Solutions périodiques en temps des équations de Vlasov-Maxwell

Time periodic solutions for the Vlasov-Maxwell equations

Mihai BOSTAN [a]

[a] *Laboratoire de Mathématiques de Besançon, UMR CNRS 6623, Université de Franche-Comté, 16 route de Gray F-25030 Besançon Cedex, tél : 03.81.66.63.38, fax : 03.81.66.66.23*

Abstract

We study here the existence of time periodic solution for the Vlasov-Maxwell equations in a three dimensional bounded domain. We assume that the boundary of the domain is strictly star-shaped. We give a priori estimates for the kinetic and electro-magnetic energy, and also for the normal and tangential traces of the electro-magnetic field. This method allows to treat both classical and relativistic cases.

Résumé

Nous étudions l'existence de solution périodique en temps pour les équations de Vlasov-Maxwell dans un domaine borné tridimensionnel. On suppose que la frontière du domaine est strictement étoilée. Nous donnons également des estimations a priori pour l'énergie cinétique et électromagnétique ainsi que pour les traces normales et tangentielles du champ électromagnétique. La méthode utilisée permet de traiter à la fois les cas classique et relativiste.

Abridged English version

We consider an open bounded set $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ with boundary $\partial\Omega$ regular and strictly star-shaped. We introduce the notations $\Sigma = \partial\Omega \times \mathbb{R}^3_p$ and $\Sigma^\pm = \{(x,p) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^3_p \mid \pm (v(p) \cdot n(x)) > 0\}$, where $n(x)$ denotes the unit outward normal to $\partial\Omega$ at x and $v(p)$ is the velocity function associated to some energy function $e(p)$ by $v(p) = \nabla_p \, e(p),\ p \in \mathbb{R}^3_p$. For the classical and relativistic cases these functions are given by $e(p) = \frac{|p|^2}{2m},\ \ v(p) = \frac{p}{m}$ and respectively $e(p) = mc_0^2 \left(\left(1 + \frac{|p|^2}{m^2c_0^2}\right)^{1/2} - 1 \right),\ \ v(p) = \frac{p}{m}\left(1 + \frac{|p|^2}{m^2c_0^2}\right)^{-1/2}$, where m is the mass of particles, c_0 is the light speed in the vacuum. We present here an existence result of time periodic weak solution for the Vlasov-Maxwell system (classical or relativistic case) :

$$\partial_t f + v(p) \cdot \nabla_x f + q(E(t,x) + v(p) \wedge B(t,x)) \cdot \nabla_p f = 0, (t,x,p) \in \mathbb{R}_t \times \Omega \times \mathbb{R}^3_p, \tag{1}$$

Email address: `mbostan@descartes.univ-fcomte.fr` (Mihai BOSTAN).

$$\partial_t E - c_0^2 \cdot \text{rot } B = -\frac{j}{\varepsilon_0},\ \ \partial_t B + \text{rot } E = 0,\ \ \text{div } E = \frac{\rho}{\varepsilon_0},\ \ \text{div } B = 0,\ \ (t,x) \in \mathbb{R}_t \times \Omega, \tag{2}$$

$f(t,x,p) = g(t,x,p),\ (t,x,p) \in \mathbb{R}_t \times \Sigma^-,\ \ n \wedge E(t,x) + c_0 \cdot n \wedge (n \wedge B(t,x)) = h(t,x),\ \ (t,x) \in \mathbb{R}_t \times \partial\Omega,$ where g, h are given T periodic functions such that $g \geq 0$, $g \in L^\infty(\mathbb{R}_t \times \Sigma^-)$, $(n \cdot h)|_{\mathbb{R}_t \times \partial\Omega} = 0$ and $\int_0^T\int_{\Sigma^-} |(v(p) \cdot n(x))|(1 + e(p))g(t,x,p)\ dtd\sigma dp + \int_0^T\int_{\partial\Omega} |h(t,x)|^2\ dtd\sigma < +\infty$. First of all, by using the fixed point method, we prove the existence of T periodic solution for a regularized Vlasov-Maxwell system. In order to pass to the limit in respect to the regularized parameters, we need to establish a priori estimates for the total energy (kinetic and electro-magnetic). To simplify, we suppose that (f, E, B) is a regular, T periodic solution, compactly supported in momentum. By using the test function $\varphi = 1$ in the weak formulation of the Vlasov problem we deduce that $\int_0^T\int_{\Sigma^+} (v(p) \cdot n(x))\gamma^+ f\ dtd\sigma dp = -\int_0^T\int_{\Sigma^-} (v(p) \cdot n(x))g\ dtd\sigma dp$, where $\gamma^+ f$ represents the trace of f on $\mathbb{R}_t \times \Sigma^+$. By using the weak formulation of the Vlasov problem with the test function $\varphi = e(p)$ and after multiplication of the Maxwell equations by (E, B) one gets also an estimate for the outgoing kinetic energy $\int_0^T\int_{\Sigma^+} (v(p) \cdot n(x))e(p)\gamma^+ f\ dtd\sigma dp$ and the L^2 norm of the tangential trace of the electro-magnetic field. We use also the momentum conservation law : we take in the weak formulation of the Vlasov problem the test function $\varphi = p \cdot x$. By observing that :

$$\rho E + j \wedge B = \varepsilon_0 (E \text{div } E - E \wedge \text{rot } E) + \frac{1}{\mu_0}(B \text{div } B - B \wedge \text{rot } B) - \varepsilon_0 \partial_t (E \wedge B),$$

and by using the identity $u_i \text{div } u - (u \wedge \text{rot } u)_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}|u|^2,\ 1 \leq i \leq 3$, finally, after integration by parts and by taking into account that $\partial\Omega$ is strictly star-shaped we find an estimate for the total energy and also for the normal trace of the electro-magnetic field. The existence for the general case follows by using the weak stability result of DiPerna and Lions (see [7]).

1. Introduction

La modélisation des dispositifs tels que les tubes à décharge ou les diodes à vides soumises à un potentiel harmonique repose sur les équations de Vlasov-Maxwell ou Vlasov-Poisson en régime périodique. De nombreux résultats on été obtenus pour le problème de Cauchy dans l'espace tout entier : existence de solutions classiques (voir [13], [11]), existence de solutions faibles (voir [1], [7]). Le problème avec condition initiale et conditions aux limites a été étudié également (voir [2], [9]). Le cas stationnaire a été étudié pour Vlasov-Poisson en une dimension d'espace dans [8] puis pour Vlasov-Maxwell en dimension quelconque dans [12]. Des résultats dans le cas périodique en temps en une dimension d'espace ont été obtenus pour Vlasov-Poisson dans [4] et pour Vlasov-Maxwell dans [3].

2. Équation de Vlasov

On étudie les solutions T périodiques du problème de Vlasov suivant :

$$\partial_t f + v(p) \cdot \nabla_x f + F(t,x,p) \cdot \nabla_p f = 0,\ \ (t,x,p) \in \mathbb{R}_t \times \Omega \times \mathbb{R}_p^3, \tag{3}$$

$$f(t,x,p) = g(t,x,p),\ \ (t,x,p) \in \mathbb{R}_t \times \Sigma^-, \tag{4}$$

où $F(t,x,p) = q(E(t,x) + v(p) \wedge B(t,x))$ est la force électro-magnétique, q étant la charge des particules. Pour définir les solutions faibles à ce problème, on introduit l'espace des fonctions test :

$$T_w = \{\varphi \in C^1(\mathbb{R}_t \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R}_p^3) \mid \exists R > 0 : \varphi = \varphi \cdot \mathbf{1}_{\{|p| \leq R\}}, \varphi|_{\mathbb{R}_t \times \Sigma^+} = 0, \varphi(\cdot + T) = \varphi\}.$$

Définition 2.1 *Supposons que $E, B \in L^\infty(\mathbb{R}_t \times \Omega)^3$ et $(v(p) \cdot n(x))g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_t \times \Sigma^-)$ sont T périodiques. On dit que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_t \times \Omega \times \mathbb{R}^3_p)$ est solution faible T périodique du problème de Vlasov (3), (4) ssi f est T périodique et vérifie pour toute fonction test $\varphi \in T_w$:*

$$\int_0^T\int_\Omega\int_{\mathbb{R}^3_p} f \cdot (\partial_t\varphi + v(p) \cdot \nabla_x\varphi + F(t, x, p) \cdot \nabla_p\varphi)\, dtdxdp = \int_0^T\int_{\Sigma^-} (v(p) \cdot n(x))g \cdot \varphi\, dtd\sigma dp. \tag{5}$$

On n'a malheureusement pas unicité de la solution faible périodique pour deux raisons. D'une part, sous la seule hypothèse $E, B \in L^\infty(\mathbb{R}_t \times \Omega)^3$ les caractéristiques de l'équation (3) ne sont pas définies de manière unique. D'autre part, même dans le cas où les caractéristiques sont définies sans ambiguïté, la fonction f prend des valeurs arbitraires sur les caractéristiques qui ne rencontrent pas le bord du domaine. De ces faits, on remplace (3) par l'équation perturbée :

$$\alpha f + \partial_t f + v(p) \cdot \nabla_x f + F_\varepsilon(t, x, p) \cdot \nabla_p f = 0,\ \ (t, x, p) \in \mathbb{R}_t \times \Omega \times \mathbb{R}^3_p, \tag{6}$$

où $\alpha > 0$ est un petit paramètre destiné à tendre vers zéro et $F_\varepsilon(t, x, p) = q(E_\varepsilon(t, x) + v(p) \wedge B_\varepsilon(t, x))$ est une force régularisée avec $E_\varepsilon, B_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}_t; W^{1,\infty}(\Omega))^3$. Dans ce cas on a unicité de la solution faible périodique bornée du problème (6), (4) et la solution faible coïncide avec la solution par caractéristiques.

3. Équations de Maxwell

On suppose que les densités de charge $\rho = q\int_{\mathbb{R}^3_p} f\, dp$ et de courant $j = q\int_{\mathbb{R}^3_p} v(p)f\, dp$ sont des fonctions T périodiques données et on étudie les solutions T périodiques du problème de Maxwell perturbé :

$$\alpha \cdot E(t, x) + \partial_t E - c_0^2 \cdot \text{rot } B = -\frac{1}{\varepsilon_0} j(t, x),\ \ \alpha \cdot B(t, x) + \partial_t B + \text{rot } E = 0,\ \ (t, x) \in \mathbb{R}_t \times \Omega, \tag{7}$$

$$n(x) \wedge E(t, x) + c_0 \cdot n(x) \wedge (n(x) \wedge B(t, x)) = h(t, x),\ \ (t, x) \in \mathbb{R}_t \times \partial\Omega, \tag{8}$$

où ε_0 représente la permittivité électrique du vide et h est une fonction T périodique donnée telle que $(n \cdot h)|_{\mathbb{R}_t\times\partial\Omega} = 0$. On introduit également la perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 \cdot c_0^2}$. On a considéré le terme de perturbation $(\alpha \cdot E, \alpha \cdot B)$ d'une part pour rester consistant avec l'équation (6) et d'autre part pour assurer l'existence et l'unicité de la solution T périodique pour (7), (8). On considère les espaces de Hilbert usuels :

$$H(\text{rot }; \Omega) = \{u \in L^2(\Omega)^3 \mid \text{rot } u \in L^2(\Omega)^3\},\ \ H(\text{div }; \Omega) = \{u \in L^2(\Omega)^3 \mid \text{div } u \in L^2(\Omega)\},$$

munis des normes $\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \|\text{rot } u\|^2_{L^2(\Omega)^3}\right)^{1/2}$ respectivement $\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \|\text{div } u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}$ et on note $H = L^2(\Omega)^6$ muni de la norme $\left(\|E\|^2_{L^2(\Omega)^3} + c_0^2 \cdot \|B\|^2_{L^2(\Omega)^3}\right)^{1/2}$. On définit l'opérateur linéaire $A : D(A) \subset H \to H$ par :

$$D(A) = \{(E, B) \in H \mid \text{rot } E, \text{rot } B \in L^2(\Omega)^3, n \wedge E, n \wedge B \in L^2(\partial\Omega)^3, n \wedge E + c_0 n \wedge (n \wedge B)|_{\partial\Omega} = 0\},$$

et :

$$A(E, B) = (-c_0^2 \cdot \text{rot } B, \text{rot } E),\ \ \forall (E, B) \in D(A).$$

L'opérateur A est maximal monotone. En utilisant la théorie des opérateurs maximaux monotones on montre que si $j \in C^1(\mathbb{R}_t; L^2(\Omega)^3)$ est T périodique et s'il existe $\tilde{h} \in C^1(\mathbb{R}_t; H^1(\Omega)^3) \cap C^2(\mathbb{R}_t; L^2(\Omega)^3)$ T périodique telle que $n \wedge \tilde{h}|_{\mathbb{R}_t\times\partial\Omega} = h$, alors pour tout $\alpha > 0$ fixé, il existe une unique solution forte T périodique $(E, B) \in C(\mathbb{R}_t; H(\text{rot }; \Omega)^2) \cap C^1(\mathbb{R}_t; H)$ pour le problème (7), (8). On peut définir la notion de solution faible T périodique pour le problème (7), (8) par transposition.

4. Système de Vlasov-Maxwell

On commence par l'étude du système de Vlasov-Maxwell régularisé :

$$\alpha f + \partial_t f + v(p)\cdot\nabla_x f + q((\overline{E}\star\zeta_\varepsilon) + v(p)\wedge(\overline{B}\star\zeta_\varepsilon))\cdot\nabla_p f = 0, (t,x,p)\in\mathbb{R}_t\times\Omega\times\mathbb{R}^3_p, \tag{9}$$

$$\alpha E + \partial_t E - c_0^2\cdot \mathrm{rot}\ B = -\frac{\overline{j}\star\zeta_\varepsilon^\vee}{\varepsilon_0},\ \ \alpha B + \partial_t B + \mathrm{rot}\ E = 0,\ \ (t,x)\in\mathbb{R}_t\times\Omega, \tag{10}$$

$$f(t,x,p) = g(t,x,p),\ (t,x,p)\in\mathbb{R}_t\times\Sigma^-,\ \ n\wedge E(t,x) + c_0\cdot n\wedge(n\wedge B(t,x)) = h(t,x),\ \ (t,x)\in\mathbb{R}_t\times\partial\Omega,$$

où $\zeta_\varepsilon(t,x)$ est un noyau de régularisation (périodique) en temps et en espace. On a noté par $\overline{\cdot}$ le prolongement par 0 en dehors de Ω et $\zeta_\varepsilon^\vee(t,x) = \zeta_\varepsilon(-t,-x)$. En utilisant la méthode du point fixe (le théorème de Schauder) on montre l'existence d'une solution T périodique pour le système de Vlasov-Maxwell régularisé.

Proposition 1 *Soient $g\in L^\infty(\mathbb{R}_t\times\Sigma^-)$ et h des fonctions T périodiques, telles que $g\geq 0, W_0 := \int_0^T\int_{\Sigma^-}|(v(p)\cdot n(x))|(1+e(p))g\ dt d\sigma dp + \int_0^T\int_{\partial\Omega}|h|^2\ dt d\sigma < +\infty$ et supposons qu'il existe $\tilde{h}\in C^1(\mathbb{R}_t; H^1(\Omega)^3)\cap C^2(\mathbb{R}_t; L^2(\Omega)^3)$ T périodique telle que $n\wedge\tilde{h}|_{\mathbb{R}_t\times\partial\Omega} = h$. Alors, pour tout $\alpha,\varepsilon > 0$ il existe une solution T périodique du système de Vlasov-Maxwell régularisé. En particulier la solution vérifie :*

$$\int_0^T\int_{\Sigma^+}(v(p)\cdot n(x))\gamma^+ f\ dt d\sigma dp \leq -\int_0^T\int_{\Sigma^-}(v(p)\cdot n(x))g\ dt d\sigma dp, \tag{11}$$

et :

$$\int_0^T\int_{\Sigma^+}(v(p)\cdot n(x))e(p)\gamma^+ f\ dt d\sigma dp + \frac{c_0}{2}\int_0^T\int_{\partial\Omega}\{\varepsilon_0|n\wedge E|^2 + \frac{1}{\mu_0}|n\wedge B|^2\}\ dt d\sigma \leq \frac{c_0\varepsilon_0}{2}\int_0^T\int_{\partial\Omega}|h|^2\ dt d\sigma$$
$$+\int_0^T\int_{\Sigma^-}|(v(p)\cdot n(x))|e(p)g\ dt d\sigma dp, \tag{12}$$

(ici $\gamma^+ f$ représente la trace de f sur $\mathbb{R}_t\times\Sigma^+$).

Puisque $\int_0^T\int_\Omega\int_{\mathbb{R}^3_p}(1+e(p))f\ dt dx dp + \int_0^T\int_{\Sigma^+}(v(p)\cdot n(x))(1+e(p))\gamma^+ f\ dt d\sigma dp < +\infty$, on peut utiliser comme fonction test dans la formulation faible (5) toute fonction $\varphi = \varphi(t,x)$, $\varphi\in C^1_c(]0,T[\times\Omega)$ et on déduit que $\alpha\rho + \partial_t\rho + \mathrm{div}\ j = 0$ dans $D'(]0,T[\times\Omega)$. D'autre part, en utilisant les équations (10) on trouve :

$$\alpha\cdot\mathrm{div}\ E + \partial_t \mathrm{div}\ E = -\frac{1}{\varepsilon_0}\mathrm{div}\ (\overline{j}\star\zeta_\varepsilon^\vee) = \frac{\alpha}{\varepsilon_0}(\overline{\rho}\star\zeta_\varepsilon^\vee) + \frac{1}{\varepsilon_0}\partial_t(\overline{\rho}\star\zeta_\varepsilon^\vee),$$

ou bien :

$$\alpha\left(\mathrm{div}\ E - \frac{1}{\varepsilon_0}(\overline{\rho}\star\zeta_\varepsilon^\vee)\right) + \partial_t\left(\mathrm{div}\ E - \frac{1}{\varepsilon_0}(\overline{\rho}\star\zeta_\varepsilon^\vee)\right) = 0,$$

et par périodicité on en déduit que $\mathrm{div}\ E = \frac{1}{\varepsilon_0}(\overline{\rho}\star\zeta_\varepsilon^\vee)$. De la même façon on montre que $\mathrm{div}\ B = 0$.
Afin d'obtenir l'existence de solution T périodique pour le système de Vlasov-Maxwell non perturbé on doit établir des estimations uniformes par rapport aux petits paramètres $\alpha,\varepsilon > 0$. On utilisera également la loi de conservation de la quantité de mouvement. Pour simplifier les calculs, on supposera ici que (f,E,B) est une solution régulière, T périodique, à support compact en impulsion, pour le système de Vlasov-Maxwell. En utilisant la formulation faible (5) avec la fonction test $\varphi(t,x,p) = p\cdot x$ on en déduit :

$$\int_0^T\int_\Sigma(v(p)\cdot n(x))(p\cdot x)\gamma f\ dt d\sigma dp = \int_0^T\int_\Omega\int_{\mathbb{R}^3_p}(v(p)\cdot p)f\ dt dx dp + \int_0^T\int_\Omega(\rho E + j\wedge B)\cdot x\ dt dx. \tag{13}$$

En tenant compte des équations de Maxwell on vérifie sans peine que :

$$\rho E + j \wedge B = \varepsilon_0(E\text{div } E - E \wedge \text{rot } E) + \frac{1}{\mu_0}(B\text{div } B - B \wedge \text{rot } B) - \varepsilon_0 \partial_t (E \wedge B),$$

et par conséquent, en utilisant l'identité $u_i \text{div } u - (u \wedge \text{rot } u)_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}|u|^2,\ 1 \leq i \leq 3$, et en décomposant $(E, B) = ((n \cdot E)n - n \wedge (n \wedge E), (n \cdot B)n - n \wedge (n \wedge B))$ on déduit après intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega (\rho E + j \wedge B) \cdot x \, dtdx =& - \int_0^T\int_{\partial\Omega} \{\varepsilon_0 (n \cdot E)(n \wedge (n \wedge E)) + \frac{1}{\mu_0}(n \cdot B)(n \wedge (n \wedge B))\} \cdot x \, dtd\sigma \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\partial\Omega} \{\varepsilon_0 (n \cdot E)^2 + \frac{1}{\mu_0}(n \cdot B)^2\}(n \cdot x)\, dtd\sigma - \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\partial\Omega}\{\varepsilon_0 |n \wedge E|^2 + \frac{1}{\mu_0}|n \wedge B|^2\}(n \cdot x)\, dtd\sigma \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \{\varepsilon_0 |E|^2 + \frac{1}{\mu_0}|B|^2\}\, dtdx. \qquad (14)\end{aligned}$$

On impose une hypothèse géométrique sur la frontière $\partial\Omega$: on suppose que $\partial\Omega$ est strictement étoilée par rapport à un point $x_0 \in \Omega$, i.e., $\exists r > 0$ tel que $n(x) \cdot (x - x_0) \geq r,\ \forall x \in \partial\Omega$. Cette hypothèse a déjà été utilisée pour estimer les solutions des équations de Maxwell par la méthode des multiplicateurs (voir [10]). Après translation on peut supposer que $x_0 = 0 \in \Omega$ et puisque Ω est borné, il existe $0 < r \leq R$ tels que $r \leq (n(x) \cdot x) \leq |x| \leq R,\ \forall x \in \partial\Omega$. En combinant (13), (14) et en observant que $e(p) \leq (v(p) \cdot p),\ \forall p \in \mathbb{R}^3_p$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega\int_{\mathbb{R}^3_p} e(p) f \, dtdxdp + \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \{\varepsilon_0|E|^2 + \frac{1}{\mu_0}|B|^2\}\, dtdx + \frac{r}{2}\int_0^T\int_{\partial\Omega}\{\varepsilon_0(n \cdot E)^2 + \frac{1}{\mu_0}(n \cdot B)^2\}\, dtd\sigma \\ \leq R\int_0^T\int_\Sigma |(v(p) \cdot n(x))| \cdot |p| \gamma f \, dtd\sigma dp + \frac{R}{2}\int_0^T\int_{\partial\Omega}\{\varepsilon_0|n \wedge E|^2 + \frac{1}{\mu_0}|n \wedge B|^2\}\, dtd\sigma \\ + R\int_0^T\int_{\partial\Omega}\{\varepsilon_0 |(n \cdot E)| \cdot |n \wedge E| + \frac{1}{\mu_0}|(n \cdot B)| \cdot |n \wedge B|\}\, dtd\sigma. \qquad (15)\end{aligned}$$

En utilisant les conservations de la masse (11) et de l'énergie (12), l'inégalité (15) donne immédiatement une borne de l'énergie totale ainsi que des traces du champ électromagnétique :

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega\int_{\mathbb{R}^3_p} e(p) f \, dtdxdp + \int_0^T\int_\Omega\{\varepsilon_0|E|^2 + \frac{1}{\mu_0}|B|^2\}\, dtdx + \int_0^T\int_{\Sigma^+}(v(p) \cdot n(x))(1 + e(p))\gamma^+ f \, dtd\sigma dp \\ + \int_0^T\int_{\partial\Omega}\{\varepsilon_0(n \cdot E)^2 + \frac{1}{\mu_0}(n \cdot B)^2\}\, dtd\sigma + \int_0^T\int_{\partial\Omega}\{\varepsilon_0|n \wedge E|^2 + \frac{1}{\mu_0}|n \wedge B|^2\}\, dtd\sigma \leq C \cdot W_0.\end{aligned}$$

Il est possible d'obtenir des bornes du même type pour les solutions périodiques du système de Vlasov-Maxwell régularisé et on conclut aisément par stabilité faible des solutions (on utilisera le résultat de compacité par moyenne en impulsion, cf. [7]). On obtient le résultat suivant :

Theorem 4.1 *Soient Ω un ouvert borné, de frontière $\partial\Omega$ régulière et strictement étoilée, $g \in L^\infty(\mathbb{R}_t \times \Sigma^-)$ et h des fonctions T périodiques telles que $g \geq 0$, $(n \cdot h)|_{\mathbb{R}_t \times \partial\Omega} = 0$ et $W_0 = \int_0^T\int_{\Sigma^-} |(v(p) \cdot n(x))|(1 + e(p))g(t, x, p)\ dtd\sigma dp + \int_0^T\int_{\partial\Omega} |h(t, x)|^2\ dtd\sigma < +\infty$. Alors il existe une solution faible T périodique (f, E, B) pour le système de Vlasov-Maxwell (cas classique ou relativiste) qui possède des traces $\gamma^+ f \in L^\infty(\mathbb{R}_t \times \Sigma^+)$, $(n \cdot E, n \cdot B) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_t; L^2(\partial\Omega))^2$, $(n \wedge E, n \wedge B) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_t; L^2(\partial\Omega)^3)^2$ et il existe une constante $C = C(m, \varepsilon_0, \mu_0, \Omega)$ telle que :*

$$\int_0^T\int_\Omega\int_{\mathbb{R}^3_p} e(p)f\ dtdxdp + \int_0^T\int_\Omega \{\varepsilon_0|E|^2 + \frac{1}{\mu_0}|B|^2\}\ dtdx + \int_0^T\int_{\Sigma^+}(v(p)\cdot n(x))(1+e(p))\gamma^+ f\ dtd\sigma dp$$
$$+\int_0^T\int_{\partial\Omega}\{\varepsilon_0(n\cdot E)^2 + \frac{1}{\mu_0}(n\cdot B)^2\}\ dtd\sigma + \int_0^T\int_{\partial\Omega}\{\varepsilon_0|n\wedge E|^2 + \frac{1}{\mu_0}|n\wedge B|^2\}\ dtd\sigma \leq C\cdot W_0.$$

Nous renvoyons à [5], [6] pour les détails de démonstration. Signalons qu'il est possible d'adapter ce type d'arguments dans le cas de plusieurs espèces de particules chargées ou pour des conditions aux limites :

$$\gamma^- f(t,x,p) = g(t,x,p) + a(t,x,p)\cdot\gamma^+ f(t,x,R(t,x)p),\quad (t,x,p)\in\mathbb{R}_t\times\Sigma^-, \tag{16}$$

avec $R(t,x):\mathbb{R}^3_p\to\mathbb{R}^3_p,\ R(t,x)p = p - 2(p\cdot n(x))\cdot n(x), \forall(t,x,p)\in\mathbb{R}_t\times\Sigma$ et $0\leq a(t,x,p)\leq a_0 < 1,\ \forall(t,x,p)\in\mathbb{R}_t\times\Sigma^-$.

Références

[1] A. Arseneev, *Global existence of a weak solution of the Vlasov system of equations*, U.R.S.S. Comp. and Math. Phys. 15(1975), pp. 131-143.

[2] N. Ben Abdallah, *Weak solutions of the initial-boundary value problem for the Vlasov-Poisson system*, Math. Meth. Appl. Sci. 17(1994), no.6, pp. 451-476.

[3] M. Bostan and F. Poupaud, *Periodic solutions of the 1D Vlasov-Maxwell system with boundary conditions*, Math. Methods Appl. Sci. 23(2000), pp. 1195-1221.

[4] M. Bostan, *Permanent regimes for the 1D Vlasov-Poisson system with boundary conditions*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 35, No 4(2003), pp.922-948.

[5] M. Bostan, *Boundary value problem for the N dimensional time periodic Vlasov-Poisson system*, soumis.

[6] M. Bostan, *Boundary value problem for the three dimensional time periodic Vlasov-Maxwell system*, en préparation.

[7] R. J. DiPerna and P. L. Lions, *Global weak solutions of the Vlasov-Maxwell system*, Comm. Pure Appl. Math. XVII (1989), pp. 729-757.

[8] C. Greengard and P.-A. Raviart, *A boundary value problem for the stationary Vlasov-Poisson equations : the plane diode*, Comm. Pure and Appl. Math. vol. XLIII (1990), pp. 473-507.

[9] Y. Guo, *Global weak solutions of the Vlasov-Maxwell system with boundary conditions*, Commun. Math. Phys. 154(1993), pp. 245-263.

[10] V. Komornik, *Exact controllability and stabilization. The multiplier method*, RAM, Masson, Paris, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester (1994).

[11] P.-L. Lions and B. Perthame, *Propagation of moments and regularity for the 3-dimensional Vlasov-Poisson system*, Invent. Math. 105(1991), pp. 415-430.

[12] F. Poupaud, *Boundary value problems for the stationary Vlasov-Maxwell system*, Forum Math. 4(1992), pp. 499-527.

[13] T. Ukai and S. Okabe, *On the classical solution in the large time of the two dimensional Vlasov equations*, Osaka J. Math. 15(1978), pp. 245-261.