1 Théorème de Cauchy-Lipschitz (TCL)

Exercice 1.1 Quel est le type des équations différentielles scalaires suivantes (linéaires, linéaires homogènes, autonomes, ...) :

$$x' = 2tx + t^2, \qquad x' = t^2x^2, \qquad x' = 2x, \qquad x' = 2x^2, \qquad x' = t^3x.$$

Exercice 1.2 (Formulation intégrale) Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue, et $(t_0, x_0) \in \Omega$. Montrer que (I, x) est une solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' &= f(t,x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

si et seulement si $x : I \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue vérifiant

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \quad \forall\, t \in I.$$

Exercice 1.3 Considérons l'équation différentielle scalaire

$$x' = tx. \tag{1.1}$$

(i) Tracer les isoclines de pente $c = -1$, $c = 0$, et $c = 2$. [1]

(ii) Tracer le champ de directions.

(iii) Tracer trois trajectoires.

(iv) Déterminer les solutions stationnaires.

(v) Mêmes questions pour l'équation différentielle scalaire

$$x' = x - t. \tag{1.2}$$

Exercice 1.4 (Comparaison de solutions) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Montrer que si (J, z) et (I, x) sont deux solutions de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ telles que $z(t_0) \leqslant x(t_0)$, $t_0 \in J \cap I$, alors $z(t) \leqslant x(t)$, pour tout $t \in J \cap I$.

Exercice 1.5 (Limites de solutions d'équations autonomes) *Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, et (I, x) une solution de l'équation*

$$x' = g(x), \tag{1.3}$$

telle que $I =]t_-, +\infty[$ et

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \ell, \quad \ell \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $g(\ell) = 0$, autrement dit, ℓ est une solution stationnaire de l'équation (1.3). (Un résultat similaire est vrai si $I =]-\infty, t_+[$ et $\lim_{t\to-\infty} x(t) = \ell \in \mathbb{R}$.)

1. On appelle *isocline de pente c* la courbe dans l'espace des phases élargi d'équation $f(t, x) = c$.

Exercice 1.6 *On considère le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = x(1-x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.4}$$

(i) Montrer que ce problème possède une unique solution maximale (I,x), pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$.

(ii) Déterminer les solutions stationnaires.

(iii) Soit $x_0 \in]0,1[$. Montrer que $x(t) \in]0,1[$, pour tout $t \in I$. En déduire que $I = \mathbb{R}$, et déterminer les extrémités et l'orbite de cette solution. En déduire que cette solution est une solution hétérocline et dessiner cette solution.

(iv) Soit $x_0 > 1$. Montrer que $x(t) > 1$, pour tout $t \in I$. En déduire que $I =]t_-, +\infty[$, et déterminer les extrémités et l'orbite de cette solution. Dessiner cette solution.

(v) Tracer le portrait de phase de l'équation.

Exercice 1.7 On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{1+t^2+x^2} \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.5}$$

(i) Montrer que ce problème possède une unique solution maximale (I,x), pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$.

(ii) Déterminer les solutions stationnaires. Que peut-on en déduire ?

(iii) Montrer que si $\pm x_0 > 0$, alors $\pm x'(t) > 0$, pour tout $t \in I$. Que peut-on en déduire des extrémités de la solution (I,x) ?

(iv) Soit (I,x) une solution. Montrer que $(x^2(t))' \leqslant 2$, pour tout $t \in I$. Que peut-on en déduire des extrémités de la solution (I,x) ?

Exercice 1.8 On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = \sin(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

(i) Montrer que ce problème possède une unique solution maximale (I,x), pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$.

(ii) Déterminer les solutions stationnaires.

(iii) Soit (I,x) une solution maximale. Montrer que $I = \mathbb{R}$, et déterminer son orbite et ses extrémités.

(iv) En déduire que les solutions maximales de l'équation sont soit solutions stationnaires, soit solutions hétéroclines.

Exercice 1.9 *Etudier l'existence et l'unicité des solutions du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = \sqrt{|x|}, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Exercice 1.10 *On se place sur $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et on considère le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} u' = u - \|u\|u \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

où u est à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ et $u_0 \in \mathbb{R}^3$.

(i) Montrer que ce problème de Cauchy possède une unique solution maximale (I,u).

(ii) Montrer que $\|u\|$ est solution d'une équation différentielle. En déduire I.

(iii) Soit $u_0 \in \mathbb{R}^3$ tel que $\|u_0\| = 1$. Montrer que $I = \mathbb{R}$ et $\|u(t)\| = 1$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(iv) En déduire que si $\|u_0\| < 1$, alors $\|u(t)\| < 1$, pour tout $t \in I$.

2 Théorèmes généraux

Exercice 2.1 *Considérons le problème de Cauchy*

$$\left\{\begin{aligned} x' &= t + \sin x \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned}\right. \tag{2.1}$$

(i) Montrer que les solutions maximales de ce problème de Cauchy sont définies sur $\mathbb{R}$.

(ii) Soient $(\mathbb{R}, x_1)$ *et* $(\mathbb{R}, x_2)$ *deux solutions. Montrer que*

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant |x_1(t_0) - x_2(t_0)|\, e^{|t-t_0|}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2.2 (Système différentiel linéaire) *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et soient $A : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $b : I \to \mathbb{R}^n$ deux applications continues. Montrer que le problème de Cauchy*

$$\left\{\begin{aligned} x' &= A(t)x + b(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}\right.$$

possède une unique solution globale (I, x), pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$.

Exercice 2.3 *Soit J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\Omega = J \times \mathbb{R}^n$, et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction lipschitzienne, avec constante de Lipschitz k. Pour tout $(t, t_0, x_0) \in J \times J \times \mathbb{R}^n$, on pose*

$$\Phi(t, t_0, x_0) = x(t),$$

où la fonction x vérifie l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ et la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

(i) Montrer que l'application $\Phi : J \times J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est bien définie.

(ii) Soient (J, x) et (J, y) deux solutions de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ telles que $x(t_0) = x_0$ et $y(s_0) = y_0$. Montrer que

$$\|x(t) - y(t)\| \leqslant (\|x_0 - y_0\| + M|t_0 - s_0|)\, e^{k|t-t_0|},$$

où $M = \sup_{t \in [t_0, s_0]} \|f(t, y(t))\| < +\infty$.

(iii) En déduire que l'application $\Phi(t, \cdot, \cdot)$ est continue, pour tout $t \in J$, autrement dit, que Φ est continue par rapport à (t_0, x_0).

(Ce résultat montre la dépendance continue des solutions de l'équation différentielle par rapport aux données initiales.)

Exercice 2.4 Soient $f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions continues, lipschitziennes avec constantes de Lipschitz respectivement k_1 et k_2, telles que $k_1 \neq k_2$ et $f_1(0) = f_2(0) = 0$. Soit $(\mathbb{R}, x_j)$ une solution de l'équation différentielle $x' = f_j(x)$, $j = 1, 2$. Montrer que

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leqslant e^{k_1 t}\|x_1(0) - x_2(0)\| + \frac{k(e^{k_2 t} - e^{k_1 t})}{k_2 - k_1}\|x_2(0)\|, \quad \forall\, t \geqslant 0,$$

où k est la constante de Lipschitz de la fonction $f_1 - f_2$.

3 Equations différentielles scalaires

Exercice 3.1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que

$$\partial_x f(t,x) \leqslant 0, \quad \forall\ (t,x) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et (I_1, x_1), (I_2, x_2) deux solutions de l'équation différentielle $x' = f(t,x)$ telles que $x_1(t_0) < x_2(t_0)$. Montrer que
- $0 < x_2(t) - x_1(t) \leqslant x_2(t_0) - x_1(t_0)$, pour tout $t \geqslant t_0$, $t \in I_1 \cap I_2$;
- $x_2(t) - x_1(t) \geqslant x_2(t_0) - x_1(t_0) > 0$, pour tout $t \leqslant t_0$, $t \in I_1 \cap I_2$.

(ii) Supposons de plus que

$$f(t,0) = 0, \quad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

Soit (I,x) une solution maximale de l'équation différentielle $x' = f(t,x)$. Montrer que $I =]t_-, +\infty[$.

Exercice 3.2 *Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que*

$$f(t,-1) > 0, \quad f(t,1) < 0, \quad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in]-1,1[$. Montrer que la solution maximale (I,x) du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

vérifie $[t_0, +\infty[\subset I$ et $x(t) \in]-1,1[$, pour tout $t \geqslant t_0$.

Exercice 3.3 *On considère l'équation différentielle*

$$x' = x^2 - t. \tag{3.1}$$

(i) Tracer les isoclines de pente $c = 0$, $c = 1$, et $c = -1$. Quelles parties de ces courbes sont des barrières inférieures (supérieures) ?

(ii) En déduire l'existence d'entonnoirs et d'anti-entonnoirs.

(iii) Que peut-on dire de la solution (I,x) du problème de Cauchy pour une donnée initiale (t_0, x_0) telle que $-\sqrt{t_0} \leqslant x_0 \leqslant \sqrt{t_0}$, $t_0 \geqslant 0$?

(iv) Déterminer les données initiales (t_0, x_0) telles que si $-\sqrt{t_0 - 1} \geqslant x_0$, $t_0 \geqslant 1$, alors la solution (I,x) du problème de Cauchy vérifie $-\sqrt{t-1} \geqslant x(t)$, pour tout $t \in I$, $t \geqslant t_0$.

(v) Que peut-on dire de la solution (I,x) du problème de Cauchy pour une donnée initiale (t_0, x_0) telle que $x_0 \geqslant \sqrt{t_0 + 1}$, $t_0 \geqslant -1$?

(vi) On se propose maintenant de montrer que certaines solutions tendent vers l'infini en temps fini. Déterminer les régions du plan (t,x) où les trajectoires de l'équation différentielle $\alpha' = \alpha^{3/2}$ sont des barrières inférieures pour l'équation (3.1). Conclure.

Exercice 3.4 On considère l'équation différentielle

$$x' = x^2 + t^2. \tag{3.2}$$

(i) Trouver deux familles de barrières inférieures pour l'équation différentielle (3.2). (Utiliser les inégalités $x^2 + t^2 \geqslant t^2$ et $x^2 + t^2 \geqslant x^2$.)

(ii) Montrer qu'il existe $t_+ \leqslant \frac{4}{\sqrt{3}}$ tel que la solution (I, x) du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' &= x^2 + t^2 \\ x(0) &= 0 \end{cases}$$

vérifie $\lim_{t \to t_+} x(t) = +\infty$.

Exercice 3.5 On considère l'équation différentielle

$$x' = x^3 - t.$$

(i) Tracer les isoclines de pente $c = 0$ et $c = 1$. Quelles parties de ces courbes sont des barrières inférieures (supérieures) ?

(ii) Trouver, dans le quadrant $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ t > 0, \ x > 0\}$, un anti-entonnoir piégeant une solution unique.

(iii) En déduire l'existence d'une solution (I, x) du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' &= x^3 - t \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

définie sur $[0, +\infty[$. Calculer $\lim_{t \to +\infty} x(t)$.

4 Equations différentielles linéaires

Exercice 4.1 *Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle*

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

En déduire e^A, où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

Exercice 4.2 *Soit $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.*

(i) Résoudre l'équation différentielle

$$x'' = a^2 x.$$

(ii) Soient $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$. Donner la solution $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = x_1$ dans le cas $a \in \mathbb{R}$.

(iii) Soient $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$. Donner la solution $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = x_1$ dans le cas $a = ib$, $b \in \mathbb{R}$.

(iv) Trouver les exponentielles des matrices suivantes :

$$A_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.3 Soit P un polynôme réel de degré 3 dont les racines α_1, α_2, et α_3 sont simples et réelles.

(i) Ecrire l'équation différentielle $P(D)x = 0$, où $D = \frac{d}{dt}$, sous la forme d'un système différentiel du premier ordre.

(ii) Résoudre le système.

Exercice 4.4 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^k = 0$, $k \in \mathbb{N}$.

(i) Calculer e^{At}, $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Déterminer les solutions de l'équation différentielle $x' = Ax$.

(iii) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante positive C_ε telle que les solutions de l'équation $x' = Ax$ vérifient

$$\|x(t)\| \leqslant C_\varepsilon\, e^{\varepsilon|t|}\, \|x(0)\|, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.5 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{N}$. Montrer que*

$$\sigma(A^k) = \{\lambda^k \ ;\ \lambda \in \sigma(A)\}, \quad \sigma(e^A) = \{e^\lambda \ ;\ \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Exercice 4.6 *Considérons les matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Déterminer les valeurs propres de A, ainsi que leurs multiplicités (algébrique et géométrique).

(ii) En déduire la forme de Jordan de A. Quel est le type de la matrice A ?

(iii) *Trouver une base caractéristique de* $\mathbb{C}^4$.

(iv) *Sans résoudre l'équation, déterminer les conditions initiales* $x(0) = x_0$ *pour lesquelles les solutions de l'équation* $x' = Ax$ *vérifient*

$$\lim_{x\to+\infty} x(t) = 0.$$

Donner une majoration pour la norme $\|x(t)\|$ *de ces solutions pour* $t \geqslant 0$, *et calculer ensuite ces solutions.*

(v) *Sans résoudre l'équation, déterminer les conditions initiales* $x(0) = x_0$ *pour lesquelles les solutions de l'équation* $x' = Ax$ *vérifient*

$$\lim_{x\to-\infty} x(t) = 0.$$

Donner une majoration de la norme $\|x(t)\|$ *de ces solutions pour* $t \leqslant 0$, *et calculer ensuite ces solutions.*

(vi) *Sans résoudre l'équation, déterminer les conditions initiales* $x(0) = x_0$ *pour lesquelles les solutions de l'équation* $x' = Ax$ *sont bornées. Calculer ces solutions.*

(vii) *Résoudre, par deux méthodes différentes, l'équation différentielle* $x' = Ax$.

(viii) *Déterminer les sous-espaces stable, instable, et central.*

(ix) *Donner une estimation pour*

$$\|e^{At}P_s\|, \quad \|e^{At}P_u\|, \quad \|e^{At}P_c\|,$$

où P_s, P_u, *et* P_c *sont les projecteurs spectraux sur les sous-espaces respectivement stable, instable, et central.*

Exercice 4.7 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, tels que

$$\sigma(A) = \sigma_a \cup \sigma_b, \quad \sigma_a \subset \{\lambda \in \mathbb{C}\ ;\ \operatorname{Re}\lambda < a\}, \quad \sigma_b \subset \{\lambda \in \mathbb{C}\ ;\ \operatorname{Re}\lambda > b\}.$$

On pose

$$\mathcal{Y} = \bigoplus_{\lambda\in\sigma_a} X_\lambda, \quad \mathcal{Z} = \bigoplus_{\lambda\in\sigma_b} X_\lambda, \qquad L = A\big|_{\mathcal{Y}}, \quad M = A\big|_{\mathcal{Z}},$$

où X_λ est l'espace caractéristique associé à la valeur propre λ. Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\|e^{Lt}\| \leqslant Ke^{at}, \quad \|e^{-Mt}\| \leqslant Ke^{-bt}, \quad \forall\ t > 0.$$

Exercice 4.8 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq c$, et $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Résoudre, par deux méthodes différentes, l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + f(t) \\ cy + g(t) \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.9 *Considérons le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = (A + B(t))\,x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{4.1}$$

où

$$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \quad \sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}\ ;\ \operatorname{Re}\lambda < 0\}, \quad B \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)).$$

(i) Montrer qu'il existe $b > 0$ et $C > 0$ tels que la solution $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ du problème de Cauchy (4.1) vérifie

$$e^{bt}\|x(t)\| \leqslant C\|x_0\|e^{\int_0^t C\|B(s)\|ds}, \quad \forall\, t \geqslant 0.$$

(ii) On suppose de plus que $\int_0^{+\infty} \|B(s)\|ds < +\infty$. Trouver une majoration pour la norme des solutions du problème de Cauchy (4.1) pour $t \geqslant 0$.

Exercice 4.10 *Soient $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, et $(\mathbb{R}, x_1)$, $(\mathbb{R}, x_2)$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation*

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0.$$

On pose

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix}.$$

Montrer que

$$W(t) = W(0)e^{-\int_0^t p(s)\,\mathrm{d}s}.$$

Exercice 4.11 *Soit $a \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ fonction T-périodique. Déterminer les multiplicateurs et les exposants de Floquet de l'équation $x' = a(t)x$.*

Exercice 4.12 Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Déterminer les multiplicateurs et les exposants de Floquet du système linéaire $x' = Ax$.

Exercice 4.13 *Considérons le système linéaire $x' = A(t)x$, avec $A \in C^0(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{C}^n))$ une application T-périodique. Soit $R(t, s)$ la résolvante du système $x' = A(t)x$, et soit $\tau \in \mathbb{R}$. Montrer que les valeurs propres de la matrice $R(T + \tau, \tau)$ sont les multiplicateurs de Floquet du système.*

Exercice 4.14 *Considérons l'équation*

$$x'' + x' + (\cos t)x = 0.$$

(i) Ecrire l'équation sous la forme d'un système du premier ordre $X' = A(t)X$, avec $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

(ii) Montrer que les multiplicateurs de Floquet λ_1 et λ_2 du système $X' = A(t)X$ vérifient $\lambda_1\lambda_2 = e^{-2\pi}$. (Utiliser l'Exercice 4.10.)

Exercice 4.15 Considérons le système linéaire $x' = A(t)x$, avec $A \in C^0(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{C}^n))$ une application T-périodique.

(i) Montrer qu'il existe un changement de variables $x = P(t)y$ qui transforme le système $x' = A(t)x$ en un système $x' = Bx$, avec $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.

(ii) Soit $\mu \in \mathbb{C}$ un exposant de Floquet. Montrer que le système $x' = A(t)x$ possède une solution de la forme

$$x(t) = e^{\mu t}p(t),$$

avec $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ fonction T-périodique.

(iii) Montrer que le système $x' = A(t)x$ possède une solution bornée si et seulement si le système possède un exposant de Floquet $\mu \in \mathbb{C}$ avec une partie réelle nulle.

5 Equations différentielles autonomes

Exercice 5.1 Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction lipschitzienne avec constante de Lipschitz k. Supposons que $f(0) = 0$ et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}\,;\ \mathrm{Re}\,\lambda < -\alpha\}.$$

(i) Montrer que le flot $S_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de l'équation différentielle $x' = Ax + f(x)$ est bien défini, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que S_t soit une application lipschitzienne avec constante de Lipschitz $Ce^{-\alpha t + Ck|t|}$.

(iii) En déduire que si (I, x) est une solution de l'équation différentielle $x' = Ax + f(x)$, alors

$$\|x(t)\| \leqslant Ce^{-\alpha t + Ck|t|}\|x(0)\|, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.2 *Considérons le système dans* $\mathbb{R}^2$

$$X' = F(X), \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad F(X) = \begin{pmatrix} -x^3 \\ -y \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

(i) Montrer que $(\mathbb{R}, (0,0))$ *est une solution stationnaire.*

(ii) Déterminer le système linéarisé $X' = AX$, $A = DF(0,0)$, *et tracer son portrait de phase.*

(iii) Résoudre le système (5.1). En déduire son portrait de phase.

(iv) Soit $\chi : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ *une fonction de troncature telle que* $\chi(X) = 1$ *si* $\|X\| \leqslant 1$ *et* $\chi(X) = 0$ *si* $\|X\| \geqslant 2$. *Proposer un portrait de phase pour le système tronqué* $X' = \chi(X)F(X)$.

Exercice 5.3 *Considérons le système d'équations différentielles*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & -x^3 + 4x^2 - 4x \\ y' & = & x^2 y + xy - 2y \end{array}\right. . \tag{5.2}$$

(i) Montrer que le système possède deux équilibres $(\mathbb{R}, (a_1, 0))$ *et* $(\mathbb{R}, (a_2, 0))$ *avec* $a_1 < a_2$. *Calculer* a_1 *et* a_2.

(ii) En utilisant le Théorème de Hartman-Grobman, tracer (si possible) l'allure des orbites autour de ces équilibres (sans calculer les directions des vecteurs propres).

(iii) Soit $j \in \{1, 2\}$. *Montrer que la solution maximale* $(I, (x, y))$ *issue de* $x(0) = a_j$, $y(0) = y_0 > 0$ *vérifie* $x(t) = a_j$, $y(t) > 0$, *pour tout* $t \in I$.

(iv) Montrer que la solution maximale $(I, (x, y))$ *issue de* $x(0) = x_0 > a_2$, $y(0) = 0$ *vérifie* $x(t) > a_2$, $y(t) = 0$, *pour tout* $t \in I$.

(v) Montrer que la solution maximale $(I, (x, y))$ *issue de* $x(0) = x_0 > a_2$, $y(0) = y_0 > 0$ *vérifie* $x(t) > a_2$, $y(t) > 0$, *pour tout* $t \in I$.

(vi) Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. *Trouver, selon les valeurs de* x_0 *et* y_0, *des propriétés similaires à celles démontrées aux points c), d) et e) pour la solution maximale* $(I, (x, y))$ *issue de* $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

(vii) En tenant compte de la monotonie des fonctions x *et* y, *proposer un portrait de phase pour le système (5.2).*

Exercice 5.4 *Considérons l'équation différentielle*

$$x'' = x - x^3 \tag{5.3}$$

(i) Ecrire l'équation sous la forme d'un système différentiel de premier ordre.

(ii) Déterminer les équilibres du système. En utilisant le Théorème de Hartman-Grobman, tracer (si possible) l'allure des orbites au voisinage de ces points dans le plan (x, x') *(sans calculer les directions des vecteurs propres).*

(iii) Trouver une intégrale première du système, autrement dit, une fonction $H(x', x)$ *telle que* $H(x'(t), x(t)) = const.$, *si* (I, x) *est une solution. (Multiplier l'équation par* x' *et intégrer par rapport à* t*).*

(iv) Compléter le portrait de phase. Identifier les orbites bornées.

(v) Traiter de la même manière l'équation $x'' = -x + x^3$.

Exercice 5.5 On considère le système différentiel suivant : [2]

$$\begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = y(x-1) \end{cases} \tag{5.4}$$

Soient $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$. On s'intéresse au problème de Cauchy pour le système (5.4) avec données initiales $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$.

(i) Montrer que ce problème de Cauchy possède une unique solution maximale $(I, (x, y))$.

(ii) Montrer que les fonctions x et y vérifient $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$, pour tout $t \in I$.

(iii) Pour $t \in I$, on pose $\psi(t) = \ln x(t) + \ln y(t) - x(t) - y(t)$. Montrer que la fonction ψ est constante sur I (sa valeur dépend bien sûr de la donnée initiale).

(iv) Soit $C \in \mathbb{R}$. On définit K_C par

$$K_C = \big\{(u, v) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+} \ ; \ \ln u + \ln v - u - v = C\big\}$$

Montrer que K_C est un ensemble borné. En déduire que $I = \mathbb{R}$.

(v) Résoudre le problème de Cauchy avec la donnée initiale $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

(vi) On divise le quart de plan $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$ en quatre ensembles :

$$A = \{(u, v) \ ; \ 0 < u < 1, \ 0 < v < 1\}, \quad B = \{(u, v) \ ; \ 1 < u, \ 0 < v < 1\}$$
$$C = \{(u, v) \ ; \ 1 < u, \ 1 < v\}, \quad D = \{(u, v) \ ; \ 0 < u < 1, \ 1 < v\}$$

Montrer que si $(x_0, y_0) \neq (1, 1)$, alors la trajectoire de la solution $(I, (x, y))$ du problème de Cauchy passe successivement de A à B à C et à D pour revenir dans A.

(vii) On définit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ par $f(u) = \ln u - u$. Montrer que f est injective. En déduire que si $(x_0, y_0) \neq (1, 1)$, alors la solution $(I, (x, y))$ du problème de Cauchy est périodique.

(viii) Tracer l'allure des courbes solutions.

---

2. Ce système modélise l'évolution au cours du temps d'une population de lapins (représentée par x), et d'une population de renards (représentée par y) : plus il y a de lapins, plus les renards ont à manger et plus ils se reproduisent. D'un autre coté, plus il y a de renards, plus les lapins se font manger et moins ils se reproduisent.

6 Stabilité

Exercice 6.1 Etudier, par deux méthodes différentes, la stabilité des solutions stationnaires de l'équation

$$x' = x(1-x).$$

Exercice 6.2 Soit $\omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert, et $g : \omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction localement lipschitzienne telle que $g(0) = 0$. Soit S_t le flot de l'équation autonome $x' = g(x)$, et supposons que la solution stationnaire $(\mathbb{R}, 0)$ est stable.

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\|x_0\| < \delta$, alors $\|S_t(x_0)\| < \varepsilon$, pour tout $t \geqslant 0$. En déduire que la solution $(\mathbb{R}, 0)$ est uniformément stable.

Exercice 6.3 *Etudier la stabilité des systèmes linéaires suivants et donner l'allure des orbites autour de* $(0,0)$ *(sans prendre en compte la direction des vecteurs propres) :*

$$\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = -3x + 2y \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x + 3y \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -x - 4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = -x + 4y \\ y' = -9x + y \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -2x - y \\ y' = -4x - 2y \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$$

Exercice 6.4 *Considérons le système* $X' = A(t)X$, *où*

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2}\cos^2 t & 1 - \frac{3}{2}\sin t \cos t \\ -1 - \frac{3}{2}\sin t \cos t & -1 + \frac{3}{2}\sin^2 t \end{pmatrix}.$$

(i) Montrer que les valeurs propres de la matrice $A(t)$ *ont une partie réelle négative.*

(ii) Montrer que la fonction

$$t \mapsto e^{\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

est une solution du système $X' = A(t)X$.

(iii) En déduire que la solution $(\mathbb{R}, 0)$ *est instable.*

Exercice 6.5 Considérons le système linéaire $x' = A(t)x$, avec $A \in C^0(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{C}^n))$ une application T-périodique.

(i) Montrer que si tous les multiplicateurs de Floquet $\lambda \in \mathbb{C}$ du système vérifient $|\lambda| < 1$ (les exposants de Floquet $\mu \in \mathbb{C}$ ont une partie réelle négative, $\operatorname{Re}\mu < 0$), alors la solution $(\mathbb{R}, 0)$ est asymptotiquement stable.

(ii) Montrer que si tous les multiplicateurs de Floquet $\lambda \in \mathbb{C}$ du système vérifient $|\lambda| \leqslant 1$ (les exposants de Floquet $\mu \in \mathbb{C}$ ont une partie réelle négative ou nulle, $\operatorname{Re}\mu \leqslant 0$), et si tous les multiplicateurs de Floquet $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $|\lambda| = 1$ ont leur multiplicité algébrique égale à la multiplicité géométrique (les exposants de Floquet $\mu \in \mathbb{C}$ tels que $\operatorname{Re}\mu = 0$ ont la multiplicité algébrique égale à la multiplicité géométrique), alors la solution $(\mathbb{R}, 0)$ est stable.

(iii) Montrer que si tous les multiplicateurs de Floquet $\lambda \in \mathbb{C}$ du système $x' = A(t)$ vérifient $|\lambda| \leqslant 1$ (les exposants de Floquet $\mu \in \mathbb{C}$ ont une partie réelle négative ou nulle, $\operatorname{Re}\mu \leqslant 0$), et s'il existe un multiplicateur de Floquet $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$ et $m_a(\lambda) > m_g(\lambda)$, (un exposant de Floquet $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}\mu = 0$ et et $m_a(\mu) > m_g(\mu)$), alors la solution $(\mathbb{R}, 0)$ est instable.

(iv) Montrer que s'il existe un multiplicateur de Floquet $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| > 1$ (un exposant de Floquet $\mu \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}\mu > 0$), alors la solution $(\mathbb{R}, 0)$ est instable.

Exercice 6.6 *Considérons l'équation de Hill*

$$x'' + a(t)x = 0,$$

avec $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et* T*-périodique.*

(i) *Ecrire l'équation sous la forme d'un système du premier ordre* $X' = A(t)X$*, avec* $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *une fonction continue et* T*-périodique.*

(ii) *Soit* $\Phi(t) = R(t, 0)$*, où* $R(t, s)$ *est la résolvante du système* $X' = A(t)X$*. Montrer que* $\Phi(t) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *et* $det(\Phi(t)) = 1$*.*

(iii) *Soit* $tr(\Phi(t))$ *la trace de la matrice* $\Phi(t)$*. Montrer que*

(a) *la solution* $(\mathbb{R}, 0)$ *est stable, si* $|tr(\Phi(T))| < 2$ *;*

(b) *la solution* $(\mathbb{R}, 0)$ *est instable, si* $|tr(\Phi(T))| > 2$*.*

Exercice 6.7 Etudier la stabilité de la solution $(\mathbb{R}, 0)$ de l'équation scalaire $x' = (\cos^2 t)x$.

Exercice 6.8 Soit

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \cos t & 12 \\ 147 & \frac{3}{2} + \sin t \end{pmatrix}.$$

Montrer que la solution $(\mathbb{R}, 0)$ du système $X' = A(t)X$ est instable.

Exercice 6.9 *Considérons l'équation différentielle*

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0,$$

avec $p, q \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *deux fonctions* T*-périodiques.*

(i) *Ecrire l'équation sous la forme d'un système du premier ordre* $X' = A(t)X$*, avec* $X = (x, y)$*,* $y = x'$*.*

(ii) *Soit* $R(t, s)$ *la résolvante du système* $X' = A(t)X$*. Montrer que le déterminant de* $R(t, s)$ *vérifie*

$$\det(R(t, s)) = e^{-\int_s^t p(\tau)\,\mathrm{d}\tau}.$$

(iii) *Montrer que la solution stationnaire* $(\mathbb{R}, 0)$ *est instable si*

$$\int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t < 0.$$

Exercice 6.10 *Soit* $\varepsilon \in \mathbb{R}$*. Considérons le système*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & y + \varepsilon(x^3 + 2xy^2) \\ y' & = & -x + \varepsilon y^3 \end{array} \right. .$$

(i) *Etudier la stabilité du système linéarisé autour de la solution* $(\mathbb{R}, (0, 0))$*.*

(ii) *Montrer que* $(\mathbb{R}, (0, 0))$ *est une solution asymptotiquement stable, si* $\varepsilon < 0$*.*

(iii) *Montrer que* $(\mathbb{R}, (0, 0))$ *est une solution instable, si* $\varepsilon > 0$*.*

(iv) *Montrer que* $(\mathbb{R}, (0, 0))$ *est une solution stable et non attractive, si* $\varepsilon = 0$*.*

Exercice 6.11 Etudier la stabilité des solutions stationnaires du système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' &=& x^2 + y^2 - 25 \\ y' &=& xy - 12 \end{array} \right. .$$

Exercice 6.12 On considère le système :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' &=& -y - x\sqrt{x^2+y^2} \\ y' &=& x - y\sqrt{x^2+y^2} \end{array} \right. \tag{6.1}$$

Montrer que la solution stationnaire $(\mathbb{R}, (0,0))$ est asymptotiquement stable.

Exercice 6.13 *Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Considérons le système différentiel*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' &=& 2y \\ y' &=& -\Phi'(x) \end{array} \right. . \tag{6.2}$$

Montrer que si x_* est un minimum local strict de Φ alors $(\mathbb{R}, (x_*, 0))$ est une solution stationnaire stable. Est-elle asymptotiquement stable ?

Exercice 6.14 *En construisant une fonction de Liapounov de la forme $V(x,y) = ax^2 + by^2$, étudier la stabilité de la solution stationnaire $(\mathbb{R}, (0,0))$ des systèmes suivants :*

$$(i) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x' &=& -x - 2y^3 \\ y' &=& x\,y^2 - y^3 \end{array} \right. \qquad (ii) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x' &=& -x^3 + xy^2 \\ y' &=& -2x^2y - y^3 \end{array} \right. \qquad (iii) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x' &=& -\frac{x^3}{2} + 2xy^2 \\ y' &=& -y^3 \end{array} \right.$$

$$(iv) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x' &=& -x^3 + 2y^3 \\ y' &=& -2xy^2 \end{array} \right. \qquad (v) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x' &=& x^3 - y^3 \\ y' &=& 2xy^2 + 4x^2y + 2y^3 \end{array} \right.$$