Inconditionnalité métrique en analyse de Fourier

Stefan Neuwirth

1 Introduction

Cet exposé entreprend l'étude de la propriété d'approximation inconditionnelle métrique (*umap*) parmi les sous-espaces invariants par translation de $L^p(\mathbb{T})$ et de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. Des résultats plus complets se trouvent dans [12]. Plaçons-nous dans le cadre suivant :

– $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| = 1\}$ est le cercle unité et $\mathbb{Z}$ son groupe dual des entiers.

– X désignera un des espaces de fonctions $L^p(\mathbb{T})$ $(1 \le p < \infty)$ ou $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, $E \subseteq \mathbb{Z}$ un spectre donné. Alors X_E est l'espace des fonctions f de X dont la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est portée par E.

X_E peut alors être inconditionnel selon des sens divers :

1. E peut être une suite basique inconditionnelle dans X. On sait qu'alors E est lacunaire : E est une suite basique inconditionnelle dans $L^p(\mathbb{T})$ (resp. $\mathcal{C}(\mathbb{T})$) si et seulement si E est un ensemble $\Lambda(\max(p, 2))$ (resp. de Sidon) (voir [15, preuve du th. 3.1]).
2. E peut être décomposable en blocs inconditionnels dans X. Si $1 < p < \infty$, c'est le cas pour $X = L^p(\mathbb{T})$ et $E = \mathbb{Z}$ tout entier par la théorie de Littlewood–Paley [9] :
$$\|f\|_p \approx \Big\| \Big(\sum |\Delta_k f|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_p, \text{ où}$$
$$\widehat{\Delta_0 f} = \widehat{f}(0) \quad \text{et} \quad \widehat{\Delta_k f} = \widehat{f}|_{]-2^k,-2^{k-1}]\cup[2^{k-1},\,2^k[} \quad \text{pour } k \ge 1.$$
Cela devient faux pour les espaces $X = L^1(\mathbb{T})$ ou $\mathcal{C}(\mathbb{T})$: sinon, ils seraient sous-espaces d'un espace à base inconditionnelle par [8, th. 1.g.5], ce qui est faux. Même $\mathbb{N}$ ne peut pas être décomposé ainsi dans $L^1(\mathbb{T})$, bien que l'espace de Hardy $H^1(\mathbb{T}) = L^1_{\mathbb{N}}(\mathbb{T})$ admette une suite approximante [11, § 2, introduction] et même une base [10] inconditionnelles.
3. Nous allons étudier l'inconditionnalité de X_E sous la forme suivante :

   Définition 1 ([3]) *Soit Z un espace de Banach séparable. Z a la propriété d'approximation inconditionnelle (uap) s'il existe une suite d'opérateurs de rang fini $\{A_n\}$ telle que $\sum A_n z$ converge inconditionnellement vers z pour tout $z \in Z$.*

Par le théorème de Banach–Steinhaus, cette convergence inconditionnelle est équivalente à l'existence d'un $C < \infty$ tel que

$$\forall n \; \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \; |\lambda_n| = 1 \qquad \Big\| \sum_{k \le n} \lambda_k A_k \Big\|_{\mathcal{L}(Z)} \le C. \tag{1}$$

On vient de voir que les espaces $L^p(\mathbb{T})$ $(1 < p < \infty)$ et $H^1(\mathbb{T})$ ont la (*uap*). Les espaces $L^1(\mathbb{T})$ et $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, ainsi que l'algèbre du disque $A(\mathbb{T})$ ne l'ont pas.

4. On peut se proposer d'étudier la propriété isométrique correspondante, *i. e.* $C = 1$ dans (1). Mais ce n'est pas naturel : par exemple, E est une base 1-inconditionnelle de $\mathcal{C}_E(\mathbb{T})$ si et seulement si E a au plus deux éléments. Par contre, on a :

$$\|a_1 e^{in_1 t} + a_2 e^{in_2 t} + a_3 e^{in_3 t}\|_\infty \xrightarrow[n_3 \to \infty]{} |a_1| + |a_2| + |a_3|.$$

5. Introduisons donc la version presque isométrique de la (*uap*), la (*uap*) métrique.

   Définition 2 ([2, § 3]) *Z a la (umap) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite approximante $\{T_n\}$ telle que $A_n = T_n - T_{n-1}$ vérifie* (1) *avec $C = 1 + \varepsilon$.*

   Mais il faut à présent préciser la nature des choix de signes λ_k : réels parmi $\mathbb{U} = \{-1, 1\}$ ou complexes parmi $\mathbb{U} = \mathbb{T}$. Des exemples montrent qu'alors (*umap*) réelle et complexe sont effectivement distinctes.

   Casazza et Kalton ont découvert le critère suivant (voir [2, th. 3.8] et [5, lemme 8.1]) :

$$Z \text{ a la } (umap) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sup_{\lambda \in \mathbb{U}} \|T_n + \lambda(Id - T_n)\| \to 1. \tag{2}$$

   L'idée est donc que la constante d'inconditionnalité entre $T_n Z$ et $(Id - T_n)Z$ s'améliore jusqu'à l'optimum pour $n \to \infty$.

La question à laquelle nous voulons donner des éléments de réponse est : pour quels X et E est-ce que X_E a la (*umap*) ? Li [7] a déjà montré, pour $X = \mathcal{C}(\mathbb{T})$, que la réponse ne peut être simple : il a construit un ensemble de Hilbert H tel que $\mathcal{C}_H(\mathbb{T})$ a la (*umap*) ; à l'inverse, son critère [7, lemme 12] montre que l'ensemble $E = \{2^n\} \cup \{0\}$ ne convient pas !

2 Comment construire des suites approximantes inconditionnelles métriques ?

Le critère (2) nous suggère d'étudier des relations d'inconditionnalité entre une sorte de début et un genre de fin de Z. Des techniques de décomposition skipped blocking de Bourgain et Rosenthal [1] revues par Kalton et Werner [6] permettent en fait de caractériser simplement la (*umap*) pour les espaces de cotype fini : voir [12, th. 3.2.4] pour le cas général. Dans le cas de sous-espaces invariants par translation, cette caractérisation a la forme concrète suivante :

Définition 3 *E est bloc-inconditionnel dans X si, pour tous $\varepsilon > 0$ et $F \subseteq E$ fini, il existe $G \subseteq E$ cofini tel que*

$$\operatorname*{osc}_{\lambda \in U} \|f + \lambda g\|_X = \sup_{\lambda,\, \mu \in U} \|f + \lambda g\|_X - \|f + \mu g\|_X \leq \varepsilon$$

pour $f \in B_{X_F}$ et $g \in B_{X_G}$.

On a alors le

Théorème 4 ([12, th. 5.2.3]) *Soit $E \subseteq \mathbb{Z}$ et*
- *$X = L^p(\mathbb{T})$ $(1 < p < \infty)$: $L^p_E(\mathbb{T})$ a la (umap) si et seulement si E est bloc-inconditionnel dans $L^p(\mathbb{T})$;*
- *$X = L^1(\mathbb{T})$: $L^1_E(\mathbb{T})$ a la (umap) si et seulement si $L^1_E(\mathbb{T})$ a la (uap) et E est bloc-inconditionnel dans $L^1(\mathbb{T})$;*
- *$X = \mathcal{C}(\mathbb{T})$: si $\mathcal{C}_E(\mathbb{T})$ a la (umap), E est bloc-inconditionnel dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$; la réciproque vaut lorsque E est un ensemble de Sidon.*

Donnons-en une application immédiate :

Proposition 5 *Soit $E = \{n_k\} \subseteq \mathbb{Z}$. Si n_{k+1}/n_k est un entier impair pour tout k, alors $\mathcal{C}_E(\mathbb{T})$ a la (umap) réelle.*

En effet, comme E est nécessairement Sidon, il suffit de vérifier que E est bloc-inconditionnel au sens réel : soient $F \subseteq E \cap [-n, n]$ et $G = E \setminus \{n_1, \ldots, n_l\}$. Prenons $f \in B_{\mathcal{C}_F}$ et $g \in B_{\mathcal{C}_G}$. Alors $g(u + \pi/n_l) = -g(u)$ par hypothèse et

$$|f(u + \pi/n_l) - f(u)| \leq \pi/|n_l| \cdot \|f'\|_\infty \leq \pi n/|n_l|$$

par l'inégalité de Bernstein. Donc on a pour un certain $u \in \mathbb{T}$

$$\begin{aligned} \|f - g\|_\infty &= |f(u) + g(u + \pi/n_l)| \\ &\leq |f(u + \pi/n_l) + g(u + \pi/n_l)| + \pi n/|n_l| \\ &\leq \|f + g\|_\infty + \pi n/|n_l| \end{aligned}$$

Or $|n_l|$ est arbitrairement grand. ■

Donnons encore un autre résultat positif :

Proposition 6 *Soit $E = \{n_k\} \subseteq \mathbb{Z}$. Si $|n_{k+1}/n_k| \to \infty$, alors $\mathcal{C}_E(\mathbb{T})$ a la (umap) complexe.*

En fait, nous pouvons prouver quelque chose de plus concret : dans ce cas, on a pour tout $\varepsilon > 0$ un $l \geq 1$ tel que pour tout $f(t) = \sum a_k e^{i n_k t}$

$$\|f\|_\infty \geq (1 - \varepsilon)\Big(\Big\|\sum_{k \leq l} a_k e^{i n_k t}\Big\|_\infty + \sum_{k > l} |a_k|\Big). \tag{3}$$

Ceci revient à dire que la suite $\{\pi_k\}_{k \geq l}$ des projections associée à la base E réalise la $\frac{1}{1-\varepsilon}$-(*uap*). Pour obtenir l'inégalité (3), on utilise une récurrence basée sur l'idée suivante.

Soit $u \in \mathbb{T}$ tel que $\|\pi_k f\|_\infty = |\pi_k f(u)|$. Il existe alors $v \in \mathbb{T}$ tel que

$$|u - v| \leq \pi/|n_{k+1}| \quad \text{et} \quad |\pi_k f(u) + a_{k+1} e^{in_{k+1}v}| = \|\pi_k f\|_\infty + |a_{k+1}|.$$

De plus, dans ce cas,

$$|\pi_k f(u) - \pi_k f(v)| \leq |u - v| \, \|\pi_k f'\|_\infty \leq \pi |n_k/n_{k+1}| \, \|\pi_k f\|_\infty.$$

En résumé, $a_{k+1} e^{in_{k+1}t}$ a le même argument que $\pi_k f$ très près du maximum de $|\pi_k f|$, et $\pi_k f$ varie peu.
Mais alors

$$\begin{aligned} \|\pi_k f(t) + a_{k+1} e^{in_{k+1}t}\|_\infty &\geq |\pi_k f(v) + a_{k+1} e^{in_{k+1}v}| \\ &\geq \|\pi_k f\|_\infty + |a_{k+1}| - \pi |n_k/n_{k+1}| \|\pi_k f\|_\infty \\ &= (1 - \pi |n_k/n_{k+1}|) \|\pi_k f\|_\infty + |a_{k+1}|. \end{aligned}$$

On obtient (3) en réitérant cet argument. ■
Qu'est-ce qui se passe lorsque n_{k+1}/n_k est borné ? et en particulier lorsque n_{k+1}/n_k est pair ? Pour répondre à ces questions, il nous faut établir des

3 Conditions arithmétiques pour la (*umap*)

La propriété de bloc-inconditionnalité nous suggère d'étudier des expressions du type

$$\Theta_q(\lambda, a_1, \ldots, a_m) = \|a_1 e^{iq_1 t} + \ldots + a_j e^{iq_j t} + \lambda(a_{j+1} e^{iq_{j+1} t} + \ldots + a_m e^{iq_m t})\|_p$$

comme fonction $\mathcal{C}^\infty$ de $\lambda, a_1, \ldots, a_m$. Si p est un entier pair, Θ_q est un polynôme ; sinon, c'est une série pour $p < \infty$. Pour $p = \infty$, il n'y a pas moyen d'exprimer Θ_q.
La propriété de bloc-inconditionnalité se lit alors ainsi : à $q_1, \ldots, q_j \in E$ fixés, l'oscillation

$$\operatorname*{osc}_{\lambda \in \mathbb{U}} \Theta_q(\lambda, a_1, \ldots, a_m) \underset{q_{j+1}, \ldots, q_m \in E \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

En utilisant un argument de compacité, on peut alors supposer que $\Theta_q \to \Theta$ en métrique $\mathcal{C}^\infty$; mais alors Θ est constante en λ. En développant Θ_q, on voit bien que certaines relations arithmétiques entre $q_1, \ldots, q_m$ ne peuvent persister à moins d'infirmer la (*umap*). Cette idée apparaît dans [4] et [13].
Cela donne les relations arithmétiques suivantes, selon que le choix de signes est réel ou complexe.

Définition 7 *E a la propriété $(\mathcal{J}_n)$ si, pour tout $F \subseteq E$ fini, il existe $G \subseteq E$ cofini tel que : si $k \in \mathbb{Z}$ admet deux représentations comme somme de n éléments de $F \cup G$*

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = k = \sum_{j=1}^{n} p'_j,$$

alors

– $\#[p_j \in F] = \#[p'_j \in F]$, *dans le cas du choix de signes complexe* $\mathbb{U} = \mathbb{T}$ *;*
– $\#[p_j \in F]$ *et* $\#[p'_j \in F]$ *ont même parité, dans le cas du choix de signes réel* $\mathbb{U} = \{-1, 1\}$.

Notons que $(\mathcal{J}_{n+1}) \Rightarrow (\mathcal{J}_n)$. Ce sont des relations entre le début et la fin de E. Elles n'interdisent l'existence ni de suites arithmétiques arbitrairement longues, ni de relations de parallélépipède. En particulier, le pas de E ne tend pas nécessairement vers l'infini, comme le veut l'exemple [7, th. 4]. Néanmoins, si l'ensemble E vérifie $(\mathcal{J}_n)$ pour un $n \geq 3$, alors sa densité maximale est nulle [12, prop. 9.2]. On obtient le

Théorème 8 ([12, th. 6.6 et cor. 6.7]) *Soit* $E = \{n_k\} \subseteq \mathbb{Z}$.

1. *Si* $X = L^p(\mathbb{T})$, *p un entier pair, alors* $L^p_E(\mathbb{T})$ *a la* (umap) *si et seulement si* E *vérifie* $(\mathcal{J}_{p/2})$.
2. *Si* $X = L^p(\mathbb{T})$, *p non entier pair, ou* $X = \mathcal{C}(\mathbb{T})$, *alors* X_E *a la* (umap) *seulement si* E *vérifie* $(\mathcal{J}_n)$ *pour chaque* $n \geq 1$.

Cette propriété ne s'interpole donc pas. Au contraire, on a la hiérarchie suivante :

$\mathcal{C}_E(\mathbb{T})$ a (*umap*) $L^2_E(\mathbb{T})$ a (*umap*).	$\Rightarrow$	$L^p_E(\mathbb{T})$ a (*umap*) si p non entier pair	$\Rightarrow \ldots \Rightarrow$	$L^{2n+2}_E(\mathbb{T})$ a (*umap*)	$\Rightarrow$	$L^{2n}_E(\mathbb{T})$ a (*umap*)	$\Rightarrow \ldots \Rightarrow$	

Appliquons le th. 8 aux suites géométriques $G = \{j^k\}_{k \geq 0}$ avec $j \geq 2$. La relation arithmétique suivante vaut sur G.

$$\underbrace{1 + \ldots + 1}_{j \text{ fois}} + j^{k+1} = j + \underbrace{j^k + \ldots + j^k}_{j \text{ fois}}.$$

Elle montre que $L^{2j+2}_G(\mathbb{T})$ n'a pas la (*umap*) complexe, ni la (*umap*) réelle si de plus j est pair. Donc la prop. 5 est optimale.
De la même manière, pour voir que $E = \{k^4\}_{k \geq 1}$, l'ensemble des bicarrés, est tel que $L^6_E(\mathbb{T})$ n'a pas la (*umap*), il suffit de noter avec Ramanujan [14, p.386] que l'équation diophantienne $a^4 + b^4 + c^4 = d^4 + e^4 + f^4$ admet l'infinité suivante de solutions :

$$(4n^5 - 5n)^4 + (6n^4 - 3)^4 + (4n^4 + 1)^4 = (4n^5 + n)^4 + (2n^4 - 1)^4 + 3^4.$$

Donnons une autre application du th. 8. La partie entière de $x \in \mathbb{R}$ est notée $[x]$.

Corollaire 9 ([12, prop. 11.1.3]) *Soient* $\sigma > 1$ *et* $E = \{[\sigma^k]\}_{k \geq 1}$. *Alors sont équivalentes*

1. σ *est un nombre transcendant.*
2. $L^p_E(\mathbb{T})$ *a la* (umap) *complexe pour tout entier pair* p.

Références

[1] J. Bourgain and H. P. Rosenthal. Geometrical implications of certain finite dimensional decompositions. *Bull. Soc. Math. Belg. (B)*, 32 :57–82, 1980.

[2] P. G. Casazza and N. J. Kalton. Notes on approximation properties in separable Banach spaces. In P. F. X. Müller and W. Schachermayer, editors, *Geometry of Banach spaces, Proc. Conf. Strobl 1989*, London Math. Soc. Lect. Notes 158, pages 49–63. Cambridge Univ. Press, 1991.

[3] M. Feder. On subspaces of spaces with an unconditional basis and spaces of operators. *Ill. J. Math.*, 24 :196–205, 1980.

[4] F. Forelli. The isometries of H^p. *Can. J. Math.*, 16 :721–728, 1964.

[5] G. Godefroy, N. J. Kalton, and P. D. Saphar. Unconditional ideals in Banach spaces. *Studia Math.*, 104 :13–59, 1993.

[6] N. J. Kalton and Dirk Werner. Property (M), M-ideals, and almost isometric structure of Banach spaces. *J. reine angew. Math.*, 461 :137–178, 1995.

[7] D. Li. Complex unconditional metric approximation property for $C_\Lambda(\mathbb{T})$ spaces. *Studia Math.*, 121 :231–247, 1996.

[8] Joram Lindenstrauss and Lior Tzafriri. *Classical Banach spaces I. Sequence spaces.* Springer, 1977.

[9] J. E. Littlewood and R. E. A. C. Paley. Theorems on Fourier series and power series. *J. London Math. Soc.*, 6 :230–233, 1931.

[10] Bernard Maurey. Isomorphismes entre espaces H_1. *Acta Math.*, 145 :79–120, 1980.

[11] Yves Meyer. Endomorphismes des idéaux fermés de $L^1(G)$, classes de Hardy et séries de Fourier lacunaires. *Ann. sci. École Norm. Sup. (4)*, 1 :499–580, 1968.

[12] Stefan Neuwirth. Metric unconditionality and Fourier analysis. *Studia Math.*, 131 :19–62, 1998.

[13] A. I. Plotkin. Continuation of L^p-isometries. *J. Sov. Math.*, 2 :143–165, 1974.

[14] S. Ramanujan. *Notebooks.* Tata, 1957.

[15] W. Rudin. Trigonometric series with gaps. *J. Math. Mech.*, 9 :203–228, 1960.

Équipe d'Analyse, Université Paris VI,
Boîte 186, 4, place Jussieu, F-75252 Paris cedex 05.
E-mail : neuwirth@ccr.jussieu.fr