Rappels d'algèbre linéaire

Le calcul de l'exponentielle e^A d'une matrice A repose sur différentes propriétés des matrices, que nous rappelons dans cette section. On va supposer ici que les matrices sont complexes, donc $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1 Valeurs propres et spectre

Définition 1.1 (Valeur propre, spectre) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

(i) Un nombre complexe $\lambda \in \mathbb{C}$ est appelé valeur propre de A *s'il existe un vecteur $v \in \mathbb{C}^n$ non nul, $v \neq 0$, tel que*

$$Av = \lambda v.$$

Le vecteur v est appelé vecteur propre de A *associé à la valeur propre λ.*

(ii) L'ensemble, noté $\sigma(A)$, des valeurs propres de la matrice A est appelé spectre de A .

Une manière simple de calculer les valeurs propres d'une matrice A est à l'aide du **polynôme caractéristique $\boldsymbol{P(X)}$** suivant

$$P(X) = \det(X\mathbb{I} - A),$$

où $\det(B)$ représente le déterminant d'une matrice B.

Question 1.1 *Quel est le degré du polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?*

En effet, on a les propriétés suivantes **(exercice)**.

Propriété 1.2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(i) Un nombre complexe $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A si et seulement si λ est une racine du polynôme caractéristique $P(X) = \det(X\mathbb{I} - A)$.

(ii) La matrice A possède au plus n valeurs propres distinctes.

(iii) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice réelle, alors λ est une valeur propre de A si et seulement si $\overline{\lambda}$ est une valeur propre de A, autrement dit

$$\lambda \in \sigma(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{\lambda} \in \sigma(A), \qquad \forall\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Cette propriété montre que le spectre d'une matrice réelle A est symétrique par rapport à l'axe des réels dans le plan complexe $\mathbb{C}$.

Question 1.2 *Montrer que le spectre de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est constitué de deux valeurs propres complexes $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$. (En particulier, cet exemple montre qu'une matrice réelle peut avoir des valeurs propres complexes.)*

Définition 1.3 (Multiplicité algébrique, géométrique) *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \sigma(A)$ une valeur propre de A.*

(i) La multiplicité, notée $m_a(\lambda)$*, de la racine* λ *du polynôme caractéristique* $\det(X\mathbb{I} - A)$ *est appelée* multiplicité algébrique de la valeur propre λ.

(ii) La valeur propre λ *est dite* simple *si* $m_a(\lambda) = 1$, double *si* $m_a(\lambda) = 2$, triple *si* $m_a(\lambda) = 3, \ldots$.

(iii) Le nombre, noté $m_g(\lambda)$*, de vecteurs propres linéairement indépendants associés à la valeur propre* λ *est appelé* multiplicité géométrique de la valeur propre λ.

(iv) La valeur propre λ *est dite* semi-simple *si* $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$.

Une conséquence immédiate de la définition de la multiplicité algébrique est l'égalité

$$\sum_{\lambda \in \sigma(A)} m_a(\lambda) = n;$$

(autrement dit, la somme des multiplicité algébriques des valeurs propres d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est égale à n).

Question 1.3 *Quelle est la multiplicité algébrique des valeurs propres dans la Question 1.2 ?*

Question 1.4 *Quel est le spectre de la matrice* $A = a\mathbb{I}$, $a \in \mathbb{R}$ *? Quelles sont les multiplicités algébrique et géométrique des valeurs propres de la matrice* $A = a\mathbb{I}$, $a \in \mathbb{R}$ *?*

Exemple 1.4 *Considérons la matrice suivante*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est

$$P(X) = (X + 2)X^2,$$

donc A *possède deux valeurs propres,* $\boxed{\sigma(A) = \{-2, 0\}}$*, avec multiplicités algébriques*

$$\boxed{m_a(-2) = 1, \quad m_a(0) = 2.}$$

Afin de déterminer les multiplicités géométriques de ces deux valeurs propres on va calculer les vecteurs propres associés.

Pour la valeur propre -2 *il faut résoudre le système*

$$Ax = -2x \iff A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -2x_1 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \\ -2x_3 \end{pmatrix},$$

donc les vecteurs propres associés à la valeur propre -2 *sont*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_1 \in \mathbb{C}^*.$$

Ces vecteurs propres sont linéairement dépendants, donc le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants associés à la valeur propre -2 *est* 1. *Par conséquent,* $\boxed{m_g(-2) = 1}$.

Pour la valeur propre 0 *il faut résoudre le système*

$$Ax = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2x_1 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 *sont*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 \in \mathbb{C}^*.$$

Ces vecteurs propres sont linéairement dépendants, donc le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants associés à la valeur propre 0 *est* 1. *Par conséquent,* $\boxed{m_g(0) = 1}$.

2 Espaces propres et espaces caractéristiques

Notation 2.1 *Soit* $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *On note* $\mathrm{Ker}(B)$ *le noyau de la matrice* B, *autrement dit,*

$$\mathrm{Ker}(B) = \{x \in \mathbb{C}^n \ ; \ Bx = 0\} \subset \mathbb{C}^n,$$

et $\dim(\mathrm{Ker}(B))$ *la dimension de* $\mathrm{Ker}(B)$. [1]

Question 2.1 *Montrer que* $\mathrm{Ker}(B) \subset \mathrm{Ker}(B^2)$.

Notons que

- λ est une valeur propre de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(\lambda\mathbb{I} - A) \neq \{0\}$, donc
$$\lambda \in \sigma(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(\lambda\mathbb{I} - A) \neq \{0\};$$
- $\dim(\mathrm{Ker}(\lambda\mathbb{I} - A)) = m_g(\lambda) \geqslant 1$.

Définition 2.2 (Espace propre) *Soient* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et* λ *une valeur propre de* A. *Le sous-espace* $\mathrm{Ker}(\lambda\mathbb{I} - A)$ *est appelé le* (sous-) espace propre associé à la valeur propre λ.

Soit λ une valeur propre de A, donc $\mathrm{Ker}(\lambda\mathbb{I} - A) \neq \{0\}$. Alors on a les propriétés suivantes :

- $\mathrm{Ker}(\lambda\mathbb{I} - A) \subset \mathrm{Ker}((\lambda\mathbb{I} - A)^2)$, et plus généralement $\mathrm{Ker}((\lambda\mathbb{I} - A)^k) \subset \mathrm{Ker}((\lambda\mathbb{I} - A)^{k+1})$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$;
- ainsi, on obtient une suite croissante de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n$,
$$\{0\} \subsetneq \mathrm{Ker}(\lambda\mathbb{I} - A) \subset \mathrm{Ker}((\lambda\mathbb{I} - A)^2) \subset \cdots \subset \mathrm{Ker}((\lambda\mathbb{I} - A)^k) \subset \mathrm{Ker}((\lambda\mathbb{I} - A)^{k+1}) \subset \ldots;$$
- si $\mathrm{Ker}((\lambda\mathbb{I} - A)^{k_*}) = \mathrm{Ker}((\lambda\mathbb{I} - A)^{k_*+1})$, alors $\mathrm{Ker}((\lambda\mathbb{I} - A)^k) = \mathrm{Ker}((\lambda\mathbb{I} - A)^{k_*})$, pour tout $k \geqslant k_*$ **(exercice)**.

1. On note $\dim(X)$ la dimension d'un espace vectoriel X.

Puisque $\mathbb{C}^n$ est un espace vectoriel de dimension finie ($\dim(\mathbb{C}^n) = n$), les sous-espaces vectoriels dans la suite croissante $(\mathrm{Ker}((\lambda\mathbb{I} - A)^k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ coïncident à partir d'un certain rang, et on conclut qu'il existe $k_\lambda \geqslant 1$ tel que

$$\{0\} \subsetneq \mathrm{Ker}(\lambda\mathbb{I} - A) \subsetneq \mathrm{Ker}((\lambda\mathbb{I} - A)^2) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{Ker}((\lambda\mathbb{I} - A)^{k_\lambda}) = \mathrm{Ker}((\lambda\mathbb{I} - A)^{k_\lambda + p}), \quad \forall\, p \in \mathbb{N}.$$

Notons que $k_\lambda \leqslant n$ **(exercice)**, donc en particulier

$$\mathrm{Ker}((\lambda\mathbb{I} - A)^{k_\lambda}) = \mathrm{Ker}((\lambda\mathbb{I} - A)^n).$$

Définition 2.3 (Espace caractéristique) *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, λ une valeur propre de A, et k_λ le plus petit entier positif k tel que* $\mathrm{Ker}((\lambda\mathbb{I} - A)^k) = \mathrm{Ker}((\lambda\mathbb{I} - A)^{k+1})$*. Le sous-espace* $\mathrm{Ker}((\lambda\mathbb{I} - A)^{k_\lambda}) \subset \mathbb{C}^n$ *est appelé le* (sous-) espace caractéristique associé à la valeur propre λ. *On note E_λ l'espace caractéristique associé à la valeur propre λ.*

Une propriété remarquable des espaces caractéristiques est qu'ils donnent une décomposition de $\mathbb{C}^n$,

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(A)} E_\lambda,$$

autrement dit, $\mathbb{C}^n$ est la somme directe des espaces caractéristiques associés aux valeurs propres de la matrice A. De plus, la dimension de l'espace caractéristique E_λ est égale à la multiplicité algébrique de la valeur propre λ.

On résume dans le lemme suivant plusieurs propriétés des espaces propres et des espaces caractéristiques, qui nous seront très utiles par la suite.

Lemme 2.4 (Espaces propres et caractéristiques) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note E_λ l'espace caractéristique associé à une valeur propre λ de A.*

(i) $\mathrm{Ker}(\lambda\mathbb{I} - A) \subset E_\lambda$*, pour tout $\lambda \in \sigma(A)$.*

(ii) $\dim(\mathrm{Ker}(\lambda\mathbb{I} - A)) = m_g(A)$ *et* $\dim(E_\lambda) = m_a(\lambda)$*, pour tout $\lambda \in \sigma(A)$. En particulier, $m_g(\lambda) \leqslant m_a(\lambda)$.*

(iii) $\mathrm{Ker}(\lambda\mathbb{I} - A) = E_\lambda$ *si et seulement si $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$, autrement dit, si et seulement si la valeur propre λ est semi-simple.*

(iv) $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(A)} E_\lambda$*. En particulier, $\sum_{\lambda\in\sigma(A)} m_a(\lambda) = n$.*

Démonstration. On admet l'égalité $\dim(E_\lambda) = m_a(\lambda)$ et la propriété (iv). La propriété (i) et l'égalité $\dim(\mathrm{Ker}(\lambda\mathbb{I} - A)) = m_g(A)$ découlent des définitions, et l'inégalité $m_g(\lambda) \leqslant m_a(\lambda)$ et la propriété (iii) sont des conséquences immédiates de (i) **(exercice)**. ■

Définition 2.5 *La décomposition $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(A)} E_\lambda$ de $\mathbb{C}^n$ est appelée* décomposition spectrale de $\mathbb{C}^n$.

Question 2.2 *Quelle est la multiplicité géométrique d'une valeur propre λ avec multiplicité algébrique $m_a(\lambda) = 1$?*

3 Cas des matrices réelles symétriques

Une classe particulière de matrices est celle des matrices réelles symétriques,

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad A = A^t,$$

où A^t représente la matrice transposée de A. Ces matrices sont diagonalisables, ce qui permet d'obtenir une formule pour leur exponentielle.

Question 3.1 *Quelle est la matrice transposée de* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *?*

Question 3.2 *Donner un exemple de matrice symétrique.*

Lemme 3.1 (Exponentielle de matrices réelles symétriques) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle symétrique.*

(i) Les valeurs propres de la matrice A sont réelles et semi-simples, autrement dit, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, avec $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ valeurs propres telles que $m_a(\lambda_j) = m_g(\lambda_j)$, pour tout $j = 1, \dots, n$.

(ii) Il existe une matrice inversible S telle que

$$A = SDS^{-1}, \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

autrement dit, la matrice A est semblable à une matrice diagonale.

(iii) L'exponentielle e^A de la matrice A est donnée par

$$e^A = Se^D S^{-1}, \qquad e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Démonstration. On admet (i) et (ii).

(iii) Puisque $e^A = Se^D S^{-1}$, en utilisant la définition de l'exponentielle on obtient

$$e^D = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{D^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} {\lambda_1}^k & & & 0 \\ & {\lambda_2}^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & {\lambda_n}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

■

4 Cas général : forme de Jordan

En général, les matrices ne sont pas diagonalisables, mais un résultat d'algèbre linéaire montre que toute matrice est semblable à une matrice particulière, plus simple, appelée matrice de Jordan.

Définition 4.1 (Matrice (forme) de Jordan) *Une matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite* matrice de Jordan*, ou* en forme normale de Jordan*, ou* en forme de Jordan*, si*

$$J = \begin{pmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_m \end{pmatrix}, \qquad B_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, m. \tag{4.1}$$

Les matrices B_j sont matrices carrées, appelées blocs de Jordan*.*

Notons que

- les valeurs λ_j ne sont pas nécessairement distinctes ;
- la taille d'un bloc de Jordan B_j peut être égale à 1 ;
- une matrice diagonale est une matrice de Jordan avec tous les blocs de Jordan de taille 1.

Lemme 4.2 (Matrices de Jordan) *Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice en forme de Jordan, avec blocs de Jordan B_j de taille m_j, $j = 1, \dots, m$, donnés par (4.1).*

(i) Le spectre d'un bloc de Jordan B_j est constitué d'une seule valeur propre, $\sigma(B_j) = \{\lambda_j\}$, avec $m_g(\lambda_j) = 1$ et $m_a(\lambda_j) = m_j$.

(ii) Le spectre de J est l'ensemble $\sigma(J) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$.

(iii) Si λ est une valeur propre de J, $\lambda \in \sigma(J)$, alors sa multiplicité géométrique est égale au nombre de blocs de Jordan B_j tels que $\lambda = \lambda_j$, et sa multiplicité algébrique est égale à la somme des tailles des blocs de Jordan B_j tels que $\lambda = \lambda_j$.

(iv) Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, l'exponentielle $e^{\alpha J}$ est donnée par

$$e^{\alpha J} = \begin{pmatrix} e^{\alpha B_1} & & & 0 \\ & e^{\alpha B_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\alpha B_m} \end{pmatrix}, \quad e^{\alpha B_j} = e^{\alpha \lambda_j} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \frac{\alpha^2}{2!} & & & \frac{\alpha^{m_j-1}}{(m_j-1)!} \\ & 1 & \alpha & & & \frac{\alpha^{m_j-2}}{(m_j-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \frac{\alpha^2}{2!} \\ & & & & \ddots & \alpha \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Démonstration. Un calcul direct permet de montrer les propriétés (i), (ii), (iii), et la première égalité de (4.2) **(exercice)**. Afin de montrer la deuxième égalité de (4.2), on écrit

$$B_j = \lambda_j \mathbb{I} + N_j, \quad N_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Alors, N_j est une matrice nilpotente et

$$N_j^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 0 & & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad N_j^{m_j-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & & 1 \\ & 0 & 0 & & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad N_j^{m_j} = 0.$$

Par conséquent,

$$e^{\alpha N_j} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\alpha N_j)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m_j-1} \frac{\alpha^k N_j^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \frac{\alpha^2}{2!} & & & \frac{\alpha^{m_j-1}}{(m_j-1)!} \\ & 1 & \alpha & & & \frac{\alpha^{m_j-2}}{(m_j-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \frac{\alpha^2}{2!} \\ & & & & \ddots & \alpha \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque la matrice $\mathbb{I}$ commute avec N_j, des propriétés de l'exponentielle on obtient

$$e^{\alpha B_j} = e^{\alpha\lambda_j \mathbb{I} + \alpha N_j} = e^{\alpha\lambda_j \mathbb{I}} e^{\alpha N_j} = e^{\alpha\lambda_j} \mathbb{I}\, e^{\alpha N_j} = e^{\alpha\lambda_j} e^{\alpha N_j},$$

d'où on déduit la deuxième égalité de (4.2). ∎

Exemple 4.3 *La matrice A dans l'Exemple 1.4 est une matrice de Jordan. En appliquant le lemme précédent on conclut que*

$$\sigma(A) = \{-2, 0\}, \quad m_a(-2) = m_g(-2) = 1, \quad m_a(0) = 2, \quad m_g(0) = 1;$$

(donc on peut déterminer les valeurs propres et leurs multiplicités algébrique et géométrique sans calculer le polynôme caractéristique et les vecteurs propres). De plus,

$$e^{\alpha A} = \begin{pmatrix} e^{-2\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{C}.$$

Le résultat suivant, montrant que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de Jordan, nous permet de déterminer l'exponentielle de A.

Théorème 4.4 (Forme de Jordan et matrice exponentielle) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

(i) Il existe une matrice inversible S et une matrice de Jordan J telles que

$$A = SJS^{-1},$$

autrement dit, la matrice A est semblable à une matrice de Jordan. La matrice de Jordan J est unique à l'ordre des blocs près.

(ii) Les matrices A et J ont les mêmes valeurs propres, et ces valeurs propres ont les mêmes multiplicités algébriques et les mêmes multiplicités géométriques.

(iii) L'exponentielle e^A de la matrice A est donnée par $e^A = Se^J S^{-1}$.

(iv) Si toutes les valeurs propres de la matrice A sont semi-simples, alors J est une matrice diagonale. En particulier, si A est une matrice réelle et symétrique, alors J est une matrice diagonale réelle.

Démonstration. On admet la partie (i). Les propriétés (ii) et (iii) découlent de (i) **(exercice)**.

(iv) D'après le Lemme 4.2 (iii), si toutes les valeurs propres sont semi-simples, alors tous les blocs de Jordan de J sont de taille 1, donc J est une matrice diagonale. La dernière partie, est une conséquence immédiate de cette propriété et du Lemme 3.1 (i). ■

Notons qu'en connaissant les valeurs propres d'une matrice A, ainsi que leurs multiplicités, algébrique et géométrique, on peut parfois écrire directement la forme de Jordan J de la matrice A.

Exemple 4.5 *(i) Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que*

$$\sigma(A) = \{0, 2\}, \quad m_g(0) = 1, \quad m_a(0) = 2, \quad m_g(2) = m_a(2) = 2.$$

D'après le Théorème 4.4 (ii), la forme de Jordan de A est une matrice J ayant les mêmes valeurs propres, avec les mêmes multiplicités, algébrique et géométrique. On utilise maintenant le Lemme 4.2 (iii). Puisque $m_g(0) = 1$, à la valeur propre 0 correspond un seul bloc de Jordan, et la taille de ce bloc de Jordan est 2, car $m_a(0) = 2$. Donc, le bloc de Jordan correspondant à la valeur propre 0 est

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour la valeur propre 2 on a $m_g(2) = 2$, donc deux blocs de Jordan correspondent à cette valeur propre, et puisque $m_a(2) = 2$, ces deux blocs sont de taille 1,

$$B_2 = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, la forme de Jordan de la matrice A est, à l'ordre des blocs près,

$$J = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que

$$\sigma(A) = \{0\}, \quad m_g(0) = 2, \quad m_a(0) = 4.$$

Dans ce cas, il existe deux formes de Jordan possibles **(exercice)**

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notation 4.6 (d'Arnold) *On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de type*

$$(\lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda_k)^{m_k}$$

si sa forme de Jordan consiste en k blocs de Jordan B_j, $j = 1, \dots, k$, de taille m_j, ayant la valeur propre λ_j. Puisque la forme de Jordan est unique, à l'ordre des blocs près, cette notation nous donne une classification des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour une matrice réelle, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dans cette notation on écrit seulement les valeurs propres réelles et les valeurs propres complexes λ avec $\operatorname{Im} \lambda > 0$, car si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est une valeur propre complexe, alors $\overline{\lambda}$ est aussi une valeur propre.

Question 4.1 *Quel est le type de la matrice A dans l'Exemple 1.4 ?*

5 Base caractéristique et calcul de la forme de Jordan

Dans cette section on montre comment construire une base, appelée *base caractéristique*, de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice A est en forme de Jordan. Cette base permettra de calculer la forme de Jordan J et la matrice S telle que $A = SJS^{-1}$, et ainsi l'exponentielle e^A de la matrice A.

Construction d'une base caractéristique On procède en plusieurs étapes :

(i) A l'aide du polynôme caractéristique, on détermine les valeurs propres de A, ainsi que leur multiplicité algébrique $m_a(\lambda)$ (donnée par leur multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique).

(ii) Rappelons la décomposition $\mathbb{C} = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)} E_\lambda$ dans le Lemme 2.4. Par conséquent, il suffit de construire une base pour chaque espace caractéristique E_λ.

(iii) Pour chaque valeur propre λ de A, on détermine les vecteurs propres associés en résolvant le système linéaire

$$Av = \lambda v.$$

On choisit ensuite $m_g(\lambda)$ vecteurs propres linéairement indépendants $\{v_1, \dots, v_{m_g(\lambda)}\}$ (rappelons que le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants est égal à la multiplicité géométrique $m_g(\lambda)$ de la valeur propre λ).

(iv) Si $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$, alors les vecteurs propres linéairement indépendants $\{v_1, \ldots, v_{m_g(\lambda)}\}$ forment une base de l'espace caractéristique E_λ, associé à la valeur propre λ, car la dimension de cet espace est égale à $m_a(\lambda)$.

(v) Si $m_g(\lambda) < m_a(\lambda)$, alors pour chaque vecteur propre v_ℓ on construit une chaîne de vecteurs $\{w_{\ell,1}, \ldots, w_{\ell,\kappa_\ell}\}$, appelés *vecteurs caractéristiques* en résolvant successivement les systèmes linéaires suivants

$$\begin{aligned} Aw_{\ell,1} &= \lambda w_{\ell,1} + v_\ell, \\ Aw_{\ell,2} &= \lambda w_{\ell,2} + w_{\ell,1}, \\ &\vdots \\ Aw_{\ell,\kappa_\ell} &= \lambda w_{\ell,\kappa_\ell} + w_{\ell,\kappa_\ell - 1}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Le dernier vecteur w_{ℓ,κ_ℓ} de la chaîne a la propriété que le système linéaire

$$Aw = \lambda w + w_{\ell,\kappa_\ell}$$

ne possède pas de solution, donc on arrête le calcul lorsqu'on arrive à un système qui n'a pas de solution. Notons que

- chaque vecteur $w_{\ell,k}$ de la chaîne est unique à un élément du noyau de $A - \lambda\mathbb{I}$ près, car il s'agit de la solution du système linéaire non homogène $Aw = \lambda w + w_{\ell,k-1}$; (le vecteur $w_{\ell,k}$ est une des solutions de ce système, et dans les exemples il convient de choisir la solution la plus “simple”) ;
- le vecteur $w_{\ell,k}$ appartient à l'espace $\mathrm{Ker}(\lambda\mathbb{I} - A)^{k+1}$ **(exercice)**, donc en particulier à l'espace caractéristique E_λ ;
- les vecteurs $\{w_{\ell,1}, \ldots, w_{\ell,\kappa_\ell}\}$ sont linéairement indépendants.

(vi) L'ensemble de vecteurs

$$\mathcal{B}_\lambda = \{v_\ell, w_{\ell,1}, \ldots, w_{\ell,\kappa_\ell}\ ;\ \ell = 1, \ldots, m_g(\lambda)\} \subset E_\lambda,$$

est une base de l'espace caractéristique E_λ, appelée *base caractéristique* de E_λ. Notons que le nombre de vecteurs de cette base est égal à $m_a(\lambda)$, donc en particulier, on peut arrêter le calcul des vecteurs $w_{\ell,k}$ lorsqu'on a trouvé $m_a(\lambda)$ vecteurs (admis).

(vii) Puisque $\mathbb{C} = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(A)} E_\lambda$, l'ensemble de vecteurs

$$\mathcal{B} = \bigcup_{\lambda\in\sigma(A)} \mathcal{B}_\lambda \tag{5.2}$$

est une base de $\mathbb{C}^n$, appelée *base caractéristique* de $\mathbb{C}^n$.

Question 5.1 *En déduire que la base caractéristique associée à une matrice réelle symétrique est constituée de vecteurs propres.*

Question 5.2 *Trouver une base caractéristique associée à la matrice A dans l'Exemple 1.4.*

Propriétés de la base caractéristique et justification de la construction Afin de simplifier les notations, on note

$$v_1, \ldots, v_{m_g} \in \mathbb{C}^n, \qquad m_g = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} m_g(\lambda),$$

m_g vecteurs propres linéairement indépendants de la matrice A (notons que m_g est précisément le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants de la matrice A, car m_g est la somme des multiplicités géométriques des valeurs propres de A). En particulier,

$$Av_j = \lambda_j v_j, \quad \sigma(A) = \{\lambda_j \;;\; j = 1, \ldots, m_g\},$$

où les valeurs propres λ_j de A ne sont pas nécessairement distinctes. Pour chaque vecteur propre v_j on note

$$w_{j,1}, \ldots, w_{j,\kappa_j}, \quad j = 1, \ldots, m_g,$$

la chaîne de vecteurs caractéristiques définies par (5.1). Alors l'ensemble

$$\mathcal{B} = \{v_j, w_{j,1}, \ldots, w_{j,\kappa_j}, \quad j = 1, \ldots, m_g\},$$

est une base caractéristique de $\mathbb{C}^n$ (en particulier, il contient n vecteurs de $\mathbb{C}^n$).

Considérons la matrice S dont les colonnes sont les n vecteurs de la base caractéristique $\mathcal{B}$, plus précisément,

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & \ldots & S_{m_g} \end{pmatrix}, \qquad S_j = \begin{pmatrix} v_j & w_{j,1} & \ldots & w_{j,\kappa_j} \end{pmatrix}.$$

Alors S est une matrice carrée $n \times n$ et elle est inversible, car les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont linéairement indépendants. De plus,

$$AS = \begin{pmatrix} AS_1 & AS_2 & \ldots & AS_{m_g} \end{pmatrix}, \qquad AS_j = \begin{pmatrix} Av_j & Aw_{j,1} & \ldots & Aw_{j,\kappa_j} \end{pmatrix}.$$

En utilisant les égalités (5.1) on obtient

$$AS_j = \begin{pmatrix} \lambda_j v_j & \lambda_j w_{j,1} + v_j & \ldots & \lambda_j w_{j,\kappa_j} + w_{j,\kappa_j - 1} \end{pmatrix} = \lambda_j S_j + \begin{pmatrix} 0 & v_j & \ldots & w_{j,\kappa_j - 1} \end{pmatrix},$$

donc

$$AS_j = S_j B_j, \quad B_j = \lambda_j \mathbb{I} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{pmatrix},$$

et B_j est un bloc de Jordan de taille $\kappa_j + 1$. Alors,

$$AS = \begin{pmatrix} AS_1 & AS_2 & \ldots & AS_{m_g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 B_1 & S_2 B_2 & \ldots & S_{m_g} B_{m_g} \end{pmatrix} = SJ,$$

où J est la matrice de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_{m_g} \end{pmatrix}, \qquad B_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, \ldots, m_g.$$

Par conséquent,

- *la matrice S dont les colonnes sont les vecteurs de la base caractéristique $\mathcal{B}$ est telle que*

$$AS = SJ,$$

où J est une matrice de Jordan ;
- la base caractéristique $\mathcal{B}$ nous permet alors de construire une matrice inversible S et de trouver une matrice de Jordan J telles que

$$A = SJS^{-1},$$

donc de trouver la forme de Jordan de A ;
- en particulier, on peut calculer l'exponentielle de αA, $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$e^{\alpha A} = Se^{\alpha J}S^{-1}.$$

Notons que l'existence d'une matrice inversible S et d'une matrice de Jordan J telles que $A = SJS^{-1}$ est donnée par le Théorème 4.4. Puisque S est une matrice inversible, ses colonnes forment une base de $\mathbb{C}^n$, et le calcul précédent montre que cette base est la base caractéristique $\mathcal{B}$ donnée par (5.2). En particulier, ceci justifie la construction de la base caractéristique $\mathcal{B}$.

Cas d'une matrice réelle Dans le cas d'une matrice réelle $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la base caractéristique de $\mathbb{C}^n$ construite précédemment nous permet de trouver une base *réelle* de $\mathbb{R}^n$. En effet, si A est une matrice réelle, alors son polynôme caractéristique est à coefficients réels, donc ses racines sont réelles, ou sinon, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est une racine (complexe) si et seulement si $\overline{\lambda}$ est une racine. Par conséquent, une valeur propre λ de A est soit réelle, soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $\overline{\lambda}$ est aussi une valeur propre.

Si λ est une valeur propre réelle, alors les vecteurs propres associés sont réels, ainsi que les vecteurs de la base caractéristique $\mathcal{B}_\lambda$.

Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors les vecteurs de la base caractéristique $\mathcal{B}_\lambda$ sont complexes,

$$\mathcal{B}_\lambda = \{v_\ell, w_{\ell,1}, \ldots, w_{\ell,\kappa_\ell} \ ; \ \ell = 1, \ldots, m_g(\lambda)\} \subset E_\lambda \subset \mathbb{C}^n.$$

Puisque $\overline{\lambda}$ est aussi une valeur propre, il n'est pas difficile de vérifier que la base caractéristique $\mathcal{B}_{\overline{\lambda}}$ associée est donnée par

$$\mathcal{B}_{\overline{\lambda}} = \{\overline{v_\ell}, \overline{w_{\ell,1}}, \ldots, \overline{w_{\ell,\kappa_\ell}} \ ; \ \ell = 1, \ldots, m_g(\lambda)\} \subset E_{\overline{\lambda}},$$

(les vecteurs complexes conjugués des vecteurs de la base caractéristique de E_λ). En prenant les parties réelles et imaginaires de ces vecteurs, on obtient une base *réelle* de l'espace $E_\lambda \oplus E_{\overline{\lambda}}$,

$$\mathcal{B}^r_{\lambda,\overline{\lambda}} = \{\operatorname{Re} v_\ell, \operatorname{Im} v_\ell, \operatorname{Re} w_{\ell,1}, \operatorname{Im} w_{\ell,1}, \ldots, \operatorname{Re} w_{\ell,\kappa_\ell}, \operatorname{Im} w_{\ell,\kappa_\ell} \ ; \ \ell = 1, \ldots, m_g(\lambda)\} \subset E_\lambda \oplus E_{\overline{\lambda}},$$

ce qui nous permet de construire une base réelle de $\mathbb{R}^n$.

6 Projecteurs caractéristiques

Les espaces caractéristiques E_λ nous donne une décomposition de $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(A)} E_\lambda$. Il est alors important de savoir décomposer un vecteur $u \in \mathbb{C}^n$ en une somme

$$u = \sum_{\lambda\in\sigma(A)} u_\lambda, \quad u_\lambda \in E_\lambda.$$

Une manière de trouver cette décomposition est à l'aide des *projecteurs caractéristiques.* On admet le résultat suivant.

Lemme 6.1 (Projecteurs caractéristiques) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

(i) Pour tout $\lambda \in \sigma(A)$ il existe une unique application linéaire $P_\lambda : \mathbb{C}^n \to E_\lambda$ telle que
- *$P_\lambda^2 = P_\lambda$, $P_\lambda|_{E_\lambda} = \mathbb{I}$, autrement dit P_λ est un projecteur sur E_λ ;*
- *$P_\lambda A = AP_\lambda$, autrement dit P_λ commute avec A.*

On appelle P_λ projecteur caractéristique *associé à la valeur propre λ.*

(ii) De plus, $\sum_{\lambda\in\sigma(A)} P_\lambda = \mathbb{I}$, donc pour tout $u \in \mathbb{C}^n$ on a

$$u = \sum_{\lambda\in\sigma(A)} P_\lambda u, \quad P_\lambda u \in E_\lambda.$$

Calcul des projecteurs caractéristiques Soit $\lambda \in \sigma(A)$. On procède en plusieurs étapes.

(i) On considère la base caractéristique

$$\mathcal{B}_\lambda = \{v_\ell, w_{\ell,1}, \ldots, w_{\ell,\kappa_\ell} \ ; \ \ell = 1, \ldots, m_g(\lambda)\} \subset E_\lambda,$$

de l'espace caractéristique E_λ, vérifiant (5.1).

(ii) Puisque $P_\lambda u \in E_\lambda$, pour tout $u \in \mathbb{C}^n$, on écrit

$$P_\lambda u = \sum_{\ell=1}^{m_g(\lambda)} \left(p_{\ell,0}(u)v_\ell + p_{\ell,1}(u)w_{\ell,1} + \cdots + p_{\ell,\kappa_\ell}(u)w_{\ell,\kappa_\ell}\right), \quad \forall\, u \in \mathbb{C}^n,$$

où $p_{\ell,j}(u) \in \mathbb{C}$. L'application P_λ étant linéaire, on déduit que les applications $p_{\ell,j} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ sont aussi linéaires. Alors, il existe les vecteurs $\zeta_{\ell,j} \in \mathbb{C}^n$ tels que

$$p_{\ell,j}(u) = \langle u, \zeta_{\ell,j}\rangle, \quad \forall\, u \in \mathbb{C}^n,$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ représente le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{C}^n$,

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i\overline{v_i}, \quad \forall\, u = (u_1, \ldots, u_n),\ v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{C}^n$$

(théorème de représentation des applications linéaires). Par conséquent

$$\boxed{P_\lambda u = \sum_{\ell=1}^{m_g(\lambda)} \left(\langle u, \zeta_{\ell,0}\rangle v_\ell + \langle u, \zeta_{\ell,1}\rangle w_{\ell,1} + \cdots + \langle u, \zeta_{\ell,\kappa_\ell}\rangle w_{\ell,\kappa_\ell}\right), \quad \forall\, u \in \mathbb{C}^n.} \tag{6.1}$$

(iii) On utilise maintenant l'égalité $AP_\lambda = P_\lambda A$. En tenant compte des égalités (5.1) on obtient

$$\begin{aligned}
AP_\lambda u &= \sum_{\ell=1}^{m_g(\lambda)} \left(\langle u, \zeta_{\ell,0}\rangle A v_\ell + \langle u, \zeta_{\ell,1}\rangle A w_{\ell,1} + \cdots + \langle u, \zeta_{\ell,\kappa_\ell}\rangle A w_{\ell,\kappa_\ell}\right) \\
&= \sum_{\ell=1}^{m_g(\lambda)} \left(\langle u, \zeta_{\ell,0}\rangle \lambda v_\ell + \langle u, \zeta_{\ell,1}\rangle \left(\lambda w_{\ell,1} + v_\ell\right) + \cdots + \langle u, \zeta_{\ell,\kappa_\ell}\rangle \left(\lambda w_{\ell,\kappa_\ell} + w_{\ell,\kappa_\ell - 1}\right)\right) \\
&= \sum_{\ell=1}^{m_g(\lambda)} \big(\left(\langle u, \zeta_{\ell,0}\rangle \lambda + \langle u, \zeta_{\ell,1}\rangle\right) v_\ell + \left(\langle u, \zeta_{\ell,1}\rangle \lambda + \langle u, \zeta_{\ell,2}\rangle\right) w_{\ell,1} + \cdots + \langle u, \zeta_{\ell,\kappa_\ell}\rangle \lambda w_{\ell,\kappa_\ell}\big) \\
&= \sum_{\ell=1}^{m_g(\lambda)} \Big(\big(\langle u, \overline{\lambda}\zeta_{\ell,0}\rangle + \langle u, \zeta_{\ell,1}\rangle\big) v_\ell + \big(\langle u, \overline{\lambda}\zeta_{\ell,1}\rangle + \langle u, \zeta_{\ell,2}\rangle\big) w_{\ell,1} + \cdots + \langle u, \overline{\lambda}\zeta_{\ell,\kappa_\ell}\rangle w_{\ell,\kappa_\ell}\Big).
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$P_\lambda A u = \sum_{\ell=1}^{m_g(\lambda)} \left(\langle Au, \zeta_{\ell,0}\rangle v_\ell + \langle Au, \zeta_{\ell,1}\rangle w_{\ell,1} + \cdots + \langle Au, \zeta_{\ell,\kappa_\ell}\rangle w_{\ell,\kappa_\ell}\right),$$

et puisque $\mathcal{B}_\lambda$ est une base, de l'égalité $AP_\lambda u = P_\lambda A u$ on obtient que

$$\begin{aligned}
&\langle u, \overline{\lambda}\zeta_{\ell,0}\rangle + \langle u, \zeta_{\ell,1}\rangle = \langle Au, \zeta_{\ell,0}\rangle, \\
&\langle u, \overline{\lambda}\zeta_{\ell,1}\rangle + \langle u, \zeta_{\ell,2}\rangle = \langle Au, \zeta_{\ell,1}\rangle, \\
&\vdots \\
&\langle u, \overline{\lambda}\zeta_{\ell,\kappa_\ell}\rangle = \langle Au, \zeta_{\ell,\kappa_\ell}\rangle,
\end{aligned} \tag{6.2}$$

pour tout $u \in \mathbb{C}^n$.

Une manière de déterminer les vecteurs $\zeta_{\ell,j}$ est à l'aide de la matrice adjointe A^* de A. Rappelons que l'adjointe A^* de A est la matrice définie par

$$A^* = \overline{A^t},$$

où A^t est la matrice transposée de A. Une propriété importante de A^* est l'égalité suivante

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, A^* v\rangle, \quad \forall\ u, v \in \mathbb{C}^n.$$

Par conséquent, les égalités (6.2) deviennent

$$\begin{aligned}
&\langle u, \overline{\lambda}\zeta_{\ell,0} + \zeta_{\ell,1}\rangle = \langle u, A^*\zeta_{\ell,0}\rangle, \\
&\langle u, \overline{\lambda}\zeta_{\ell,1} + \zeta_{\ell,2}\rangle = \langle u, A^*\zeta_{\ell,1}\rangle, \\
&\vdots \\
&\langle u, \overline{\lambda}\zeta_{\ell,\kappa_\ell}\rangle = \langle u, A^*\zeta_{\ell,\kappa_\ell}\rangle.
\end{aligned}$$

Puisque ces égalités sont vraies pour tout $u \in \mathbb{C}^n$ on déduit que les vecteurs $\zeta_{\ell,j}$ vérifient

$$\boxed{A^*\zeta_{\ell,0} = \overline{\lambda}\zeta_{\ell,0} + \zeta_{\ell,1}, \quad A^*\zeta_{\ell,1} = \overline{\lambda}\zeta_{\ell,1} + \zeta_{\ell,2}, \quad \ldots, \quad A^*\zeta_{\ell,\kappa_\ell} = \overline{\lambda}\zeta_{\ell,\kappa_\ell}.} \tag{6.3}$$

Ces égalités permettent de déterminer les vecteurs $\zeta_{\ell,j}$ à des éléments du noyau de $A^* - \overline{\lambda}\mathbb{I}$ près.

Remarque 6.2 *En particulier, des égalités (6.3) on conclut que l'ensemble*

$$\mathcal{B}^*_\lambda = \{\zeta_{\ell,0}, \zeta_{\ell,1}, \ldots, \zeta_{\ell,\kappa_\ell} \; ; \; \ell = 1, \ldots, m_g(\lambda)\} \subset E^*_{\overline{\lambda}}$$

est une base caractéristique de l'espace caractéristique $E^*_{\overline{\lambda}}$ *associé à la valeur propre* $\overline{\lambda}$ *de la matrice adjointe* A^*.

(iv) Enfin, on utilise le fait que P_λ est un projecteur sur E_λ, et donc

$$P_\lambda u_\lambda = u_\lambda, \quad \forall \, u_\lambda \in E_\lambda.$$

En particulier, cette égalité est vraie pour les vecteurs de la base caractéristique,

$$P_\lambda v_\ell = v_\ell, \quad P_\lambda w_{\ell,1} = w_{\ell,1}, \quad \ldots, \quad P_\lambda w_{\ell,\kappa_\ell} = w_{\ell,\kappa_\ell},$$

d'où, en utilisant la propriété (6.1) on obtient que

$$\boxed{\langle v_\ell, \zeta_{\ell,j}\rangle = \delta_{0j}, \quad \langle w_{\ell,1}, \zeta_{\ell,j}\rangle = \delta_{1j}, \quad \ldots, \quad \langle w_{\ell,\kappa_\ell}, \zeta_{\ell,j}\rangle = \delta_{\kappa_\ell j}, \qquad j = 0, \ldots, \kappa_\ell,} \tag{6.4}$$

où $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{ii} = 1$. Les vecteurs $\zeta_{\ell,j}$ sont déterminés de manière unique par les égalités (6.3) et (6.4).

Remarque 6.3 (Base duale) *L'ensemble*

$$\mathcal{B}^*_\lambda = \{\zeta_{\ell,0}, \zeta_{\ell,1}, \ldots, \zeta_{\ell,\kappa_\ell} \; ; \; \ell = 1, \ldots, m_g(\lambda)\} \subset E^*_{\overline{\lambda}}$$

où les vecteurs $\zeta_{\ell,j}$ *vérifient les égalités (6.3) et (6.4) est appelé* base duale *de* $\mathcal{B}_\lambda$.

Remarque 6.4 (Calcul des projecteurs) *Plutôt que d'appliquer directement les formules (6.1), (6.3) et (6.4), dans les exemples (exercices) il est plus "simple" de refaire les arguments précédents en tenant compte des propriétés principales qui nous ont conduit à ces formules :*

(i) l'existence de la base caractéristique $\mathcal{B}_\lambda$ *de* E_λ *;*

(ii) la propriété $P_\lambda u \in E_\lambda$ *et la linéarité de* P_λ *qui nous ont permis de trouver (6.1) ;*

(iii) la propriété de commutativité $P_\lambda A = AP_\lambda$ *qui nous a permis de trouver (6.3) ;*

(iv) l'égalité $P_\lambda^2 = P_\lambda$*, montrant que* P_λ *est un projecteur, qui nous a permis de trouver (6.4).*

7 Réciproque de l'application exponentielle

Lemme 7.1 (Réciproque de l'application exponentielle) *Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$* [2] *une matrice inversible. Alors il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $C = e^B$.*

Démonstration. [3] On construit la matrice B successivement pour

(i) un bloc de Jordan C_λ inversible ;

(ii) une matrice de Jordan J inversible ;

(iii) une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible.

(i) Soit $C_\lambda \in \mathcal{M}_\kappa(\mathbb{C})$ un bloc de Jordan inversible,

$$C_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \mathbb{I} + N, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme C_λ est une matrice inversible, $\lambda \neq 0$, et on écrit

$$C_\lambda = \lambda \left(\mathbb{I} + \frac{1}{\lambda} N \right).$$

On pose

$$M_\lambda = \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^{j+1} \frac{1}{j} \left(\frac{1}{\lambda} N \right)^j = \sum_{j=1}^{\kappa-1} (-1)^{j+1} \frac{1}{j \lambda^j} N^j,$$

la somme étant finie puisque $N^\kappa = 0$ [4]. Alors la matrice M_λ est bien définie et un calcul direct (admis) montre que

$$e^{M_\lambda} = \mathbb{I} + \frac{1}{\lambda} N.$$

Par conséquent, la matrice

$$B_\lambda = (\ln \lambda) \mathbb{I} + M_\lambda,$$

vérifie

$$e^{B_\lambda} = e^{(\ln \lambda)\mathbb{I}} e^{M_\lambda} = \lambda \mathbb{I} \left(\mathbb{I} + \frac{1}{\lambda} N \right) = C_\lambda,$$

ce qui prouve le résultat pour un bloc de Jordan C_λ.

---

2. ou $C \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Le résultat est différent si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

3. Notons que dans le cas $n = 1$, $C \in \mathbb{C}$ est un nombre complexe, et alors il existe un logarithme $B \in \mathbb{C}$ tel que $e^B = C$, si $C \neq 0$. Rappelons que ce logarithme n'est pas unique (par exemple, $e^{2\pi k i} = 1$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$), ainsi que le développement

$$\ln(1+z) = \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^{j+1} \frac{z^j}{j},$$

cette série étant uniformément convergente sur tout disque centré en 0 et de rayon strictement inférieur à 1. (On utilisera cette série pour construire la matrice B.)

4. Comparer avec le développement limité de $\ln(1+z)$.

(ii) Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de Jordan inversible,

$$J = \begin{pmatrix} C_1 & & & 0 \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & C_m \end{pmatrix}, \qquad C_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Puisque J est inversible, les blocs de Jordan C_j, $j = 1, \ldots, m$ sont inversibles, et d'après la partie (i) il existe les matrices B_j, $j = 1, \ldots, m$, telles que

$$e^{B_j} = C_j, \quad j = 1, \ldots, m.$$

On pose

$$L = \begin{pmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_m \end{pmatrix},$$

et alors

$$e^L = \begin{pmatrix} e_1^B & & & 0 \\ & e_2^B & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e_m^B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & & & 0 \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & C_m \end{pmatrix} = J,$$

ce qui prouve le résultat pour une matrice de Jordan J.

(iii) Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible. D'après le Théorème 4.4 (i) il existe une matrice S inversible et une matrice de Jordan J telles que

$$C = SJS^{-1}.$$

Comme C est inversible, J est aussi inversible, et d'après la partie (ii) il existe $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$e^L = J.$$

On pose $B = SLS^{-1}$ et alors

$$e^B = e^{SLS^{-1}} = Se^LS^{-1} = SJS^{-1} = C,$$

ce qui prouve le résultat pour une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. ■

Remarque 7.2 *(i) Si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice réelle (ou $C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$), alors il est possible de montrer qu'il existe une matrice réelle $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $e^B = C^2$.*

(ii) La matrice B n'est pas unique. Par exemple, puisque $e^{2\pi ki} = 1$, $k \in \mathbb{Z}$, on déduit que

$$e^{2\pi ki\mathbb{I}} = e^{2\pi ki}\mathbb{I} = \mathbb{I}, \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}.$$

De plus, si $e^B = C$, alors

$$e^{B+2\pi ki\mathbb{I}} = C, \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}.$$

Question 7.1 *Trouver une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $e^B = -\mathbb{I}$.*