appliquent sur les lignes de courbure de l'autre.

Or Reinbeck sait que les quadriques vérifient l'hypothèse du théorème. Sa thèse consiste alors à déterminer les surfaces sur lesquelles une quadrique s'applique de manière conforme par normales parallèles. Il note déjà deux faits.

— Les plans de symétrie perpendiculaires de la quadrique donnent lieu à des plans de symétrie perpendiculaires de la surface.

— Il est utile d'introduire les *coordonnées elliptiques* (t_1, t_2). Elles lui permettent de montrer que l'application conforme est singulière aux ombilics de la quadrique.

Le modèle exposé représente le cas d'un ellipsoïde de demi-axes $a > b > c$ dont un octant s'applique de manière conforme sur un rectangle de côtés U_1 et U_2 dans un rapport 4 : 3. Il calcule qu'en posant $c = 3$, il faut choisir b et a approximativement égaux à 3.988463 et 4.990676.

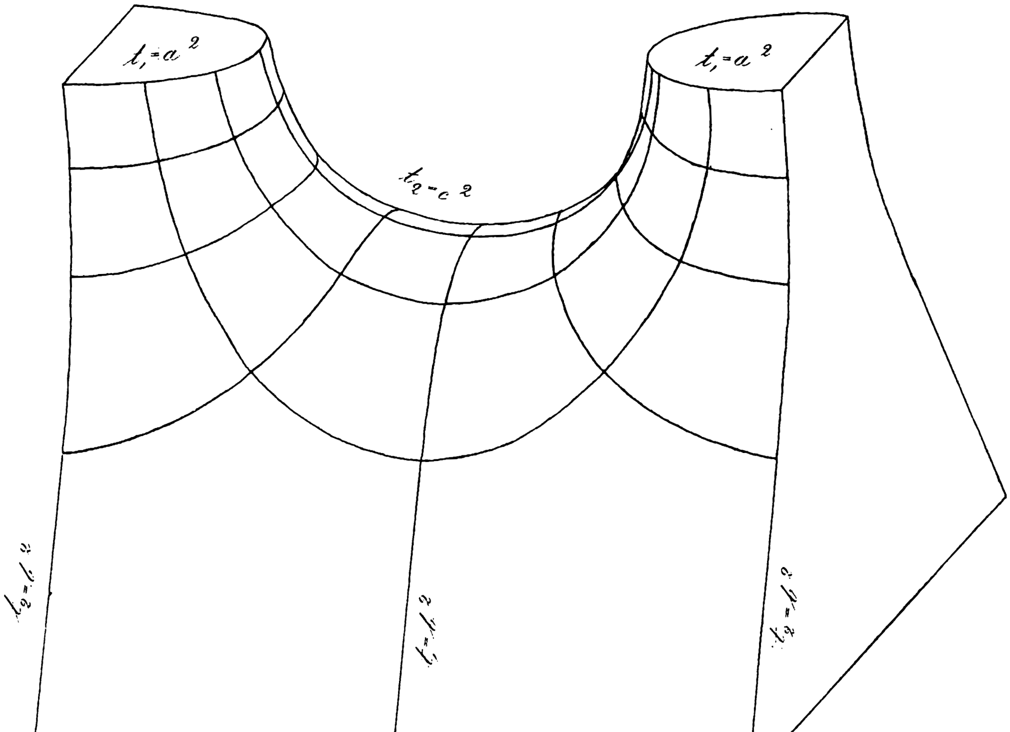

FIGURE 10 – planche de la thèse de Karl Reinbeck (1886)

La figure ci-dessus représente la moitié de la surface déterminée par Reinbeck en projection axonométrique : on obtient la surface complète en la symétrisant par rapport au plan $(y'z')$ des lignes légendées $t_1 = a^2$ sur la figure : c'est l'image de la ligne de plus grande courbure d'équation $t_1 = a^2$, donc l'image de l'ellipse qui est l'intersection de l'ellipsoïde avec le plan de ses deux moindres demi-axes. Cette surface peut être prolongée par périodicité selon les plans perpendiculaires à l'axe des y' des lignes légendées $t_2 = b^2$: ce sont les images de la ligne de courbure d'équation $t_2 = b^2$, donc les images de l'ellipse qui est l'intersection de l'ellipsoïde avec le plan du plus grand et du moindre demi-axe. Comme cette ligne

de courbure passe par les quatre ombilics de l'ellipsoïde, ses images se décomposent en deux moitiés congruentes passant par l'infini. Le modèle représente ainsi deux périodes de la surface.
Biographie. Karl Wilhelm August Reinbeck est né le 8 avril 1859 à Goslar au nord-ouest du Harz, où il a obtenu le baccalauréat vers Pâques 1879. Il a alors étudié les mathématiques et les sciences naturelles à Halle puis Leipzig et finalement Göttingen, où il a passé l'examen *pro facultate docendi* le 21 juin 1884 devant la Commission d'examen scientifique royale nécessaire pour devenir enseignant de mathématiques. Il a alors fait son année de stage pédagogique au lycée d'Einbeck en Basse-Saxe. Le 19 décembre 1885, il a soutenu sa thèse de doctorat de philosophie esquissée ci-dessus. Son directeur de thèse a certainement été Hermann Amandus Schwarz. Il est resté enseignant auxiliaire à Einbeck jusqu'aux Pâques 1888, puis à Hamelin jusqu'à octobre 1888, date à laquelle il a été nommé au lycée d'Uelzen. Il s'est marié peu après et a eu une fille. Il a publié deux manuels d'enseignement : *Die planimetrische Lehraufgabe für Quarta und Unter-Tertia des Realgymnasiums* (1899) et *Die planimetrische Lehraufgabe für Obertertia und Untersekunda des Realgymnasiums* (1900). Il est mort le 28 mai 1939 à Uelzen.

193. (XVII, 13.) **Fläche, auf welche das Ellipsoid durch parallele Normalen conform abgebildet wird.** Von Dr. K. Reinbeck in Einbeck (S).
Die Fläche wird durch ihre **Krümmungslinien** in unendlich kleine Quadrate geteilt. Mit Hülfe des Modells lässt sich eine Vorstellung gewinnen von der Gestalt derjenigen Flächen, auf welche die übrigen Flächen zweiten Grades durch parallele Normalen conform abgebildet werden . . . Mk. 14.–.

Références. Schilling, série XVII nº 13 (1886) pages 39-42 et **193** page 139. Dyck, **205** pages 287-288. Maillard et Belgodère, 550-551 ?.

Collections. Göttingen, Harvard, Harvard, Harvard.

9.1.2 Corps en forme de fève tordue, objet d'essai.

Ce corps sert à faire des essais pour déterminer les lignes de courbure et les courbes asymptotes et paraboliques sur une surface.

194º. (X, 11a.) **Bohnenförmiger Körper** mit Symmetrieebenen zur Anstellung von Proben bezüglich des Verlaufes der **Krümmungslinien, Asymptoten- und parabolischen Curven** auf einer Fläche. (14 × 8 cm.)
195º. (X, 11b.) **Dasselbe** anderer Gestalt (tordierte Bohne). (10 × 6 cm.)Zusammen Mk. 3.50.

Références. Schilling, série X (1885) nº 11b pages 21-22 et **195º** page 139. Dyck, **212** page 290. Maillard et Belgodère, 559 ?.

Collections. Italie, Göttingen, Illinois.

9.2 Courbes asymptotes et courbes paraboliques.

Les modèles de surface (X, 10) sont des surfaces de révolution sur lesquelles on a tracé les courbes asymptotes. « On aboutit à ceux-ci par la recherche des surfaces de révolution dont la projection des courbes asymptotes sur un plan orthogonal à l'axe appartient à des systèmes de courbes donnés (lignes logarithmiques, cercles, etc.) » (Schilling, 1911, page 139). Ils forment une collection de 12 modèles.

196–207. (X, 10a–m.) **Modelle von verschiedenen Rotationsflächen mit aufgezeichneten Asymptotencurven.** Man gelangt zu denselben durch die Frage nach solchen Rotationsflächen, deren Asymptotencurven zur Projektion auf eine Ebene senkrecht zur Axe gegebene Curvensysteme (logarithmische Linien, Kreise etc.) besitzen; a. bis l. von Herting in München berechnet und modelliert. (B). . . . . Zusammen Mk. 92.–.

9.2.1 Surface de révolution, engendrée par rotation de la parabole.

L'axe de rotation de la parabole est une parallèle à la directrice.

> **203°.** (X, 10g.) **Rotationsfläche, entstanden durch Umdrehung der Parabel** um eine Parallele zur Scheiteltangente. Gleichung der Fläche $z^2 = a^2(r-a)$, der Projection der Asymptotencurven
> $$\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}} \log \frac{2(r + \sqrt{r(r-a)}) - a}{a}.$$
> (18 × 15 cm.)

Références. Schilling, série X (1885) n° 10g pages 21-22 et **203°** page 140. Dyck, **208** *Specialkatalog 119* pages 288-289. Maillard et Belgodère, 363. Vierling-Claassen, modèle 33, pages 89-90.

Collections. Göttingen, Halle, Harvard, Harvard, Illinois, Italie, MIT, Pavie, Pavie, Vienne.

9.2.2 Surface cubique avec 4 points doubles coniques réels C_2.

C'est l'objet mathématique que l'on aperçoit dans une vitrine de l'Exposition surréaliste d'objets de 1936 à la galerie Charles Ratton : voir Werner (2002, page 149), qui suppose à tort que c'est un exemplaire du modèle **44** (VII, 1) de la section 6.1.1.

Ce modèle exhibe une courbe asymptote, tracée en jaune, ainsi que les droites de cette surface cubique.

Voici la planche réalisée par Weiler à la demande de Klein (1873) :

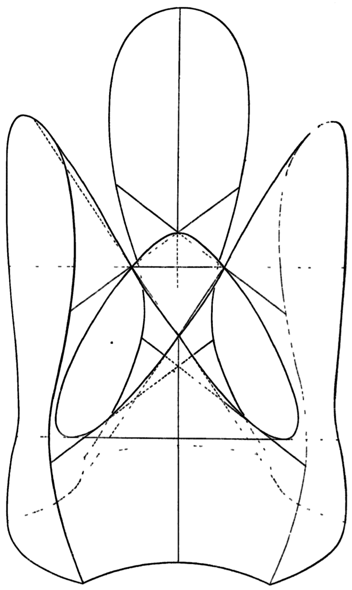

FIGURE 11 – surface cubique avec 4 points coniques réels C_2

> **212.** (II, 2.) **Fläche 3. Ord.** vierter Classe mit 4 reellen conischen Knoten, **auf welche eine Asymptotencurve** (gelb) **aufgezeichnet ist;** sie entspricht dualistisch einer Asymptotencurve der Steiner'schen Fläche (4. Ord., dritter Classe) und ist nach Clebsch (Crelle Bd. 67, S. 9) eine Raumcurve 6. Ord., vierter Classe, die in jedem Knotenpunkt der Fläche einen Rückkehrpunkt besitzt. Von *Bacharach* in München (B). Erläuterung beigegeben. (13 × 22 cm.) . . . . Mk. 16.50.

Cette surface a été réalisée une deuxième fois dans la série des surfaces cubiques par Carl Rodenberg : c'est le modèle **45** (VII, 2). Dans cette deuxième réalisation, on met l'accent sur les 27 droites de la surface. Elles se répartissent ainsi : chacune des 6 droites reliant deux points doubles, tracées à l'origine en rouge, est de multiplicité 4 ; il en reste 3, qui sont laissées blanches.

45. (VII, 2.) **Fläche mit 4 reellen conischen Knotenpunkten** C_2*). Man erhält dieselbe aus der Diagonalfläche durch Zusammenziehen der 4 Hälse. Von den 27 Geraden sind 4 . 6 in die 6 Kanten des aus den Knoten gebildeten Tetraeders zusammengerückt.

Beseitigt man einen Teil der Knoten durch Abschnüren, während man die anderen wieder in Hälse verwandelt, so erhält man einen der Flächentypen mit weniger als 27 Geraden. Beim Abschnüren z. B. eines Knotens werden 4 . 3 = 12 Gerade imaginär, man hat also den Typus einer Fläche mit nur 15 reellen Geraden u. s. f.

In die 6 roten Verbindungsstrahlen je zweier Knoten (*Knotenstrahlen*) sind je 4 Gerade hinein gefallen; die 3 weissen Geraden dagegen sind einfach (*unär*). Der durch die 4 Eckpunkte bestimmte tetraederförmige Flächenteil liegt ganz im Endlichen und ist positiv gekrümmt. (13×15 cm.)Mk. 12.–.

*) Die Buchstaben C, B, U bedeuten conische, biplanare, uniplanare Knoten; der angehängte Zeiger gibt die Anzahl der Einheiten an, um welche die Klasse durch die betreffende Singularität erniedrigt wird.

Voici les références de ce deuxième modèle : Schilling, série VII (1881) nº 2 pages 14-16 et **45** pages 116-117. Dyck, **163** *Specialkatalog 31* pages 263-264. Fischer, pages 12-14, photographie 13. Vierling-Claassen, modèle 20, pages 55-56. Il est présent à Göttingen, Groningue, Halle, Harvard, Italie, Pavie, Pavie.

Références. Schilling, série II (1877) nº 2 pages 5-6 et **212** page 141. Dyck, **211** *Specialkatalog 125* page 289. Maillard et Belgodère, 134. Campedelli, gruppo C N. 2.

Collections. Göttingen, Marbourg, Vienne. Moulages réalisés sous la direction de Luigi Campedelli en 1952 : Milan, Turin.

9.3 Surfaces de courbure constante et surfaces applicables l'une sur l'autre.

Ces surfaces, d'abord étudiées par Minding (1839), ont eu une importance cruciale en géométrie depuis que Beltrami (1869) a compris qu'elles jouissent de la propriété la plus importante de la géométrie euclidienne, la *libre mobilité des figures*. Voici comment elle est décrite par Schilling.

> Toutes les surfaces de même courbure constante sont applicables l'une sur l'autre sans extension ni compression et on peut les glisser sur elles-mêmes, comme par exemple le plan ou la sphère. On peut donc parler sur de telles surfaces de *congruence de figures*, parce qu'on peut faire se recouvrir des morceaux de surface [suffisamment petits] par glissement sur la surface même, et ainsi les comparer. La condition nécessaire pour élaborer une géométrie au sens euclidien est ainsi donnée pour ces surfaces ; à la place des « droites » on considère les lignes de plus court chemin, c.-à-d. les « géodésiques ». La géométrie sur les surfaces de courbure constante positive est la *géométrie sphérique* habituelle ; celle sur les surfaces de courbure constante négative est appelée *géométrie non euclidienne* et recouvre celle fondée par Lobatchevski, à laquelle manque le onzième axiome d'Euclide [le postulat des parallèles]. (Schilling, 1911, page 142)

En géométrie sphérique, les géodésiques sont les grands cercles, qui se rencontrent toujours en deux points antipodaux. Dans la suite, Schilling précise la différence entre surfaces de courbure constante positive et négative.

> Les surfaces de courbure constante négative se distinguent de manière essentielle de celles de courbure positive par les propriétés de leurs lignes géodésiques. Les lignes géodésiques issues d'un point ne se rencontrent *plus* du tout. Par un point de la surface passe une *infinité* de lignes [géodésiques] qui *rencontrent* une ligne géodésique donnée, *deux* qui lui sont *parallèles* (la rencontrent à l'infini) et une *infinité* de lignes qui ne *la rencontrent pas.* (Schilling, 1911, page 142)

Le modèle le plus connu de surface de courbure constante négative est la *pseudosphère*, surface de révolution engendrée par une courbe appelée *tractrice.* Les deux modèles suivants en montrent deux autres, mais aucune ne permet vraiment de voir la propriété qui vient d'être décrite, parce qu'il n'est pas possible de construire une surface de courbure constante négative dans l'espace euclidien à trois dimensions qui contienne plus d'un point à l'infini : si elle contient deux lignes géodésiques infinies, celles-ci sont parallèles.

9.3.1 Surface hélicoïdale de courbure constante négative.

La courbe méridienne de cette surface, c'est-à-dire son intersection avec un plan axial, est une partie de la tractrice symétrisée et répétée. Cette symétrisation a une motivation purement esthétique !

Ce modèle a été photographié par Hiroshi Sugimoto (2004) : *Dini's surface : a surface of constant negative curvature obtained by twisting a pseudosphere*, sous-titre $x = \cos u/\cosh v$, $y = \sin u/\cosh v$, $z = v - \tanh v + au$ ($0 \leq u < 2\pi$, $-\infty < v < \infty$).

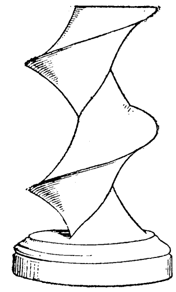

FIGURE 12 – Surface de Dini.

231. (V, 4.) **Schraubenfläche von constantem negativen Krümmungsmass,** deren Meridiancurve die Tractrix ist. Sie ist die einzige Schraubenfläche von der erwähnten Art, in deren Gleichung nicht elliptische Functionen eintreten. (Bei Flächen constanter positiver Krümmung gibt es keine von dieser Eigenschaft). Vergl. U. *Dini*, Comptes Rendus, Acad. Sc. Paris 1865, I. Sem. pag. 340; Th. *Kuen*, Berichte der kgl. bayr. Acad. 1884. Von Dr. *P. Vogel* in München (B). Erläuterung beigegeben. (24 × 15 cm.) .... Mk. 18.–.

Références. Schilling, série V (1880) n° 4 pages 11-12 et **231** page 144. Dyck, **216** *Specialkatalog 135* pages 291-293. Fischer, pages 39-40, photographie 85. Maillard et Belgodère, 333 (bois), 334 (plâtre). Vierling-Claassen, modèle 43, pages 111-112.

Collections. Göttingen, Groningue, Halle, Harvard, Illinois, Italie, Marbourg, MIT.

9.3.2 Surface de courbure constante négative avec lignes de courbure planes d'après Enneper.

L'intérêt de cette surface est que ses équations sont particulièrement simples alors que ses lignes de courbure sont planes.

Ce modèle a été photographié par Man Ray en 1934-1936 : *Surface à courbure constante négative d'Enneper, dérivée de la pseudosphère* (Zervos, 1936, page 14), légendé *Antoine et Cléopatre* sur la maquette de la collection Lucien Treillard (Werner, 2002, page 107). Celle-ci contient deux autres prises du même modèle, dont l'une est légendée *Section d'hélicoïde développable.* Breton (1936) propose de l'affubler de la légende *Campagne de Russie.*

Ce modèle a également été photographié par Hiroshi Sugimoto (2004) : *Kuen's surface : a surface with constant negative curvature*, sous-titre $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = \log\tan(v/2) + a\cos v$ ($0 < v < \pi$), $\varphi = u - \arctan u$, $a = 2/(1 + u^2\sin^2 v)$, $r = a\sqrt{(1 + u^2)}\sin v$.

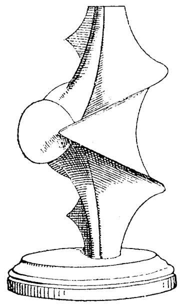

Figure 13 – Surface de Kuen.

232. (VIII, 1.) **Fläche von constantem negativen Krümmungsmass mit ebenen Krümmungslinien nach Enneper.** Sie entsteht aus der Tractrixfläche von der Krümmung $-\frac{1}{t^2}$ dadurch, dass man auf den Tangenten an ein System von parallelen geodätischen Linien das Stück t in bestimmtem Sinn aufträgt. Die Fläche besitzt eine Ebene und eine räumliche Rückkehrkante mit 2 Spitzen sowie eine Doppelcurve. Das eine System von Krümmungslinien wird von Ebenen ausgeschnitten, welche durch eine (im Modell vertikal gestellte) Gerade hindurch gehen. Das andere System liegt auf Kugeln, deren Mittelpunkte in dieser Geraden liegen. Vergl. *Bianchi*, Math. Annalen Bd. 16, sowie *Enneper*, Göttinger Nachrichten 1868: Th. *Kuen*, Sitzungsberichte der kgl. bayr. Acad. 1884, Heft II. Modelliert von stud. math. *Mack*. Erläuterung hierzu von Assistenten *Th. Kuen* in München (B). (24×18 cm.) .... Mk. 18.50.

Références. Schilling, série VIII (1882) nº 1 pages 17-18 et **232** pages 144-145. Dyck, **216** *Specialkatalog 136* pages 291-293. Fischer, pages 40-41, photographie 86. Maillard et Belgodère, 335 (bois), 336 (plâtre). Vierling-Claassen, modèle 32, pages 83-85.

Collections. Göttingen, Halle, Italie, MIT, Harvard.

9.4 Surfaces de courbure moyenne constante, surfaces minimales.

La courbure moyenne en un point d'une surface est la moyenne des courbures des deux lignes de courbure passant par ce point, appelées *courbures principales*. Les surfaces de courbure moyenne nulle sont les surfaces minimales des bulles de savons. Les surfaces de courbure moyenne constante non nulle sont beaucoup moins connues. Delaunay (1841) a prouvé qu'il n'y en a que deux qui soient des surfaces de révolution : l'onduloïde et le nodoïde.

Die Flächen von constanter *mittlerer* Krümmung sind dadurch definiert, dass die Summe der reciproken Werte ihrer 2 Hauptkrümmungsradien an jeder Stelle denselben Zahlenwert besitzt. Die partielle Differentialgleichung, durch welche sie definiert sind, geht in eine integrierbare totale über, wenn man sich auf *Rotationsflächen* beschränkt, und zwar erhält man für die Meridiancurve die Gleichung

$$z = \int \frac{r^2 \pm a_1 a_2}{\sqrt{(a_1^2 - r^2)(r^2 - a_2^2)}} dr.$$

Nach Delaunay (Comptes rendus XIII, 1841) ergibt sich die Meridiancurve dieser Flächen auch als diejenige Curve, die der Brennpunkt eines Kegelschnittes beim Abrollen auf einer Geraden beschreibt, welche dann Rotationsaxe wird. Den 3 Kegelschnitten Ellipse, Hyperbel, Parabel entsprechend, erhält man 3 verschiedene Typen, die von *Plateau* in seinem Werke „Statique expérimentale et théorique des liquides etc." Onduloid, Nodoid, Catenoid genannt wurden. Nach Laplace werden die Gleichgewichtsfiguren von Flüssigkeiten, welche der Einwirkung der Schwere entzogen sind, von Flächen constanter mittlerer Krümmung begrenzt. Geometrisch lassen sie sich auch als gewisse Parallelflächen zu Flächen von constantem positiven Krümmungsmass definieren. Einen speciellen Fall davon bilden die *Minimalflächen*, deren mittlere Krümmung Null ist. Dieselben haben die Eigenschaft, einen kleineren Flächeninhalt zu besitzen als jede andere benachbarte Fläche, die durch eine beliebige auf ihr geführte geschlossene Randcurve hindurchgelegt wird. Sie ergeben sich mechanisch als diejenigen Flächen, welche die zwischen eine gegebene Randcurve sich einspannende Flüssigkeitshaut (z. B. durch Eintauchen eines Drahtes von der Form der Curve in Seifenlösung) annimmt.

Die Minimalflächen werden sowohl durch ihre Krümmungs- wie durch ihre Asymptotencurven in unendlich kleine Quadrate geteilt. (Die *Indicatrix* ist für diese Flächen eine gleichseitige Hyperbel, deshalb stehen auch die Asymptotencurven aufeinander senkrecht). Zu jeder Minimalfläche gibt es eine zweite, ihre sog. *Bonnet'sche Biegungsfläche*, welche auf sie derart abwickelbar ist, dass die Krümmungslinien der einen in die Asymptotencurven der andern übergehen. Vergl. *Schwarz* in Crelle's Journ. Bd. 80.

239-242. (II, 3.) **Drei Typen von Rotationsflächen constanter mittlerer Krümmung** mit geodätischen Linien. Das Verhalten der letzteren ist je nach dem Winkel, unter dem eine den grössten Parallelkreis trifft, ein verschiedenes. Entweder bewegt sie sich zwischen 2 Parallelkreisen (blau) oder sie nähert sich asymptotisch dem Kehlkreis. d. i. Parallelkreis vom kleinsten Radius (grün), oder sie läuft über die ganze Fläche hin. Von stud. math. *A. v. Braunmühl* in München (B). Erläuterung beigegeben.

239. (II, 3a.) **Onduloid.** Die Meridiancurve ergibt sich für $a_1 = 1$ cm., $a_2 = 5,77$ cm. aus der oben angegebenen Gleichung, wenn von den 2 daselbst vorkommenden Vorzeichen das obere (positive) gewählt wird. (12×26 cm.) .... Mk. 10.50.

9.4.1 Nodoïde.

La courbe méridienne du nodoïde est le lieu du foyer d'une hyperbole qui roule sans glisser sur une droite. Les lignes tracées sur le modèle représentent des géodésiques : certaines restent entre deux parallèles de cette surface de révolution et d'autres se rapprochent asymptotiquement de son «goulot».

240. (II, 3b.) **Nodoid.** a_1 und a_2 wie oben, aber in der Gleichung ist das untere (negative) Vorzeichen zu wählen. (11×8 cm.) .... Mk. 9.50.

Références. Schilling, série II (1877) nº 3b pages 5-6 et **240** page 146. Dyck, **219** *Specialkatalog 141* page 294. Fischer, page 51. Maillard et Belgodère, 314 (bois).

Collections. Göttingen, Halle, Harvard, Harvard, Illinois, Italie.

10 Théorie des fonctions.

Ces modèles cherchent à représenter des fonctions $f(z)$ d'une variable complexe z : comme elles ont des valeurs complexes, ils représentent soit la partie réelle soit la partie imaginaire de la fonction, c'est-à-dire la hauteur comme fonction $\operatorname{Re} f(z)$ ou $\operatorname{Im} f(z)$ des coordonnées (x, y) du plan, où $z = x + iy$. C'est la signification des inscriptions « R. » et « i. » sur le socle. Cette distinction en partie réelle et imaginaire peut être à l'origine de singularités absentes du graphe de la fonction lui-même.

Le plan des z se situe horizontalement au milieu du modèle. Le côté de l'inscription « R. » ou « i. » est parallèle à l'axe de la partie réelle x de z et perpendiculaire à l'axe de la partie imaginaire y de z. Des lignes de niveau écartées d'un centimètre sont tracées, ainsi que des lignes de plus grande pente, qui leur sont orthogonales : celles-ci sont choisies de manière que leur projection sur le plan des z coïncide pour les modèles des parties réelle et imaginaire.

307-316. (XIV, 1-10.) **16 Modelle zur Darstellung von Functionen einer complexen Veränderlichen.** Ausgeführt unter Leitung von Prof. Dr. *Walther Dyck.*

Um den Verlauf einer Function einer complexen Veränderlichen in der Umgebung gewisser singulärer Stellen und ebenso den Gesamtverlauf gewisser Typen von Functionen einer complexen Veränderlichen durch eine räumliche Darstellung zu veranschaulichen, sind in der bekannten Weise sowohl der reelle als auch der imaginäre Teil der Functionswerte über der Ebene des complexen Argumentes als Ordinaten aufgetragen. So wird jede Function eines complexen Argumentes durch zwei mit R und I bezeichnete Flächen versinnlicht, deren gleichzeitige Betrachtung ein Bild des Functionsverlaufes liefert. Zur genaueren Characteristik der Wertsysteme sind auf den Flächen Niveaulinien in gleichen Abständen (die Einheit des Massstabes = 3 cm.) und die zugehörigen Orthogonaltrajectorien aufgetragen. Dabei stehen die jedesmal zusammengehörigen Modelle R und I in der Beziehung zu einander, dass die Projection der Niveaulinien und Fallinien der einen Fläche in die Ebene des complexen Argumentes mit der Projection der Fallinien, bezw. Niveaulinien für die andere Fläche in eben diese Ebene identisch ist.

10.1 Singularités essentielles.

10.1.1 $6w = e^{1/6z}$.

Ici, c'est la partie réelle de la fonction $f(z) = (1/6)e^{1/6z}$ qui est représentée : c'est le sens de l'inscription « R. » sur le socle du modèle. La partie imaginaire peut être obtenue par inversion du plan.

Ce modèle illustre la *singularité essentielle* de la fonction en $z = 0$: elle prend toutes les valeurs sauf 0 dans tout voisinage de 0.

Il a été photographié par Man Ray en 1934-1936 : *Expression modulaire d'une fonction elliptique* (30 × 24 cm) (Fortuné, 1999, page 108).

312. (XIV, 6.) $6w = e^{\frac{1}{6z}}$ versinnlicht den einfachsten wesentlich singulären Punkt, und zwar ist der reelle Teil der Funktion durch:

$$u = \frac{1}{6}e^{x'} \cos y'$$

(wo $x' = \dfrac{x}{6(x^2+y^2)}$, $y' = \dfrac{-y}{6(x^2+y^2)}$, $z = x + iy$ gesetzt ist) dargestellt, während der imaginäre Teil

$$v = \frac{1}{6}e^{x'} \sin y'$$

durch eine Transformation der (x, y) Ebene durch reciproke Radien aus ersterem herzuleiten ist. Von stud. math. *Kleiber* (D). (17 × 18 × 15 cm.) .... Mk. 21.–.

Références. Schilling, série XIV (1886) nº 6 pages 29-30 et **312** page 160. Dyck, **49** *Specialkatalog 178* pages 176-178. Fischer, pages 80-81, photographie 128. Maillard et Belgodère, 534.

Collections. Dresde, Göttingen, Halle, Harvard, Harvard, Harvard. Diapositives : Göttingen, Göttingen.

10.2 Fonctions elliptiques dans la forme normale de Weierstrass.

Ces modèles représentent les fonctions elliptiques de Weierstrass $\wp(u)$ et $\wp'(u)$: ce sont des fonctions *doublement périodiques*. Chaque modèle montre quatre parallélogrammes de période de la fonction, dont chacun contient exactement un pôle, c'est-à-dire un point où la fonction tend vers l'infini. Les paramètres g_2 et g_3 ci-dessous se calculent à partir des périodes et caractérisent la fonction de Weierstrass.

313—316. (XIV, 7—10.) Die Modelle dienen zur Veranschaulichung des Verlaufes der **elliptischen Functionen $\wp(u)$ und $\wp'(u)$ in der Weierstrass'schen Normalform.** Es wurden dabei die beiden besonderen Fälle für die Darstellung gewählt, für welche in der cubischen Gleichung

$$4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$$

einmal $g_3 = 0$, dann $g_2 = 0$ ist; sie sind zugleich Repräsentanten der beiden Functionsklassen, für welche die Discriminante G der obigen Gleichung positiv, bezw. negativ ist.

10.2.1 $w = \wp u$ pour $g_2 = 4$, $g_3 = 0$ – partie réelle.

10.2.2 $w = \wp u$ pour $g_2 = 4$, $g_3 = 0$ – partie imaginaire.

Le modèle XIV, 8 dont la gravure est reproduite ci-dessous représente la partie réelle de la dérivée $\wp'(u)$ et manque dans la collection de Besançon. On obtient la partie imaginaire en tournant le modèle d'un quart de tour.

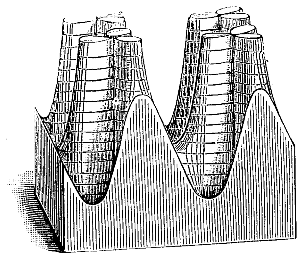

Figure 14 – $w = \wp'(u)$ pour $g_2 = 4$, $g_3 = 0$.

313. 314. (XIV, 7 a, b u. 8.) Hier ist $g_2 = 4$, $g_3 = 0$ gewählt. Dann ergeben sich für die Perioden ω_1 und ω_3 der elliptischen Functionen die Werte

$$\omega_1 = 1{,}311,\ \omega_3 = 1{,}311 \,.\, i = \omega_1 \,.\, i.$$

Die Symmetrie der Flächen innerhalb des Periodenquadrates (es sind jedesmal vier solcher modelliert) ist ausser durch die Relationen

$$\wp(-u) = \wp(u), \wp'(-u) = -\wp'(u)$$

durch die hier speciell geltenden Beziehungen

$$\wp(iu) = -\wp(u)$$

und

$$\wp'(iu) = i\wp'(u)$$

bezeichnet. Die letztere Formel zeigt zugleich, dass für $\wp'(u)$ in diesem Falle das den imaginären Teil darstellende Modell der Form nach identisch ist mit dem für den reellen Teil und nur seiner Lage nach durch einen Winkel von 90° gedreht erscheint. Die Modelle kennzeichnen ebenso wie die folgenden Nr. 9 und 10 in charakteristischer Weise das Verhalten einer Function in der Umgebung eines zweifachen [für $\wp(u)$] bezw. dreifachen [für $\wp'(u)$] Unendlichkeitspunktes. Neben diesen treten in den Modellen für $\wp(u)$ noch gewisse „Sattelpunkte" — den Werten, für welche $\wp'(u) = 0$ wird, entsprechend — besonders hervor; und ebenso sind in den Modellen für $\wp'(u)$ in den Punkten, für welche $\wp''(u) = 0$ wird, Sattelpunkte vorhanden. Von Assistenten *Burkhardt* und Lehramts-Candidaten *Wildbrett* (D). (16 × 16 × 16 cm.) Nr. 7a u. 7b je Mk. 38.–, Nr. 8 Mk. 44.–.

Références. Schilling, série XIV (1886) n° 7 a, b pages 29-30 et **313** pages 160-161. Dyck, **49** *Specialkatalog 179* pages 176-178. Fischer, pages 81-82, photographies 129 et 130. Maillard et Belgodère, 536, 535.

Collections. **313** (XIV, 7a) : Göttingen, Harvard, Harvard, Illinois. **313** (XIV, 7b) : Göttingen, Harvard, Harvard, Harvard, Illinois, Marbourg.

10.2.3 $w = \wp u$ pour $g_2 = 0$, $g_3 = 4$ – partie réelle.

10.2.4 $w = \wp' u$ pour $g_2 = 0$, $g_3 = 4$ – partie réelle.

10.2.5 $w = \wp' u$ pour $g_2 = 0$, $g_3 = 4$ – partie imaginaire.

C'est ce dernier modèle que Man Ray a photographié : *Allure de la fonction elliptique p'(u) pour g2=0 et g3=4* (Zervos, 1936, page 17). Breton (1936) propose de l'affubler de la légende *Les pénitents roses.* Karel Teige a utilisé cette photographie pour un collage qui orne la couverture de l'édition tchèque de *Choix de poèmes* d'Éluard (1946). Elle porte la légende *Expression modulaire d'une fonction elliptique* et *Joyeuses commères* sur la maquette de la collection Lucien Treillard (Werner, 2002, page 86). L'huile sur toile et la lithographie *The merry wives of Windsor* [Les joyeuses commères de Windsor] de Man Ray sont composées à partir de cette photographie : voir Penrose (1975).

Voici comment Man Ray évoque ces œuvres dans son autobiographie.

> Parmi les photographies que je rapportais à Hollywood, il y avait tout un paquet d'épreuves faites dans les années trente, destinées à servir de modèles à une série de tableaux. Elles représentaient des objets en bois, en métal, en plâtre et en fil de fer qui, dans les vitrines poussiéreuses de l'Institut Poincaré, servaient d'illustrations à des équations algébriques. Ces équations n'avaient aucun sens pour moi, mais les formes des objets, en elles-mêmes, étaient aussi variées et aussi authentiques que celles que l'on trouve dans la nature. Ce qui, à mes yeux, les rendait plus importantes encore, c'est qu'elles étaient fabriquées par la main de l'homme : on ne pouvait pas dire qu'elles étaient abstraites, comme le craignait Breton lorsque je les lui montrai pour la première fois. Pour moi, tout art abstrait est comme un fragment, comme un agrandissement d'un détail de la nature ou d'une œuvre d'art. Ces objets-là, par contre, étaient des macrocosmes complets. En les peignant, je ne les copiais pas exactement, mais composais de chacun d'eux un tableau. Je modifiais les proportions, ajoutais des couleurs, sans tenir compte des intentions mathématiques. Parfois même, j'introduisais quelque forme inattendue comme celles d'un papillon ou d'un pied de table. Quand j'eus terminé une quinzaine de ces tableaux, je leur donnai le titre général : *Équations shakespeariennes.* Pour son identification individuelle, chaque tableau portait le titre d'une pièce de Shakespeare, arbitrairement, le premier qui me passait par la tête. C'est ainsi que le dernier s'intitula : *Tout est bien qui finit bien.* Il se trouva des gens pour voir un rapport symbolique entre le sujet et le titre.
>
> Ces tableaux faisaient partie de mon exposition à la galerie Copley. Le titre du catalogue très élaboré que j'avais préparé, *To be continued unnoticed*, était prophétique : aucun critique ne mentionna mon exposition, et elle passa également inaperçue des collectionneurs, à l'exception de ceux qui me connaissaient personnellement. Al Lewin prit *La mégère apprivoisée* ; les Wescher, un autre tableau que je peignis spécialement pour eux, après coup, et sans titre shakespearien. (Ray, 1998, pages 484-485)

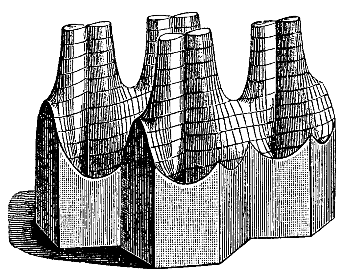

Figure 15 – $w = \wp(u)$ pour $g_2 = 0$, $g_3 = 4$ [R.].

315. 316. (XIV, 9a, b. u. 10a, b.) Hier sind die Constanten $g_2 = 0$, $g_3 = 4$ zu Grunde gelegt, für welche die Perioden ω_2 und ω_3 die Werte $\omega_2 = 1,2143$, $\omega_3 = 0,6072 + 1,0516i = e^{i\frac{\pi}{3}}\omega_2$ erhalten. Weiter hat man für die Bezeichnung der in den Flächen ersichtlichen Symmetrien der Relationen:

$$\wp(\varepsilon u) = \varepsilon^4 \wp(u) \qquad (1)$$
$$\wp'(\varepsilon u) = \varepsilon^3 \wp'(u), \qquad (2)$$

wo ε eine sechste Einheitswurzel bezeichnet. Von Assistenten *Burkhardt* und Lehramts-Candidaten *Wildbrett* (D). ($15 \times 22 \times 16$ cm.) Nr. 9a. u. 9b. je Mk. 41.–.
Nr. 10a. u. 10b. je Mk. 48.–.

Den Modellen ist ein erläuternder Text beigefügt und 5 Figurentafeln, in welchen die auf den Flächen verzeichneten Niveaulinien und Fallinien in ihrer Projection auf die Ebene des complexen Argumentes dargestellt sind.

Références. Schilling, série XIV (1886) nº 9a et 10a, b pages 29-30 et **315 316** page 161. Dyck, **49** *Specialkatalog 181, 182* pages 176-178. Fischer, pages 81-82. Maillard et Belgodère, 538 et 540, 541.

Collections. **315** (XIV, 9a) : Harvard, Harvard, Illinois, Italie. **316** (XIV, 10a) : Harvard, Illinois. **316** (XIV, 10b) : Harvard, Illinois.

11 Physique

11.1 Mécanique et cinématique.

11.1.1 La chaînette sur la sphère.

Comme on peut le vérifier facilement en posant un collier de perles de verres sur la sphère, les courbes tracées sur la sphère correspondent à la position d'équilibre d'un fil matériel qui épouse la forme de la sphère.

324. (V, 6.) **Die Kettenlinie auf der Kugel.** (Vergl. die Abhandlung von *Clebsch* in Crelle's Journal, Bd. 57, pag. 104 ff.). Die beiden auf der Kugel vereinigten Typen entsprechen dem Fall, wo das elliptische Integral sich auf ein Kreisintegral reduciert; in den Bezeichnungen der genannten Abhandlung

$$\varrho \sin\varepsilon = 1, \text{ a) } \varrho = \frac{3}{4}, \text{ b) } \varrho = \frac{5}{4}.$$

Durch eine Schnur von Glasperlen lassen sich die Curven leicht experimentell prüfen. Berechnet von Assistenten *Fischer* in München (B). (Grösse 9 cm.) .... Mk. 9.–.

Références. Schilling, série V (1880) nº 6 pages 11-12 et **324** page 162. Dyck, **238** *Specialkatalog 156* page 312.

Collections. Göttingen, Halle, Groningue.

11.1.2 Trajectoire d'un point matériel sur la sphère (donc celle du pendule sphérique).

Le cas représenté correspond à la trajectoire d'un point matériel dont la hauteur maximale (ou de la position initiale) est celle du centre de la sphère. La vitesse initiale est choisie de sorte que la trajectoire se referme après trois périodes. Le lieu géométrique des points de hauteur minimale des différentes trajectoires correspondant à des vitesses initiales différentes est aussi indiqué.

325. (II, 6.) **Bahncurve eines schweren Punktes auf der Kugel (also die des sphärischen Pendels).** Es ist der Fall dargestellt, wo der oberste (Ausgangs-) Punkt der Bahn sich in der Höhe des Mittelpunktes der Kugel befindet; die Anfangsgeschwindigkeit ist so gross gewählt, dass die Bahncurve sich nach 3 Perioden schliesst. Auch ist der geometrische Ort der untersten Punkte der verschiedenen Ortslinien angegeben, welche verschieden grossen Anfangsgeschwindigkeiten im Anfangspunkt entsprechen. Die Berechnung der Bahn u. s. w. ist von stud. math. *Schleiermacher* ausgeführt (B). (18 × 14 cm.) .... Mk. 13.–.

Références. Schilling, série II (1877) n° 6 pages 5-6 et **325** page 162. Dyck, **239** *Specialkatalog 157* page 312.

Collections. Göttingen, Halle, Harvard, Harvard, Harvard, Illinois, Italie.

11.2 Optique.

11.2.1 Front d'onde pour cristaux biaxiaux en octants individuels.

Ce modèle représente un octant du front d'onde de Fresnel, c'est-à-dire de la surface d'égale phase d'une onde, pour la lumière émise de l'intérieur d'un cristal anisotrope. Il s'agit d'une surface de Kummer avec 4 points doubles réels, les 12 autres étant imaginaires.

Normalement, il devrait y avoir deux octants, mais il ne nous en reste qu'un seul. Les gravures ci-dessous ne montrent pas les octants, mais le modèle démontable, série VI n° 1, qui montre les nappes externe et interne du même front d'onde. C'est l'existence de ces deux nappes qui explique le phénomène de biréfringence du spath d'Islande.

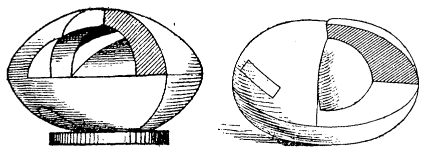

FIGURE 16 – Front d'onde de Fresnel pour cristaux biaxiaux, modèle démontable le long d'une section principale.

360. (VI, 4.) **Wellenfläche für optisch zweiaxige Krystalle in einzelnen Octanten** mit den sphärischen und ellipsoidischen Curven (die also bezw. durch Kugeln und Ellipsoide ausgeschnitten werden). Auf jedem der beiden Mäntel ist das eine System sphärisch, das andere ellipsoidisch. Auf dem Modell sind ferner die Nabelpunkte angegeben. Die Öffnungen markieren die Richtung des zugehörigen Strahls. Von Rector Dr. *Böklen* in Reutlingen, nebst einer Erläuterung. (24 × 9 cm.) Mk. 10.–.

Références. Schilling, série VI (1880) n° 4 page 13 et **360** page 168. Dyck, **281** *Specialkatalog 162* pages 377-378. Fischer, pages 15-18.

Collections. Göttingen, Groningue, Halle, Illinois, Italie, Dresde.

Références

Agricola, I. 2013, «Mathematische Modellsammlung», `http://www.uni-marburg.de/sammlungen/sammlungen/mathematik`, Philipps-Universität Marburg.

Apéry, F. 2012, «Old and new mathematical models : saving the heritage of the Institut Henri Poincaré», dans *Mathematics and modern art : proceedings of the first ESMA conference, held in Paris, July 19-22, 2010*, édité par C. Bruter, n° 18 dans Springer proceedings in mathematics, p. 17–27. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-24497-1_3.

Baldus, R. 1921, «Mathematik und räumliche Anschauung», *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 30, p. 1–15. http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002126435.

Beltrami, E. 1869, «Essai d'interprétation de la géométrie non euclidienne», *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, vol. 6, p. 251–288. http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1869_1_6__251_0, traduit de l'italien par M. J. Hoüel.

Bernués Pardo, J., M. T. Lozano Imízcoz et I. Polo Blanco. 2012, «La colección de modelos matemáticos de la Universidad de Zaragoza», *La Gaceta de la RSME*, vol. 15, n° 1, p. 187–204.

Breton, A. 1936, «Crise de l'objet», *Cahiers d'art, 11e année*, vol. 1-2, p. 21–26.

Brette, J. 2000, «La collection de modèles mathématiques de la bibliothèque de l'IHP», *Gazette des Mathématiciens*, vol. 85. http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/2000/85/smf_gazette_85_5-8.pdf.

Brill, L. *Erläuterungen zu der Brill'schen Modellsammlung (Sammelband).*

Brill, L. 1881, *Catalog mathematischer Modelle*, L. Brill, Darmstadt.

Brill, L. 1882, *Nachtrag zum Catalog mathematischer Modelle*, 2e éd., L. Brill, Darmstadt.

Brill, L. 1885, *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht*, 3e éd., L. Brill, Darmstadt.

Brill, L. 1888, *Katalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht*, 4e éd., L. Brill, Darmstadt.

Brill, L. 1892, *Katalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht*, 5e éd., L. Brill, Darmstadt.

Campedelli, L. 1952, «Primo elenco dei modelli fatti costruire presso l'Università di Firenze a cura del Prof. L. Campedelli», *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, vol. 7, n° 4, p. 465–467. http://www.bdim.eu/item?fmt=pdf&id=BUMI_1952_3_7_4_459_0.

Carbone, L., G. Cardone et F. Palladino. 1999, «A Naples mathematical models and instruments collection», *Sciences et techniques en perspective*, vol. 3, n° 1, p. 199–205.

Chotteau, T., F. Delmer, H. Nocton, Y. Perrin, J. Peiffer, S. Paycha et P. Jakubowski. 2001, *Rencontres entre artistes et mathématiciennes : toutes un peu les autres*, chap. Corps géométriques, L'Harmattan, Paris, p. 14–55. À l'initiative de *femmes et mathématiques*.

Christoffel, E. B. 1867, «Ueber einige allgemeine Eigenschaften der Minimumsflächen.», *J. Reine Angew. Math.*, vol. 67, p. 218–228. http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002153254.

Cussons, G. W. et H. S. M. Coxeter. 1961, «Mathematical models», dans *Encyclopædia britannica*, vol. 15, p. 76–79, 2 planches.

Darboux, G. et G. Kœnigs. 1889, «Sur deux appareils nouveaux de mécanique», *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, vol. 109, n° 2, p. 49–51. http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3065s/f55.image.

Delaunay, C. 1841, «Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante», *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. 6, p. 309–314. http://eudml.org/doc/234757.

Department of mathematics, University of Illinois. «The Altgeld math models», http://www.mathmodels.illinois.edu/cgi-bin/cview?SITEID=4&ID=342.

Drechsler, W. 2008, «Vom Kegel über die vierte Dimension zur kubischen Fläche mit vier Knoten», dans *Genau und anders : Mathematik in der Kunst von Dürer bis Sol LeWitt*, édité par W. Drechsler, Museum moderner Kunst Stiftung Ludwig, Wien, p. 42–65.

Dupin, C. 1813, *Développements de géométrie, avec des applications à la stabilité des vaisseaux, aux déblais et remblais, au défilement, à l'optique, etc. pour faire suite à la Géométrie descriptive et à la Géométrie analytique de M. Monge : théorie*, M[me] V[e] Courcier, Paris. `https://archive.org/details/dveloppementsde02dupigoog`.

Dupin, C. 1822, *Applications de géométrie et de méchanique, à la marine, aux ponts et chaussées, etc., pour faire suite aux Développements de géométrie*, Bachelier, successeur de M[me] V[e] Courcier, Paris. `http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k110325x`.

Dyck, W., éd. 1892, *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente : Deutsche Mathematiker-Vereinigung, unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen herausgegeben im Auftrage des Vorstandes der Vereinigung*, K. Hof- u. Universitätsbuchdruckerei von Dr. C. Wolf & Sohn, München. `http://libsysdigi.library.uiuc.edu/ilharvest/MathModels/0007KATA/0007KATA.pdf`.

Dyck, W. 1893, *Special-Katalog der mathematischen Ausstellung (Gruppe X der Universitäts-Austellung) : Deutsche Unterrichts-Ausstellung in Chicago 1893*, Berlin.

Dyck, W. 1894, «Einleitender Bericht über die mathematische Ausstellung in München», *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 3, p. 39–56. `http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002114097`, extrait de la *Beilage zur Allgemeinen Zeitung* de Munich, 3 et 4 novembre 1893.

Dyck, W. 1896, «Einleitung zu dem für den mathematischen Teil der deutschen Universitätsausstellung in Chicago ausgegebenen Specialkatalog», dans *Mathematical papers read at the International mathematical congress, held in connection with the World's columbian exposition Chicago 1893*, p. 44–51. `http://www.mathunion.org/ICM/ICM1893/Main/icm1893.0044.0051.ocr.pdf`.

Éluard, P. 1946, *Výbor básni*, Odeon, Praha. Illustrations par Max Ernst, Pablo Picasso, Man Ray, Jindřich Štyrský et Karel Teige.

Fendt, C. 2010, *Datenerhebung und Dokumentation geometrischer Modelle : Teil I*, Diplomarbeit, Technische Universität, Wien. `http://www.ub.tuwien.ac.at/dipl/2010/AC07807641.pdf`.

Ferrarese, G. et F. Palladino. 1998, «Sulle collezioni di modelli matematici dei Dipartimenti di Matematica dell'Università e del Politecnico di Torino», *Nuncius*, vol. 13, n[o] 1, p. 169–185.

Ferrarese, Giorgio. 2004, «La collezione dei modelli geometrici della Biblioteca di matematica "Giuseppe Peano" : Dipartimento di matematica, Università di Torino, in collaborazione con : Accademia ligustica di belle arti di Genova», `http://www.dm.unito.it/modelli/forme_mainshell.html`.

Fischer, G., éd. 1986a, *Mathematische Modelle : aus den Sammlungen von Universitäten und Museen, Bildband*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig. Traduction anglaise en regard.

Fischer, G., éd. 1986b, *Mathematische Modelle : aus den Sammlungen von Universitäten und Museen, Kommentarband*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig. `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-322-85045-4`, simultanément paru en anglais.

Fortuné, I. 1999, «Man Ray et les objets mathématiques», *Études photographiques*, vol. 6, p. 100–117. `http://etudesphotographiques.revues.org/190`.

Georg-August-Universität Göttingen. «Göttinger Sammlung mathematischer Modelle und Instrumente», `http://www.uni-math.gwdg.de/modellsammlung/index.php`.

Guigon, E. 1997, *El objeto surrealista [exposición], IVAM Centre Julio González, Valencia, 16 octubre 1997 - 4 enero 1998*, Institut valencià d'art modern, Valencia.

Haag, J. 1921, *Géométrie*, vol. II, Gauthier-Villars, Paris.

Harvard graduate school of design. 2012, «Mathematical models at the Harvard mathematics department», `http://www.math.harvard.edu/history/models1/index.html`.

Hashagen, U. 1999, «Der Mathematiker Walther von Dyck als Ausstellungsorganisator und Museumsgründer», Arbeitspapier, Münchner Zentrum für Wissenschafts- und Technikgeschichte. `http://www.mzwtg.mwn.tum.de/fileadmin/w00bmt/www/Arbeitspapiere/hashagen_dyck1.pdf`.

Hashagen, U. 2003, *Walther von Dyck (1856-1934) : Mathematik, Technik und Wissenschaftsorganisation and der TH München*, n° 47 dans Boethius, F. Steiner, Stuttgart.

Heyman, T. T. 1992, *Seeing straight : the f.64 revolution in photography*, Oakland Museum, Oakland (Calif.).

Hiemenz, K. 1907, *Katalog des mathematischen Lesezimmers der Universität Göttingen*, Teubner, Leipzig.

Institut Henri Poincaré. «Modèles mathématiques», `http://ihp.fr/node/10663`.

Kidwell, P. A. 1996, «American mathematics viewed objectively : the case of geometric models», dans *Vita mathematica*, *MAA Notes*, vol. 40, édité par R. Calinger, Math. Assoc. America, Washington, DC, p. 197–207.

Klein, F. 1873, «Ueber Flächen dritter Ordnung», *Math. Ann.*, vol. 6, n° 4, p. 551–581, Tafeln I–VI. `http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002242451`.

Klein, F. 1891, «Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes (suite)», *Annales scientifiques de l'É. N. S,*, vol. 8, p. 173–199. `http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1891_3_8__173_0`, traduction de M. H. Padé.

Klein, F. 1898, *Conférences sur les mathématiques faites au Congrès de mathématiques tenu à l'occasion de l'exposition de Chicago*, chap. Conférence IV : sur la véritable forme des courbes et des surfaces algébriques (31 août 1893), A. Hermann, Paris, p. 25–32. `http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99420q/f31`, conférences prononcées du 28 août au 9 septembre 1893 au Colloque d'Evanston à l'issue du Congrès des mathématiciens réunis à Chicago, traduites par L. Laugel.

Knill, O. 2006, «Mathematical models at the Harvard mathematics department», `http://www.math.harvard.edu/history/models/index.html`.

Kürpig, F. «Darstellende Geometrie», `http://www.friedhelm-kuerpig.de/konfig8.html`.

Laraby, A. 2012, «La caverne d'Ali Baba de l'IHP», *Quadrature*, vol. 82, p. 4–6. `http://ihp.fr/sites/default/files/16/ndeg83colorcavernealibaba-3.pdf`.

Lê, F. 2011, *Sur les vingt-sept droites des surfaces cubiques : approche historique*, Mémoire de master 2, École Normale Supérieure de Lyon et Université Claude Bernard Lyon 1. `http://www.math.jussieu.fr/~lef/Accueil_files/Me%CC%81moire.pdf`.

Levin, N. 2013, «Mathematical models display», `http://www.ma.huji.ac.il/~library/models.htm#plaster`, Université hebraïque de Jérusalem.

Lordick, D. «Mathematische Modelle : Sammlung der Technischen Universität Dresden», `http://www.math.tu-dresden.de/modellsammlung/modelle.php`.

Maillard, R. et P. Belgodère. 1950, «Catalogue provisoire des modèles de géométrie», Institut Poincaré, Faculté des sciences de l'Université de Paris.

Maxwell, J. C. 1868, «On the cyclide», *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 9, p. 111–126.

Mehrtens, H. 1996, «Mathematics and war : Germany, 1900-1945», dans *National military establishments and the advancement of science and technology : studies in 20th-century history*, *Boston studies in the philosophy of science*, vol. 180, édité par P. Forman et J. M. Sánchez Rón, Kluwer, Dordrecht, p. 87–134.

Mehrtens, H. 2004, «Mathematical models», dans *Models : the third dimension of science*, édité par S. de Chadarevian et N. Hopwood, Stanford university press, p. 276–305.

Minding, F. 1839, «Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht ; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmaasse», *J. Reine Angew. Math.*, vol. 19, p. 370–387, Tafel III. `http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002142015`.

Museo nazionale scienza e tecnologia "Leonardo da Vinci". «Modelli matematici», `http://www.museoscienza.org/dipartimenti/catalogo_collezioni/lista.asp?arg=Modelli%20matematici&c=10`.

Olivati, V. 2001, «Collezione di modelli virtuali del dipartimento di matematica», `http://www-dimat.unipv.it/~olivati`.

Palladino, N. «Le raccolte museali italiane di modelli per lo studio delle matematiche superiori», `http://www.dma.unina.it/%7Enicla.palladino/catalogo`.

Palladino, N. et F. Palladino. 2009, «I modelli matematici costruiti per l'insegnamento delle matematiche superiori pure e applicate», *Ratio mathematica*, vol. 19, p. 31–88. `http://www.eiris.it/ratio_numeri/ratio_19/corr_%20I_MODELLI_MATEMATICI_10.pdf`.

Penrose, R. 1975, *Man Ray*, éd. du Chêne, Paris.

Pic, S. «IHP», `http://documentsdartistes.org/artistes/pic/repro7-1.html`.

Polo-Blanco, I. 2007, *Theory and history of geometric models*, Dissertatie, Rijksuniversiteit Groningen. `http://irs.ub.rug.nl/ppn/302252487`.

Polo Blanco, I. et L. van der Zalm. «Mathematical models of surfaces», `http://www.math.rug.nl/models`, Université de Groningue.

Rabl, K. 2010, *Datenerhebung und Dokumentation geometrischer Modelle : Teil II*, Diplomarbeit, Technische Universität, Wien.

Ratton, C. 1936, «Exposition surréaliste d'objets du 22 au 29 mai 1936», `http://www.andrebreton.fr/fr/item/?GCOI=56600100858821`, préface d'André Breton, catalogue.

Ray, M. 1998, *Autoportrait*, n° 310 dans Babel, Actes Sud Leméac, Arles [Montréal]. Titre original : *Self portrait*, 1963.

Reinbeck, K. 1886, *Ueber diejenigen Flächen, auf welche die Flächen zweiten Grades durch parallele Normalen conform abgebildet werden*, Inaugural-Dissertation, Georgs-Augusts-Universität, Göttingen. `https://archive.org/details/ReinbeckUeberDiejenigenFlaechenAufWelcheDieFlaechenZweitenGradesDurchParalleleNo`.

Richter, K. 2008, *Verborgene Schätze : historische Sammlung mathematischer Modelle des Instituts für Mathematik ; Katalog zur Ausstellung im Löwengebäude Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg 15. September bis 24. Oktober 2008*, Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, Halle [Saale]. `http://wcms.uzi.uni-halle.de/download.php?down=12285&elem=2216373`.

Richter, K. et R. Sommer. «Sammlung historischer mathematischer Modelle», `http://did2.mathematik.uni-halle.de/modell/index.php`.

Rodenberg, C. 1879, «Zur Classification der Flächen dritter Ordnung», *Math. Ann.*, vol. 14, n° 1, p. 46–110, 145. `http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002244608`, trois planches lithographiques entre les pages 144 et 145.

Rohn, K. 1886, «Die verschiedenen Arten der Regelflächen 4. Ordnung», *Math. Ann.*, vol. 28, nº 2, p. 284–308. http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002249707.

Rottmann, M. 2008a, «Der Boom der Bilder : zur Blüte mathematischer Demonstrationsmodelle im 19. Jahrhundert», dans *Genau und anders : Mathematik in der Kunst von Dürer bis Sol LeWitt*, édité par W. Drechsler, Museum moderner Kunst Stiftung Ludwig, Wien, p. 66–70.

Rottmann, M. 2008b, «Einmal Cubeland und zurück : mathematische Aspekte in der Minimal und Concept-Art der 1960er/1970er-Jahre. Mel Bochner - Donald Hudd - Sol LeWitt - Ruth Vollmer», dans *Genau und anders : Mathematik in der Kunst von Dürer bis Sol LeWitt*, édité par W. Drechsler, Museum moderner Kunst Stiftung Ludwig, Wien, p. 120–143.

Rottmann, M. 2008c, «Zur Objektivität in der bildenden Kunst der 1960er-Jahre», *Internationale Mathematische Nachrichten*, vol. 207, p. 7–30, ISSN 0020-7926. http://www.oemg.ac.at/IMN/imn207.pdf.

Rowe, D. E. 2013, «Mathematical models as artefacts for research : Felix Klein and the case of Kummer surfaces», *Math. Semesterber.*, vol. 60, nº 1, p. 1–24, ISSN 0720-728X. http://dx.doi.org/10.1007/s00591-013-0119-8.

Salmon, G. 1882, *Lignes et surfaces du premier et du second ordre*, vol. 1, Gauthier-Villars, Paris. Ouvrage traduit de l'anglais sur la 4e édition par O. Chemin.

Schilling, M. 1900, *Katalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht. Nachtrag.*, Martin Schilling, Halle a. S. 19 S. 8°.

Schilling, M. 1903, *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht*, 6e éd., Martin Schilling, Halle a. S.

Schilling, M. 1904, *Mathematische Abhandlungen aus dem Verlage mathematischer Modelle von Martin Schilling*, Martin Schilling, Halle a. S.

Schilling, M. 1911, *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht*, 7e éd., Martin Schilling, Leipzig. http://libsysdigi.library.uiuc.edu/ilharvest/MathModels/0006CATA/0006CATA.pdf.

Schröder, J. 1877, *Preis-Liste für Unterrichts-Modelle*, Polytechnisches Arbeits-Institut, Fabrik für Unterrichts-Modelle & Zeichnenwerkzeuge, Darmstadt.

Simões, C. et C. Tenreiro. 2013, «O gabinete de geometria da Faculdade de ciências e a sua colecção de modelos para o ensino», dans *História da Ciência na Universidade de Coimbra (1772-1933)*, édité par C. Fiolhais, C. Simões et D. Martins, Imprensa da Universidade de Coimbra, Coimbra, p. 193–207.

Sozialgesetzbuch. 2002, *Gesetzliche Rentenversicherung*. http://www.gesetze-im-internet.de/sgb_6, (Artikel 1 des Gesetzes v. 18. Dezember 1989, BGBl. I S. 2261, 1990 I S. 1337).

Stachel, H. 2012, «Die Sammlung mathematischer Modelle am Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie», http://www.geometrie.tuwien.ac.at/modelle, Technische Universität Wien.

Sugimoto, H. 2004, *Conceptual forms*, Actes Sud et Fondation Cartier pour l'art contemporain, Arles et Paris. Exposition à Paris du 13 novembre 2004 au 27 février 2005 en collaboration avec le musée de l'université de Tokyo.

Tenreiro, C. «Modelos de Martin Schilling da Universidade de Coimbra», http://www.mat.uc.pt/~tenreiro/GGSchilling.

The University of Arizona. «Mathematical teaching tools in the Department of mathematics», http://math.arizona.edu/~models.

Todesco, G. M. et G. Ferrarese. «Le forme della matematica : i modelli del Dipartimento di Matematica», http://www.dm.unito.it/modelli.

Universitätssammlungen in Deutschland. «Suchergebnis : Geometrie», `http://www.universitaetssammlungen.de/modelle/suche/swp/Geometrie`.

Vidiani, L. G. 2006, «Le théorème de Juel et la surface de Clebsch», `http://culturemath.ens.fr/maths/html/juel/juel.html`.

Vierling-Claassen, A. 2007, «Mathematical models at the Massachusetts institute of technology», `http://mail.lesley.edu/faculty/ftvierli/models/MITmodelMaster.pdf`.

Vierling-Claassen, A. 2010, «Models of surfaces and abstract art in the early 20th century», dans *Proceedings of Bridges 2010 : Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture*, édité par G. W. Hart et R. Sarhangi, Tessellations Publishing, Phoenix, Arizona, p. 11–18. `http://archive.bridgesmathart.org/2010/bridges2010-11.pdf`.

Villani, C. et A. Strauss. 2013, «Objets mathématiques», dans *Dictionnaire de l'objet surréaliste*, édité par D. Ottinger, Gallimard et Centre Pompidou, Paris. Exposition au Musée national d'art moderne du 30 octobre 2013 au 3 mars 2014.

Werner, G. 2002, *Mathematik im Surrealismus : Man Ray - Max Ernst - Dorothea Tanning*, Jonas, Marburg.

Zervos, C., éd. 1936, *Cahiers d'art, 11^e^ année*, vol. 1-2. L'objet.