Les définitions de nom et les autres

Stefan Neuwirth

Introduction

Je propose de mener une enquête sur la définition mathématique à partir d'un exemple géométrique : l'angle droit. Ce *nom* d'angle droit peut être défini en bonne et due forme, mais nous allons nous apercevoir que ce n'est le cas d'aucun des termes utilisés pour ce faire. Il est bien connu qu'on ne peut pas tout définir !

Les dictionnaires passent outre : j'en profite pour consulter la définition des *mots* d'angle et de droite et me demander s'il s'agit de définitions de ces *choses*. C'est l'occasion de constater que les dictionnaires épousent la mode de leur temps, et de documenter les difficultés de définir la droite.

Dans la dernière partie, j'étudie dans quelle mesure la méthode axiomatique de Pasch peut proposer une définition *implicite* des termes primitifs de la géométrie.

Nous serons guidés dans cette enquête par l'opuscule *De l'esprit géométrique* de Blaise Pascal.

1 Un exemple : l'angle droit.

Le discours mathématique contemporain circonscrit étroitement le rôle de la définition : elle introduit un terme nouveau en l'exprimant au moyen de termes connus.

Je vais traiter un exemple en détail : la définition 10 du premier livre des *Éléments* d'Euclide, datés des « premières décennies du troisième siècle avant l'ère chrétienne » (Caveing 1990, page 15). Le manuscrit le plus ancien connu à ce jour qui contienne cette définition est un papyrus postérieur d'un demi-millénaire (voir Turner et collab. 1985).

1.1 Définir l'angle droit.

La définition 10 a deux parties, dont la première concerne l'angle *droit* et la deuxième la droite *perpendiculaire*.

> 10. Et quand une droite, ayant été élevée sur une droite, fait les angles adjacents égaux entre eux, chacun de ces angles égaux est *droit*, et la droite qui a été élevée est appelée *perpendiculaire* à celle sur laquelle elle a été élevée. (Euclide d'Alexandrie 1990, page 160.)

Considérons la première partie de cette définition. Selon la terminologie de Friedrich Ueberweg (1857), elle est composée d'un *definiendum* (gérondif du verbe latin *definire*, ce qui est à définir), et d'un *definiens* (participe présent, ce qui définit) :

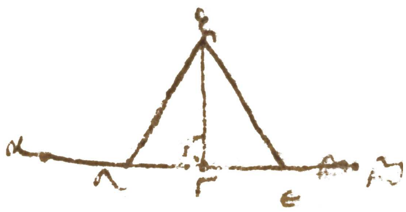
definiendum	angle droit
definiens	angle d'une droite élevée sur une autre égal à l'angle adjacent.

L'angle *droit* est défini au moyen des termes *angle*, *droite*, *élever*, *égal*, *adjacent*.

1.2 Invoquer la définition.

Cet exemple est particulier pour la raison suivante : c'est la première des six définitions du premier livre (sur 23) à être invoquée dans une démonstration des *Éléments*, tandis que les autres sont inertes du point de vue du raisonnement déductif et absentes de la suite du traité. La proposition 11 du premier livre, qui est un *problème* et non un théorème, c'est-à-dire qu'elle a « pour but de procurer, de rendre manifeste, de construire ce qui en un certain sens n'existe pas » (Proclus de Lycie, *Commentaire au premier livre des Éléments d'Euclide*, voir Caveing 1990, page 133), est la première à invoquer cette définition.

Voici ce problème avec la figure qui l'accompagne sur le folio 13 du manuscrit MS D'Orville 301 de l'an 888. Contrairement aux apparences, les lettres de la figure concordent bien avec les lettres de la démonstration : les points de la base de la figure sont, de gauche à droite, les points A, Δ, Γ, E et B, et le point au sommet est le point Z. On y distingue le symbole de l'angle droit, ⊿.

> 11. *Mener une ligne droite à angles droits avec une droite donnée, à partir d'un point donné sur celle-ci.*
>
> 
>
> Soit d'une part la droite donnée AB et d'autre part le point Γ donné sur elle.
>
> Il faut alors mener, à partir du point Γ, une ligne droite à angles droits avec la droite AB.
>
> Que soit pris au hasard le point Δ sur AΓ, et que soit placée ΓE égale à ΓΔ (Prop. 2). Que soit construit sur ΔE le triangle équilatéral ZΔE (Prop. 1), et que ZΓ soit jointe.
>
> Je dis que la droite ZΓ est menée à angles droits avec la droite donnée AB à partir du point Γ donné sur celle-ci.
>
> En effet puisque ΓΔ est égale à ΓE, que ΓZ est commune, alors les deux ΔΓ, ΓZ sont égales aux deux EΓ, ΓZ, chacune à chacune. Et la base ΔZ est égale à la base ZE (Df. 20). Donc l'angle sous ΔΓZ est égal à l'angle sous EΓZ (Prop. 8). Et ils sont adjacents.
>
> Quand une droite, ayant été élevée sur une droite, fait des angles adjacents égaux entre eux, chacun de ces angles égaux est droit (Df. 10). Donc chacun des angles sous ΔΓZ, ZΓE est droit.
>
> Donc la droite ΓZ a été menée à angles droits avec la droite donnée AB à partir du point Γ donné sur celle-ci. Ce qu'il fallait faire. (Euclide d'Alexandrie 1990, pages 217-218.)

La définition est invoquée de la manière suivante : la démonstration construit une droite sur la droite donnée, établit qu'elle fait les angles adjacents égaux, constate alors explicitement et mot pour mot le *definiens*, et conclut qu'on a bien le *definiendum*. C'est-à-dire que le *definiendum* abrège le *definiens* : dans ce sens, la définition est souvent qualifiée d'abréviation.

1.3 Établir la possibilité d'un concept.

Je conclus de la présence de cette proposition 11 que la définition 10 impose seulement le nom d'angle *droit* et qu'elle ne dit rien sur la possibilité ou l'impossibilité de ce nom ; c'est la proposition 11 qui établit cette possibilité.

Voici comment Blaise Pascal a exprimé en février 1648 le rôle spécifique de la définition vis-à-vis des propositions et postulats dans sa lettre à Jacques Le Pailleur.

> D'où il est évident qu'il n'y a point de liaison nécessaire entre la définition d'une chose et l'assurance de son être ; et que l'on peut aussi bien définir une chose impossible qu'une véritable. Ainsi l'on peut appeler un triangle rectiligne, ou rectangle, celui qu'on s'imaginerait avoir deux angles droits, et montrer ensuite qu'un tel triangle est impossible. Ainsi Euclide définit d'abord les parallèles, et montre après qu'il y en peut avoir ; et la définition du cercle précède le postulat qui en propose la possibilité. (Pascal 1970, page 563.)

En d'autres mots, la définition donne un nom à une chose, mais la possibilité ou l'impossibilité de la chose est indépendante de sa définition : elle doit être prouvée ou postulée.

2 La définition de nom.

2.1 Théorie.

On trouve dans l'opuscule *De l'esprit géométrique* de Blaise Pascal la théorie de la définition telle que je viens de la présenter, appelée *définition de nom.* Cet opuscule daterait de 1655 (voir Pascal 1991, pages 368-376).

> On ne reconnait en géométrie que les seules définitions que les logiciens appellent définitions de nom, c'est-à-dire que les seules impositions de nom aux choses qu'on a clairement désignées en termes parfaitement connus ; et je ne parle que de celles-là seulement.
>
> Leur utilité et leur usage est d'éclaircir et d'abréger le discours en exprimant, par le seul nom qu'on impose, ce qui ne se pourrait dire qu'en plusieurs termes ; en sorte néanmoins que le nom imposé demeure dénué de tout autre sens, s'il en a, pour n'avoir plus que celui auquel on le destine uniquement. En voici un exemple.
>
> Si l'on a besoin de distinguer dans les nombres ceux qui sont divisibles en deux également d'avec ceux qui ne le sont pas, pour éviter de répéter souvent cette condition, on lui donne un nom en cette sorte : j'appelle tout nombre divisible en deux également nombre pair.
>
> Voilà une définition géométrique, parce qu'après avoir clairement désigné une chose, savoir : tout nombre divisible en deux également, on lui donne un nom que l'on destitue de tout autre sens, s'il en a, pour lui donner celui de la chose désignée.
>
> D'où il parait que les définitions sont très libres, et qu'elles ne sont jamais sujettes à être contredites ; car il n'y a rien de plus permis que de donner à une chose qu'on a clairement désignée un nom tel qu'on voudra. (Pascal 1991, pages 393-394.)

La « géométrie » est ici une métonymie pour toutes les mathématiques. Voici l'exemple donné par Pascal :

definiendum	nombre pair
definiens	nombre divisible en deux également.

2.2 Définition de nom et définition de chose.

Pascal écrit qu'il ne parle que de définitions de nom parce que les philosophes scolastiques du Moyen Âge (comme Guillaume d'Ockham, Jean Buridan et Pierre d'Espagne) en considèrent une autre : la définition *de chose.* Cette théorie s'est élaborée sur la base des *Topiques* d'Aristote, dont voici deux citations, et de ses *Seconds Analytiques* (voir Gomez-Lobo 1981).

> Une définition est une formule qui exprime l'essentiel de l'essence d'un sujet. (Aristote 1967, I, 2, 101 b 38, page 6.)

> Une formule définitionnelle a pour composants un genre et des différences. (Aristote 1967, I, 5, 103 b 15-16, page 12.)

La formule dédoublée « l'essentiel de l'essence » proposée par le traducteur reprend le dédoublement du verbe être dans la formule d'Aristote τὸ τί ἦν εἶναι, qui se traduit littéralement par "le qu'est-ce que c'est qu'être" (un sujet) et est traduit traditionnellement par "la quiddité" (du sujet).

Le rapport entre la philosophie d'Aristote et les mathématiques d'Euclide est étudié plus en profondeur par Caveing (1990), Mueller (1991), Wolff (2000).

Les deux définitions que nous avons vues sont bien composées d'un genre et d'une différence.

	angle droit	*nombre pair*
genre	angle de deux droites	nombre
différence	égal à l'angle adjacent	divisible en deux également.

La citation de Paul Imbs au paragraphe 4.2 donne un exemple non mathématique de définition ainsi composée.

2.3 Dans la philosophie scolastique.

Voici comment Guillaume d'Ockham distingue dans la *Somme logique* de 1323 définition de chose (*quid rei*) et définition de nom (*quid nominis*). Les trois premiers paragraphes de cette citation proposent une classification très précise de la définition de chose, et le dernier est consacré à la définition de nom.

> La définition se comprend de deux façons. Elle peut exprimer ce qu'il en est de la chose ou ce qu'il en est du nom. La définition exprimant ce qu'il en est de la chose se comprend elle-même de deux façons. Au sens large, elle inclut la définition prise au sens strict et la définition descriptive. Au sens strict, c'est une formule abrégée exprimant toute la nature de la chose définie et ne manifestant rien qui lui soit extrinsèque.
>
> Cela peut se faire de deux façons. Parfois, dans un tel énoncé se trouvent des cas obliques exprimant des parties essentielles de la chose, comme lorsque je définis l'homme en disant : "l'homme est une substance composée d'un corps et d'une âme intellective" ; en effet, les noms qui sont à un cas oblique, "corps" et "âme intellective", expriment des parties de la chose. Cette définition peut être appelée définition naturelle.
>
> Autre est la définition dans laquelle ne se trouve aucun cas oblique, mais où le genre se trouve au nominatif, de même que la différence, et où les différences expriment les parties de la chose définie, à la manière dont "blanc" exprime la blancheur. Et pour cette raison, de même que "blanc", bien qu'il exprime la blancheur, ne suppose pas pour la blancheur mais seulement pour le sujet de cette blancheur, de même ces différences, bien qu'elles expriment les parties de la chose, ne supposent pas pour ces parties mais pour le tout qui en est composé. Telle est cette définition-ci de l'homme : "animal rationnel", ou celle-là : "substance animée, sensible, rationnelle". Car les différences "animée", "sensible" et "rationnelle" supposent pour l'homme, puisque l'homme est rationnel, animé et sensible ; pourtant ces termes renvoient à une partie de l'homme, tout comme les abstraits qui leur correspondent renvoient à une partie ou à des parties de l'homme, mais sur un mode différent. Cette définition peut être appelée définition métaphysique, puisque c'est ainsi que le métaphysicien définirait l'homme.
>
> ....
>
> La définition nominale, quant à elle, est une phrase manifestant explicitement ce à quoi renvoie un mot, comme lorsque quelqu'un, voulant apprendre à un autre

ce que signifie le nom “blanc”, dit que cela signifie la même chose que l’expression “quelque chose possédant la blancheur”. [...] (Guillaume d’Ockham 1988, pages 88-89 et 92.)

Dans ce dernier exemple, seule la blancheur est susceptible d’une définition de chose, parce que “blanc” se rapporte au sujet de la blancheur.

2.4 Dans la *Logique de Port-Royal.*

On retrouve dans *La logique, ou l’art de penser* (première édition en 1662) d’Antoine Arnauld et Pierre Nicole l’opposition de la définition de nom à la définition de chose.

> Le meilleur moyen pour éviter la confusion des mots qui se rencontrent dans les langues ordinaires, est de faire une nouvelle langue, et de nouveaux mots qui ne soient attachés qu’aux idées que nous voulons qu’ils représentent. [...]
>
> C’est ce qu’on appelle la définition du nom, *definitio nominis*, dont les géomètres se servent si utilement, laquelle il faut bien distinguer de la définition de la chose, *definitio rei.*
>
> Car dans la définition de la chose, comme peut-être celle-ci : *l’homme est un animal raisonnable* : *le temps est la mesure du mouvement*, on laisse au terme qu’on définit comme *homme* ou *temps* son idée ordinaire, dans laquelle on prétend que sont contenues d’autres idées, comme *animal raisonnable*, ou *mesure du mouvement* ; au lieu que dans la définition du nom, comme nous avons déjà dit, on ne regarde que le son, et ensuite on détermine ce son à être signe d’une idée que l’on désigne par d’autres mots. (Arnauld et Nicole 2011, I, XI, pages 232-233.)

En d’autres mots, une définition de chose n’est pas une définition au sens que lui donne le discours mathématique contemporain : c’est une proposition qui semble seulement définir un terme en énonçant qu’il satisfait une certaine propriété, alors qu’il signifie déjà son « idée ordinaire ».

Arnauld et Nicole donnent un contre-exemple dans la suite.

> Et de là il s’ensuit, 1. Que les définitions de noms sont arbitraires, et que celles des choses ne le sont point. Car chaque son étant indifférent de soi-même et par sa nature à signifier toutes sortes d’idées, il m’est permis pour mon usage particulier, et pourvu que j’en avertisse les autres, de déterminer un son à signifier précisément une certaine chose, sans mélange d’aucune autre. Mais il en est tout autrement de la définition des choses. Car il ne dépend point de la volonté des hommes que les idées comprennent ce qu’ils voudraient qu’elles comprissent ; de sorte que si en les voulant définir nous attribuons à ces idées quelque chose qu’elles ne contiennent pas, nous tombons nécessairement dans l’erreur.
>
> Ainsi pour donner un exemple de l’un et de l’autre, si dépouillant le mot *parallélogramme* de toute signification je l’applique à signifier un triangle, cela m’est permis, et je ne commets en cela aucune erreur, pourvu que je ne le prenne qu’en cette sorte ; et je pourrai dire alors qu’un parallélogramme a trois angles égaux à deux droits ; mais si laissant à ce mot sa signification et son idée ordinaire, qui est de signifier une figure dont les côtés sont parallèles, je venais à dire que le parallélogramme est une figure à trois lignes, parce que ce serait alors une définition de chose, elle serait très fausse, étant impossible qu’une figure à trois lignes ait ses côtés parallèles. (Arnauld et Nicole 2011, I, XI, pages 234-235.)

Pour donner un exemple et non un contre-exemple, je propose de considérer que la proposition 11 est, prise dans sa totalité, avec sa démonstration, une définition de chose de l’angle droit au sens qu’elle assure l’existence d’une droite perpendiculaire à une droite donnée et menée à partir d’un point donné de cette droite. Mais Arnauld et

Nicole ne proposent pas de tel exemple. Pascal, dont on a vu au paragraphe 1.3 qu'il est parfaitement conscient du rôle essentiel de telles propositions, choisit ses exemples en dehors des mathématiques et se borne à faire la mise en garde suivante.

> Combien y en a-t-il de même qui croient avoir défini le mouvement quand ils ont dit : *Motus nec simpliciter actus nec mera potentia est, sed actus entis in potentia* [*Le mouvement n'est ni simplement acte, ni pure puissance ; mais l'acte de ce qui est en puissance*, version latine de la définition donnée par Aristote, ἡ τοῦ δυνάμει ὄντος ἐντελέχεια, ᾗ τοιοῦτον, κίνησίς ἐστιν (*Physique* III, 1, 201 a 10-11)] ! Et cependant, s'ils laissent au mot de mouvement son sens ordinaire, comme ils font, ce n'est pas une définition, mais une proposition. Et ainsi, confondant les définitions qu'ils appellent définitions de nom, qui sont les véritables définitions libres, permises et géométriques, avec celles qu'ils appellent définitions de chose, qui sont proprement des propositions nullement libres, mais sujettes à contradiction, ils s'y donnent la liberté d'en former aussi bien que des autres ; et chacun définissant les mêmes choses à sa manière, par une liberté qui est aussi défendue dans ces sortes de définitions que permise dans les premières, ils embrouillent toutes choses et, perdant tout ordre et toute lumière, ils se perdent eux-mêmes et s'égarent dans des embarras inexplicables. (Pascal 1991, pages 399-400.)

Je vais donc ne plus parler de définition de chose qu'avec précaution, la prochaine fois au paragraphe 6.3.

Je dois concéder ici que de nombreux mathématiciens et philosophes attribuent à la définition un rôle créateur de la chose définie : voir le paragraphe 8.2. Cela explique pourquoi Proclus appelle les définitions les « hypothèses » d'une science (voir Caveing 1990, pages 122-123).

Richard Robinson (1950) propose une analyse de la place de la définition de chose dans la pratique mathématique.

3 Définir les termes qui définissent l'angle droit.

Pascal écrit encore dans *De l'esprit géométrique* qu'« une méthode encore plus éminente et plus accomplie, mais où les hommes ne sauraient jamais arriver [...] consisterait [...] à définir tous les termes ». Regardons donc l'exemple que nous avons choisi et étudions comment Euclide définit les termes *droite*, *élever*, *angle*, *adjacent*, *égal* au moyen desquels la définition 10 est formulée. Ils font l'objet d'un traitement très varié.

3.1 Définir *adjacent* et *élever*.

La construction *élever* est considérée comme parfaitement connue et ne fait pas l'objet d'une définition ou explication (voir Caveing 1990, note 320, page 131).

Il en est de même du prédicat *adjacent* ; en voici une définition par Leibniz (1677).

> Des *angles* sont deux à deux *consécutifs* lorsqu'ils se situent de part et d'autre d'une unique droite et d'un seul côté d'une autre droite située dans le même plan. (Leibniz 1995, fragment II, page 65.)

Euclide pourvoit parfois des définitions de relations de situation comme la suivante, issue du troisième livre.

> 9. Quand les droites contenant l'angle découpent une certaine circonférence, l'angle est dit *s'appuyer sur celle-ci*. (Euclide d'Alexandrie 1990, page 388.)

3.2 Définir *égal*.

L'usage du prédicat *égal* est décrit par la section des « Notions communes » du premier livre des *Éléments*, c'est-à-dire par une liste d'axiomes :

> 1. Les choses égales à une même chose sont égales entre elles.
> 2. Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux.
>
> ....
>
> 7. Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles.
> 8. Et le tout est plus grand que la partie. (Euclide d'Alexandrie 1990, pages 178-179.)

C'est-à-dire qu'Euclide énonce les règles qui permettent d'établir l'égalité et l'inégalité de deux choses ; il invoque ces axiomes très souvent, plus de soixante fois dans le premier livre (voir cependant Mueller 1981, pages 32-40). Ces règles ne peuvent pas être interprétées comme une définition de nom, mais j'y vois la première occurrence d'une « définition implicite » (l'expression remonte à Gergonne 1818, page 23).

En voici deux autres exemples dans les *Éléments*.

— Dans le cinquième livre, Euclide propose ainsi une définition implicite du rapport.

> 4. Des grandeurs sont dites *avoir un rapport l'une relativement à l'autre* quand elles sont capables, étant multipliées, de se dépasser l'une l'autre.
> 5. Des grandeurs sont dites *être dans le même rapport*, une première relativement à une deuxième et une troisième relativement à une quatrième quand des équimultiples de la première et de la troisième ou simultanément dépassent, ou sont simultanément égaux ou simultanément inférieurs à des équimultiples de la deuxième et de la quatrième, selon n'importe quelle multiplication, chacun à chacun, [et] pris de manière correspondante. (Euclide d'Alexandrie 1994, pages 38 et 41.)

— Dans le onzième livre, il procède ainsi pour l'angle *dièdre*.

> 6. L'*inclinaison d'un plan relativement à un plan* est l'angle aigu contenu par les [droites] menées à angles droits avec la section commune, au même point, dans chacun des plans.
> 7. Un plan, relativement à un plan, est dit *être incliné de la même manière* qu'un autre, relativement à un autre, quand lesdits angles des inclinaisons sont égaux l'un à l'autre. (Euclide d'Alexandrie 2001, pages 77-78.)

La définition implicite aura une place importante en axiomatique formelle et j'en parlerai plus longuement dans la section 8.

3.3 Définir *angle*.

L'angle et l'angle rectiligne sont l'objet des définitions 8 et 9.

> 8. Un *angle plan* est l'inclinaison, l'une sur l'autre, dans un plan, de deux lignes qui se touchent l'une l'autre et ne sont pas placées en ligne droite.
> 9. Et quand les lignes contenant l'angle sont droites, l'angle est appelé *rectiligne*. (Euclide d'Alexandrie 1990, page 158.)

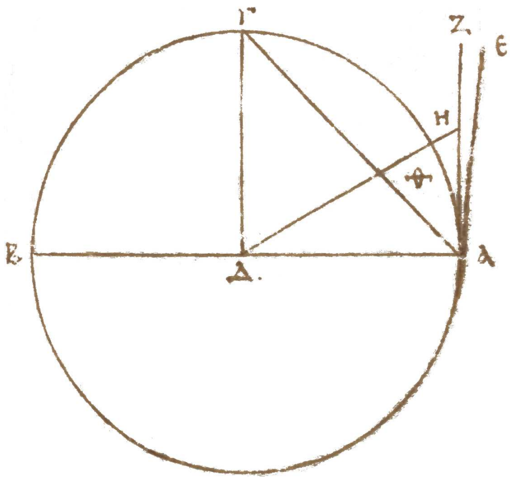
À première vue, nous pourrions interpréter la définition 8 comme une définition de nom, mais elle repose d'une manière essentielle sur un terme, « inclinaison », qui ne fait l'objet d'aucune explication et ne nous semble pas plus connu que le terme à définir. Néanmoins, cette définition précise les conditions sous lesquelles on parlera d'angle :

— il s'agit d'un rapport qu'entretiennent deux lignes ;

— elles doivent être planes, se rencontrer (mais pas nécessairement en un point qui limite ces lignes) ;

— l'une n'est pas une ligne droite que l'autre prolonge en ligne droite.

3.3.1 L'angle du demi-cercle.



En fait, la définition 8 autorise Euclide à considérer des angles non rectilignes dans la proposition 16 du troisième livre : « l'angle du demi-cercle, celui contenu par la droite BA et la circonférence ΓΘA » ainsi que « l'angle restant contenu par la circonférence ΓΘA et la droite AE », qui est « la droite menée à angles droits avec le diamètre du cercle », c'est-à-dire la demi-tangente au cercle en A (l'angle droit sous ΔAE de la figure ci-contre, extraite du folio 53 du manuscrit MS D'Orville 301 a l'air obtus ; les lettres de la figure concordent bien avec les lettres du texte).

Cette proposition 16 montre que l'inclinaison de deux lignes se constate au voisinage du sommet de l'angle : sa démonstration considère un angle aigu sous ΔAZ et la projection orthogonale H du centre du cercle Δ sur AZ (l'angle droit sous ΔHZ de la figure a l'air encore plus obtus) et établit qu'il est absurde que H soit à l'extérieur du cercle. Or l'angle sous ΔAZ est l'angle sous ΔAH et il est donc plus petit que l'angle du demi-cercle. Dans le langage de la géométrie du 20e siècle, je dirais que l'angle contenu par deux lignes issues d'un point est le *germe* de segments arbitrairement petits de ces deux lignes limités par ce point.

Le fait que le point H puisse se retrouver arbitrairement proche du sommet A a pu inspirer la critique suivante de Sextus Empiricus dans *Contre les géomètres* au 2e siècle.

> [. . .] ceux qui le décrivent, lorsqu'ils disent que « l'angle est la partie minimale sous l'inclinaison de deux droites non juxtaposées », soit définissent la partie minimale comme un corps sans partie, soit comme ce qu'ils appellent signe, c'est-à-dire le point. [. . .] de l'angle ils disent qu'il est soit plus grand soit plus petit ; mais rien n'est plus menu qu'un corps minimal, puisque c'est ce plus menu-ci et non ce moins menu-là qui sera minimal. Il reste donc à dire que ⟨l'angle⟩ est pour eux le point ; ce qui ouvre la voie là encore à des apories. (Giovacchini 2010, page 147.)

Si je reprends l'interprétation d'un angle comme germe, aucuns des deux segments qui le constituent ne sont les plus petits, à moins de considérer le point lui-même comme deux segments, ce qui est absurde.

Pourtant Proclus rapporte ainsi la définition de l'angle par Apollonius : « l'angle est la contraction [συναγωγή], en un point, d'une surface par une ligne brisée » (voir Caveing 1990, note 47, page 159). Jacques Peletier écrit dans *Les six premiers livres des Éléments géométriques d'Euclide* (1557, page 11 de la traduction française de Jean II de Tournes de 1611, voir Barbin 1994, Loget 2002) que « l'angle consiste en un point, mais c'est l'inclination qui le fait plus grand ou plus petit » : « le point de la section est pressé et comme rendu plus étroit, par la mesure de l'inclination ».

3.3.2 Peut-on invoquer cette définition ?

Cependant, Arnauld et Nicole montrent dans *La logique, ou l'Art de penser* que le terme *angle* n'est pas utilisé selon sa définition dans le premier livre en appliquant « un remède très sûr et très infaillible » de Pascal : « substituer mentalement la définition à la place du défini » (Pascal 1991, page 394).

> Euclide définit l'angle plan rectiligne, *la rencontre de deux lignes droites inclinées sur un même plan.* Si on considère cette définition comme une simple définition de mot, en sorte qu'on regarde le mot d'*angle* comme ayant été dépouillé de toute signification, pour n'avoir plus que celle de la rencontre de deux lignes, on n'y doit point trouver à redire. Car il a été permis à Euclide d'appeler du mot d'*angle* la rencontre des deux lignes. Mais il a été obligé de s'en souvenir, et de ne prendre plus le mot d'*angle* qu'en ce sens. Or pour juger s'il l'a fait, il ne faut que substituer toutes les fois qu'il parle de l'*angle*, au mot d'*angle* la définition qu'il a donnée, et si en substituant cette définition il se trouve quelque absurdité en ce qu'il dit de l'angle, il s'ensuivra qu'il n'est pas demeuré dans la même idée qu'il avait désignée ; mais qu'il est passé insensiblement à une autre, qui est celle de la nature. Il enseigne, par exemple, à diviser un angle en deux. Substituez sa définition. Qui ne voit que ce n'est point la rencontre de deux lignes qu'on divise en deux, que ce n'est point la rencontre de deux lignes qui a des côtés, et qui a une base ou soutendante ; mais que tout cela convient à l'espace compris entre les lignes, et non à la rencontre des lignes. (Arnauld et Nicole 2011, IV, IV, pages 538-539.)

En réalité, Euclide n'invoque jamais la définition 8. En particulier, la question de la possibilité de l'angle ne se pose pas. Les *Commentaires* de Proclus rendent compte de la question embarrassante à quelle catégorie appartient l'angle : est-ce une relation, une qualité ou une quantité ? Sa conclusion est que l'angle est tout cela à la fois.

Je reviens sur la difficulté de définir l'angle au paragraphe 5.2.

3.4 Définir *droite.*

La ligne droite est l'objet de la définition 4.

> 4. Une *ligne droite* est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle. (Euclide d'Alexandrie 1990, page 154.)

Cette définition aussi repose aussi de manière essentielle sur une formule, « placé de manière égale par rapport à », qui ne fait l'objet d'aucune explication et ne me semble pas plus connue que le terme à définir. En fait, même la forme logique de cette formule est ambigüe : est-ce un rapport de la droite à chacun de ses points comme je le pense, ou est-ce un rapport de la droite à ses extrémités comme le soutiennent Michel Federspiel (1991) et Enrico Giusti (2000) ? Nous allons revenir sur cette définition dans la section 6.

Euclide n'invoque non plus jamais la définition 4, mais la possibilité des droites est postulée dans la section des « Demandes ».

> 1. Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point.
> 2. Et de prolonger continument en ligne droite une ligne droite limitée. (Euclide d'Alexandrie 1990, pages 167-168.)

L'usage moderne du terme de droite en fait un objet infini en extension, alors qu'Euclide ne considère que des segments de droite qu'il prolonge au besoin. L'adverbe « continument » fait ici sa seule apparition dans les *Éléments* : il exprime que la droite que l'on prolonge "tient ensemble" avec le prolongement, de sorte que la limite au-delà de laquelle la droite a été prolongée devient un point quelconque de la droite prolongée.

3.5 Le contexte de la définition de l'angle droit.

En étudiant les termes au moyen desquels l'angle droit est défini, nous avons découvert au fur et à mesure le contexte de sa définition, dans lequel je distingue une composante épistémologique et une composante mathématique.

Voici comment David Hilbert et Paul Bernays rendent compte du contexte épistémologique de la géométrie euclidienne dans leurs *Fondements des mathématiques* (1934).

> [. . .] l'axiomatique matérielle (inhaltlich) introduit ses concepts fondamentaux en référence à des évènements connus, et [. . .] ses principes fondamentaux sont, soit présentés comme des faits évidents qu'on peut discerner clairement, soit formulés comme un extrait d'un complexe empirique, donnant par là l'occasion d'exprimer la croyance qu'on est arrivé sur la trace de lois de la nature, tout en ouvrant la perspective d'appuyer cette croyance sur le succès de la théorie. (Hilbert et Bernays 2001, page 56.)

Le contexte mathématique est d'abord celui d'une géométrie où l'égalité se constate uniquement par superposition et dont les fondements se passent du nombre. Puis c'est celui d'un agencement où les angles sont définis immédiatement après la ligne droite et avant le cercle. Je n'imagine pas d'autre définition de l'angle droit dans ce contexte !

Notons que l'angle droit fournit un étalon d'inclinaison, alors qu'un étalon de longueur ne peut être posé qu'arbitrairement. C'est peut-être une des motivations de la demande 4.

> 4. Et que tous les angles droits soient égaux entre eux. (Euclide d'Alexandrie 1990, page 173.)

Nous avons pu observer que c'est la description du contexte qui fournit les clés de la définition. Celle-ci est claire dans la mesure où son contexte l'est.

4 La définition de mot.

Le fait que les définitions 4 et 8 ne sont jamais invoquées pose la question de leur sens : à quoi bon les formuler si elles ne servent pas en tant que telles ? En fait, je constate que ce ne sont pas des définitions mathématiques au sens que leur donne le discours mathématique contemporain. Mais selon quelle acception du terme sont-elles alors des définitions, et de quelle nature est leur pertinence ?

Notons déjà que les définitions 4 et 9 répondent aux exigences d'Aristote dans la mesure où elles sont composées d'un genre et d'une différence, alors que la définition 8 introduit un genre premier.

	droite	*angle rectiligne*
genre	ligne	angle
différence	placée de manière égale par rapport aux points sur elle	contenu par deux droites.

4.1 Définir *définition.*

Rappelons avec Bernard Vitrac ce que signifie « définition », le premier mot des *Éléments* d'Euclide :

> ὅρος désigne les bornes de pierre, les limites de propriété, les bornes hypothécaires, les frontières. Par analogie, le mot a pris le sens de « détermination » et de « définition ». C'est le nom des énoncés liminaires que nous sommes en train de commenter. (Euclide d'Alexandrie 1990, note 57, page 161.)

"Définir" a donc en grec le sens étymologique de délimiter, d'exprimer où commence et où s'arrête un terrain (sens propre) ou l'extension d'une notion (sens figuré). Le verbe a été repris en latin dans ces deux sens (cf. le *Gaffiot*), et on les retrouve dans l'*Oxford*

English dictionary et dans le *Dictionnaire du moyen français (1330-1500)* ainsi que dans le *Trésor de la langue française*, mais le sens propre s'est peu à peu effacé au profit du sens figuré dans le français contemporain.

L'histoire de ce mot est en tous points parallèle à celui du mot "terme", dont voici le sens propre.

> **TERME.** n. m. Borne marquant une limite et faite d'un buste terminé en gaine, en souvenir du dieu Terme qui, chez les Romains, marquait et protégeait les limites des terres. *Planter des termes.* [...] (Académie française 1935, page 650.)

4.2 Théorie.

Les définitions 4 et 8 des termes de droite et d'angle ont disparu des manuels de géométrie et sont aujourd'hui reléguées dans les dictionnaires. Arnauld et Nicole font de telles définitions l'objet de l'avertissement suivant au chapitre XI du premier livre de leur *Logique* (de 1664).

> Il faut aussi prendre garde de ne pas confondre la définition de nom dont nous parlons ici, avec celle dont parlent quelques philosophes, qui entendent par là l'explication de ce qu'un mot signifie selon l'usage ordinaire d'une langue, ou selon son étymologie. (Arnauld et Nicole 2011, I, XI, page 233.)

Puis ils leur consacrent le dernier chapitre du premier livre.

> CHAPITRE XIII. D'une autre sorte de définitions de noms, par lesquels on marque ce qu'ils signifient dans l'usage.
>
> Tout ce que nous avons dit des définitions de noms ne se doit entendre que de celles où l'on définit les mots dont on se sert en particulier : et c'est ce qui les rend libres et arbitraires, parce qu'il est permis à chacun de se servir de tel son qu'il lui plait pour exprimer ses idées, pourvu qu'il en avertisse. Mais comme les hommes ne sont maitres que de leur langage, et non pas de celui des autres, chacun a bien droit de faire un dictionnaire pour soi ; mais on n'a pas droit d'en faire pour les autres, ni d'expliquer leurs paroles par les significations particulières qu'on aura attachées aux mots. C'est pourquoi quand on n'a pas dessein de faire connaitre simplement en quel sens on prend un mot, mais qu'on prétend expliquer celui auquel il est communément pris, les définitions qu'on en donne ne sont nullement arbitraires ; mais elles sont liées et astreintes à représenter non la vérité des choses, mais la vérité de l'usage, et on les doit estimer fausses, si elles n'expriment pas véritablement cet usage, c'est-à-dire si elles ne joignent pas aux sons les mêmes idées qui y sont jointes par l'usage ordinaire de ceux qui s'en servent. Et c'est ce qui fait voir aussi que ces définitions ne sont nullement exemptes d'être contestées, puisque l'on dispute tous les jours de la signification que l'usage donne aux termes.
>
> Or quoique ces sortes de définitions de mots semblent être le partage des grammairiens, puisque ce sont celles qui composent les dictionnaires, qui ne sont autre chose que l'explication des idées que les hommes sont convenus de lier à certains sons, néanmoins l'on peut faire sur ce sujet plusieurs réflexions très importantes pour l'exactitude de nos jugements.
>
> La première, qui sert de fondement aux autres, est que les hommes ne considèrent pas souvent toute la signification des mots, c'est-à-dire que les mots signifient souvent plus qu'il ne semble, et que lorsqu'on en veut expliquer la signification, on ne représente pas toute l'impression qu'ils font dans l'esprit. (Arnauld et Nicole 2011, I, XIII, pages 245-247.)

On trouve chez Sylvain Auroux (1993) une étude des trois types de définition dans la *Logique de Port-Royal*.

Les définitions de mot ont en commun avec les définitions de chose qu'elles ne sont pas arbitraires. Elles diffèrent par leur validité et leur mode de vérification : les premières rendent compte de l'usage alors que les deuxièmes recherchent le vrai, de sorte que les premières sont appuyées par des exemples et des citations, alors que les deuxièmes appellent à une justification. Voici comment Paul Imbs (1971) décrit cette différence dans la préface du *Trésor de la langue française*.

> C'est pourquoi la définition lexicographique peut sans difficulté assumer la conception aristotélicienne de la définition, conçue comme un énoncé indiquant d'abord le genre prochain (*banc* a pour genre prochain « siège avec ou sans dossier ou bras, assez large pour servir à plusieurs personnes », genre prochain qu'il partage par exemple avec *canapé*), puis la différence spécifique (par rapport à *canapé*, *banc* a pour différence spécifique d'être moins profond et plus dur et de ne pas figurer dans le mobilier de salon). Par le genre prochain la définition insiste sur la substance sémique en orientant le mot vers l'objet trans- et extralinguistique (le *référé*, ou, selon la terminologie habituelle, le *référent*) qu'elle *montre* (c'est la fonction désignative ou déictique de la définition) ; par la différence spécifique elle délimite le mot par rapport à ses voisins et lui sert en quelque sorte de guide et de garde-fou dans son cheminement vers le référé. Toutes les définitions lexicographiques n'ont cependant pas cette forme classique : elles peuvent remplacer l'indication du genre prochain par celle du genre éloigné (« action de. . . ») ou par celle de l'ensemble (cf. supra [les classificateurs collectifs]) qui groupe en un singulier une pluralité d'entités identiques ; ou encore par celle d'une similitude (« espèce de. . ., sorte de. . . ») ou d'une privation (« absence de. . ., cessation de. . . »), c'est-à-dire par des déterminations sémantiques du premier mot de la définition, souvent réduite dans ce cas à un synonyme.
>
> Mais à la différence de la définition aristotélicienne qui cherchait à dire le vrai, c'est-à-dire ce qui existe réellement en dehors et indépendamment de nos représentations de la réalité, la définition lexicographique ne vise qu'à appréhender celles-ci sans avoir à se préoccuper de leur vérité. Elle n'a donc pas à connaitre la différence entre définitions de choses (c'est-à-dire de réalités non créées par notre esprit) et définitions de mots (comme par exemple celles qu'appellent les concepts mathématiques, œuvres conventionnelles de notre esprit sans relations substantielles avec le réel). En revanche, du fait qu'elles ne visent pas à saisir la réalité, mais des vues sur la réalité ou des créations imaginaires, les définitions linguistiques sont toujours sujettes à variation, liées qu'elles sont à la situation contingente des sujets parlants qui ont élaboré ces vues ou ces créations imaginaires : celles-ci sont fragiles comme tout ce qui est historique et culturel, et comme la langue elle-même, création et recréation continue d'un donné malléable parce que maniable dans et pour des situations seulement historiques et naturellement non éternelles. Elle n'a pas davantage à s'inquiéter outre mesure de la distinction entre ce qui est linguistique et ce qui est encyclopédique, les informations encyclopédiques allant par nature au-delà des *traits déictiques et différenciateurs* que relève l'analyse componentielle et qui, comme on l'a rappelé plus haut, constituent l'essence même de la définition en tant qu'elle a un contenu : celui-ci n'est que le contenu *utile* pour le fonctionnement correct du langage, et non pas le contenu nécessaire pour la connaissance *exhaustive* du référé. Elle reflète le statut même de la langue, qui dans sa structure interne n'est ni *physis [nature]* ni *thesis [théorie]*, mais *poiesis [création]*. (Imbs 1971, page XXXVIII.)

La théorie lexicographique de la définition est décrite plus en détail par Bernard Quemada (1967).

5 Définition du mot *angle* dans les dictionnaires.

Nous allons consulter la 1re, 8e et 9e édition du *Dictionnaire* de l'Académie française, datant respectivement de 1694, de 1932 et de 1992. Ce dictionnaire

> ne cite point, parce que plusieurs de nos plus célèbres Orateurs et de nos plus grands Poètes y ont travaillé, et qu'on a cru s'en devoir tenir à leurs sentiments. [...]
>
> [L'Académie] a donné la Définition de tous les mots communs de la Langue dont les Idées sont fort simples ; et cela est beaucoup plus malaisé que de définir les mots des Arts et des Sciences dont les Idées sont fort composées ; Car il est bien plus aisé, par exemple, de définir le mot de *Télescope*, qui est *une Lunette à voir de loin*, que de définir le mot de *voir* ; Et l'on éprouve même en définissant ces termes des Arts et des Sciences, que la Définition est toujours plus claire que la chose définie ; au lieu qu'en définissant les termes communs, la chose définie est toujours plus claire que la Définition. Ainsi quoique Aristote ait fait une définition excellente quand il a défini l'homme *Animal Raisonnable*, il est constant néanmoins que le mot *Homme* nous représente mieux ce qu'il signifie que cette définition. (Académie françoise 1694, préface.)

Ce dictionnaire pourvoit donc des exemples fabriqués par les Académiciens. Ils s'expriment sur leur utilité dans la 7e édition.

> C'est par des exemples nombreux et bien choisis que l'Académie, depuis qu'elle s'occupe du dictionnaire, s'est efforcée de remédier à cette nécessaire insuffisance des définitions. Les exemples, en plaçant successivement un mot sous tous ses jours, corrigent et rectifient ce que la définition a d'incertain et de trop vague dans ses termes généraux, et conduisent, en quelque sorte, naturellement l'esprit d'un sens au sens voisin par une gradation insensible. À un coup d'œil superficiel, on serait tenté de croire peut-être que l'Académie multiplie trop les exemples, tant ils semblent quelquefois différer peu les uns des autres ; un examen plus attentif fait revenir vite de cette erreur. Les exemples sont la vraie richesse et la partie la plus utile du dictionnaire. C'est là qu'avec un peu de patience le lecteur est toujours sûr de trouver ce qu'il cherche, soit qu'il ait des doutes sur la justesse et la propriété d'un terme, soit que le sens même d'une expression lui échappe. (Académie française 1878, page VII.)

Les préfaces des neuf éditions du *Dictionnaire* ont été rééditées avec un commentaire par Bernard Quemada (1997).

Voici les définitions successives du mot *angle*.

> ANGLE. s. m. Inclination de deux lignes qui aboutissent à un même point. *Angle droit. angle aigu. angle obtus. angle de tant de degrés. cette muraille fait un grand angle. angle saillant. angle rentrant. l'angle du centre. l'angle de la circonférence. une figure à plusieurs angles.* (Académie françoise 1694, page 40.)

> **ANGLE.** n. m. T. de Géométrie. Ouverture de deux lignes qui se rencontrent en un point, degré d'inclinaison qu'elles ont l'une à l'égard de l'autre. *Angle droit. Angle aigu. Angle obtus. Angle de quarante-cinq degrés. Angle de cent degrés. Angle saillant. Angle rentrant. Angle rectiligne, curviligne. Une figure à plusieurs angles. Angle optique. Angle visuel. Angle de réflexion, de réfraction. Angle d'incidence. Sommet, côtés d'un angle.* [...] (Académie française 1932, page 57.)

> **ANGLE** n. m. XIIe siècle. Du latin *angulus*, « angle, coin ».
>
> **1.** GÉOM. Figure formée par deux demi-droites, deux courbes planes ou deux demi-plans qui se coupent. *Le sommet, les côtés d'un angle. Le grade, le degré, la minute, la seconde sont des unités d'angle. Dans le Système international, l'ouverture d'un angle plan se mesure en radians. Angle droit,* dont les côtés sont perpendiculaires entre eux. *Angle aigu,* plus petit que l'angle droit. *Angle obtus,* plus grand que l'angle droit. *Angles complémentaires,* dont la somme vaut un angle droit. *Angles supplémentaires,* dont la somme vaut deux angles droits. *Angles adjacents,* ayant même sommet et un côté commun. *Angle dièdre,* formé de deux demi-plans qui se coupent, limités à leur intersection. *Angle solide,* portion d'espace intérieure à un

cône. *L'unité d'angle solide est le stéradian. Angle horaire d'un astre,* une des coordonnées qui caractérisent, à un instant donné, la position de l'astre par rapport au méridien du lieu. [...] (Académie française 1992, page 89.)

Cette dernière entrée renvoie successivement aux entrées suivantes pour la définition de l'angle droit.

PERPENDICULAIRE adj. XIV^{e} siècle, *perpendiculer* ; XV^{e} siècle, *perpendiculaire.* Emprunté du latin *perpendicularis*, de même sens, lui-même tiré de *perpendiculum*, « fil à plomb ».

1. GÉOM. Se dit de droites ou de plans qui forment entre eux un angle de 90°. (Académie française 2011, page 327.)

DEGRÉ n. m. XI^{e} siècle, au sens de « marche d'escalier ». Probablement composé latin tardif de la préposition *de*, marquant un mouvement de haut en bas, et *gradus*, « pas, marche (d'un escalier), hiérarchie, rang », de *gradi*, « marcher, s'avancer ».

....

IV. Unité de mesures scientifiques. **1.** Chacune des divisions égales d'une circonférence ; unité de mesure des angles formés par les rayons d'un cercle (abréviation °). GÉOM. *Le degré centésimal* ou *grade est la quatre-centième partie de la circonférence ; le degré sexagésimal,* ou simplement *degré, en est la trois-cent-soixantième partie. 360° = 400 grades ou 2 π radians. Le quart de cercle comprend quatre-vingt-dix degrés.* [...] (Académie française 1992, page 622.)

Antoine Arnauld définit lui aussi dans ses *Nouveaux éléments de géométrie* (1667) que « toute circonférence se conçoit divisée en 360 parties égales qui s'appellent *degrés* » (livre cinquième, XX) et que les angles rectilignes se mesurent par « la partie proportionnelle d'une circonférence dont le centre est au point où ces lignes se joignent » (livre huitième, II), mais les droites perpendiculaires sont définies séparément (voir Arnauld 2009, pages 363, 454 et 366-367). Le *Dictionnaire* ne précise pas le rapport entre angle et circonférence de cercle ; quant au « quart de cercle », il renvoie à une application du problème suivant, traité dans le troisième livre des *Éléments* d'Euclide.

30. Couper une circonférence donnée en deux parties égales.

Cependant, la démonstration de ce problème repose de manière essentielle sur le problème 11 du premier livre, que nous avons vu dans le paragraphe 1.2 !

5.1 Définition de mot ?

La 1re et la 8^{e} édition s'inspirent de la définition 8 d'Euclide et en font une définition de mot. La comparaison des deux éditions montre que comme Arnauld et Nicole, les Académiciens avaient pour souci de voir dans l'angle une quantité et non pas une qualité : voir le paragraphe 3.3.2.

5.2 Définition de nom ?

La 9^{e} édition rompt avec la tradition euclidienne : j'interprète la définition qu'elle donne comme une définition de nom et je l'analyse comme suit :

definiendum	angle
definiens	figure formée par deux demi-droites, deux courbes planes ou deux demi-plans qui se coupent.

Consultons la définition du mot *figure* dans la même édition :

FIGURE n. f. IX^e siècle. Emprunté du latin *figura*, « forme, aspect, représentation sculptée, mode d'expression, manière d'être », dérivé de *fingere*, « façonner ».

....

III. Combinaison d'éléments divers dessinant une forme, s'organisant en un motif. **1.** Représentation graphique de lignes, de surfaces, de volumes. *Le cercle, le trapèze sont des figures géométriques. Tracer la figure d'un cône.* (Académie française 2000, page 129.)

C'est précisément en ce sens que j'ai utilisé ce mot aux paragraphes 1.2 et 3.3.1 ; les Grecs utilisent le mot διάγραμμα pour ce sens.

Mais Arnaud et Nicole ne donnaient certainement pas ce sens au mot *figure* dans l'extrait cité au paragraphe 2.4 : je constate qu'il est incohérent avec l'usage du mot dans la définition d'*angle*. En effet, un terme géométrique ne peut être identifié à ses représentations graphiques.

Essayons d'appliquer la définition euclidienne du mot *figure*, qui correspond au mot grec σχῆμα.

13. Une *frontière* est ce qui est limite de quelque chose.
14. Une *figure* est ce qui est contenu par quelque ou quelques frontière(s). (Euclide d'Alexandrie 1990, page 161.)

Je constate que la « figure formée par deux demi-droites » est illimitée et que la définition d'*angle* de la 9^e édition ne pourrait donc pas être insérée après la définition 14 des *Éléments*. J'objecte aussi que la notion d'angle est censée être plus élémentaire que celle de figure.

Elle ne permet pas non plus d'exprimer la proposition 16 du troisième livre puisque si on considère l'angle rectiligne aigu sous ΔAZ et l'angle du demi-cercle comme des figures, elles ne satisfont plus aucune relation de la partie au tout.

D'aucuns considèrent les « deux demi-droites » comme la figure elle-même et non comme une frontière. Mais alors cette définition ne permet plus une lecture quantitative, contrairement à la définition euclidienne (un angle est d'autant plus petit que deux lignes sont plus inclinées l'une vers l'autre), et oblige à définir séparément une relation d'ordre : voir le paragraphe 3.3.2.

6 Définition du mot *droite* dans les dictionnaires.

Voici à présent la définition du mot *droite* dans la 1^re, 8^e et 9^e édition du *Dictionnaire* de l'Académie française.

DROIT, OITE. adj. Qui n'est pas courbé, qui ne penche ni de côté ni d'autre. *Ligne droite. droit comme un jonc. de droit fil. en droite ligne. il vient en droite ligne d'un tel. tenir la tête droite. petit garçon, tenez-vous droit.*

On dit, *Le droit chemin. le plus droit chemin*, pour dire, Le plus court.

On dit, qu'*Un homme est droit comme un cierge, comme un jonc*, pour dire, qu'Il se tient fort droit.

Il sign. quelquefois, Qui n'est pas couché, qui est debout. *Se tenir droit sur ses pieds. demeurer droit en son séant. cette statue paraitra bien plus belle quand elle sera droite, qu'à présent qu'elle est couchée.* [...] (Académie françoise 1694, page 350.)

DROIT, OITE. adj. Qui n'est pas courbe, qui va d'un point à un autre par le plus court chemin. *Cette rue est toute droite. De droit fil. Avoir la taille droite et bien prise. La rivière est droite depuis tel village jusqu'à telle ville. Voilà le droit chemin, le plus droit chemin.*

En termes de Géométrie, *Ligne droite*, ou par ellipse, comme nom féminin, *La droite*, Le plus court chemin d'un point à un autre.

Être droit comme un I, se dit de Quelqu'un qui se tient très droit.

Fig., *La droite voie*, en termes de Dévotion, La voie du salut. *La voie droite*, en termes de Morale, La voie du bien, de la vertu.

Il signifie aussi Qui est perpendiculaire à l'horizon, qui ne penche d'aucun côté. *Ce mur n'est pas droit, il penche.* [...] (Académie française 1932, page 422.)

DROIT, DROITE adj., adv. et n. XI^e^ siècle, *dreit*, « juste, vrai, exact ». Du latin *directus*, « qui est en ligne droite, à angle droit » ; au figuré, « direct, sans détour, juste ».

I. Adj. Qui n'est ni courbe ni incliné. **1.** Qui s'étend sans déviation ni inflexion d'un point à un autre. *Un tronc d'arbre droit comme un mât. Une rue droite. Cette règle millimétrée n'est pas tout à fait droite. Pour qu'il soit parfaitement droit, l'alignement des peupliers a été tracé au cordeau. Être droit comme un I. Se tenir bien droit, très droit.* Spécialt. *Ligne droite. La ligne droite peut être matérialisée par un fil tendu entre deux points. La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.*

....

III. N. **1.** N. f. GÉOM. Une droite, une ligne telle que deux des points par lesquels elle passe sont nécessaires et suffisants pour la définir. *Segment de droite*, portion de droite limitée par deux points. *Décrire une droite*, la tracer. *Deux droites parallèles ne se rencontrent jamais. Droites concourantes*, qui convergent vers un même point. (Académie française 1992, pages 739-740.)

6.1 Définition de mot ?

Je constate que la 1^re^ et la 8^e^ édition concordent sur la signification que l'usage donne au terme *droite* et qu'elles en donnent une définition de mot.

La 9^e^ édition propose une définition de l'adjectif *droit* dans le même esprit (sauf qu'elle produit un *I* qui est incliné !), mais rajoute une définition du nom *droite* d'une nature complètement différente : on peut y reconnaitre la première demande citée au paragraphe 3.4 pour la suffisance et la notion commune 9 ci-dessous pour la nécessité.

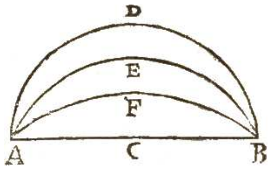
9. Et deux droites ne contiennent pas une aire. (Euclide d'Alexandrie 1990, page 179.)

Cette 9^e^ édition proposerait donc une définition à partir d'énoncés qu'Euclide a rangés parmi les postulats et axiomes ! Nous allons y revenir dans la section 8. Mais on peut y reconnaitre aussi la définition de la droite par Leibniz (voir Bkouche 2009, page 181) :

> Ce qui est déterminé par la donnée de deux points est l'extensum le plus simple passant par eux, que nous appellerons droite. (Leibniz 1995, fragment XIV, page 279.)

6.2 Commentaire de la définition euclidienne.

Toutes les éditions du *Dictionnaire* évitent la formule « de manière égale par rapport à » de la définition 4. On constate en fait que la définition de la droite par Euclide était déjà obscure pour Proclus au cinquième siècle de notre ère. Plutôt que de lire son commentaire, lisons celui de Christoph Clavius (1589, pages 30-31) dans la deuxième édition de sa traduction latine des *Éléments*, selon la version de Denis Henrion (1632). On y retrouve les références de Proclus : la définition métrique par Archimède (lignes 12-14), la définition optique par Platon (lignes 14-20) et la définition mécanique par Geminos comme « flux uniforme et privé d'inclinaison latérale d'un point » selon un « mouvement uniforme et minimal » (ma traduction de Proclus, lignes 21-29).

> 4. La ligne droite, est celle qui est également comprise et étendue entre ses points.
>
> 
>
>
> Les Mathématiciens ont de trois sortes de lignes, c'est à savoir la ligne droite, la ligne circulaire, qu'ils appellent aussi ligne courbe, et la ligne mixte : Euclide définit ici la droite, laquelle il dit être celle-là qui est également étendue entre ses points : ainsi la ligne ACB est dite ligne droite, pour ce que tous les points entremoyens d'icelle ligne, comme C, sont également posés entre les extrêmes A et B, l'un n'étant plus élevé ou abaissé que l'autre : ce qui n'advient aux trois autres lignes ADB, AEB, AFB, car il est manifeste que les points entremoyens D, E, F sont bien plus élevés que les extrêmes A et B. Quelques autres Auteurs ont diversement défini la ligne droite : car Campanus dit, que c'est le plus court chemin d'un point jusqu'à un autre : et, selon Archimède, la ligne droite est la plus courte de toutes celles qui ont mêmes extrémités. Mais Platon dit que c'est celle-là dont les points du milieu ombragent les extrêmes : comme par exemple, si en la ligne ACB, le point extrême A avait la vertu d'illuminer, et le point du milieu C la force de cacher : icelui point C empêcherait que le point extrême B fût illuminé de l'autre extrême A. Et aussi l'œil étant au point extrême A, il ne pourrait voir l'autre extrême B, à cause du point C posé entre iceux extrêmes : ce qui n'arriverait pas aux lignes non droites, comme le démontrent les lignes ADB, AEB, et AFB.
>
> Or tout ainsi que les Mathématiciens conçoivent la ligne être décrite par le flux et mouvement imaginaire du point, ainsi aussi entendent-ils la qualité de la ligne décrite par la qualité d'icelui mouvement : car si on entend que le point coule droit par le plus court chemin, ne se détournant çà ni là, la ligne ainsi décrite sera appelée ligne droite : mais si le point fluant vacille en son mouvement, et s'écarte çà et là, la ligne décrite sera appelée mixte : et finalement si le point fluant ne vacille en son mouvement, mais est porté en rond d'un certain mouvement uniforme et régulier, gardant toujours une égale distance à quelque certain point à l'entour duquel il est porté, cette ligne décrite sera appelée circulaire. Or Euclide ne traite ici que de deux simples lignes, savoir est de la droite et de la circulaire. Il a défini celle-là ci-dessus, et il définira cette-ci à la 15. déf. Mais quant à la mixte, il en omet la définition, pour ce qu'elle n'a aucun usage en ses éléments géométriques : il y en a de plusieurs sortes, et d'icelles traitent amplement Apollonius Pergeus, Nicomède, Archimède et autres Auteurs. (Henrion 1632, pages 2-3)

Je retiens de ce commentaire que la définition d'Euclide est une tentative désespérée de trouver une formulation positive pour "non courbé". Les mots « de manière égale » traduisent l'expression grecque ἐξ ἴσου, qui est en fait bien mieux rendue par l'expression latine *ex aequo* : comme le dit Henrion, la ligne droite est la ligne décrite par un point « ne se détournant çà ni là », c'est-à-dire selon un « mouvement » qui s'écoule de manière égale.

Je conclus donc au titre d'une telle interprétation que la définition 4 réalise une définition de mot.

6.3 Définition de chose ?

Cependant, les mathématiques du 19e siècle permettent de prouver cette interprétation dans le cadre de la discipline qui traite des lignes et des surfaces courbes, c'est-à-dire la géométrie différentielle. En effet, on y prouve qu'une géodésique ne se courbe que dans la mesure où la surface sur laquelle elle est décrite se courbe ; or la surface plane est de courbure nulle et la droite est une géodésique du plan par la proposition 20 du premier livre. J'estime que cette preuve, adjointe à la définition 4, permet de formuler une définition de chose de la droite !

Cependant, ce que prouve l'histoire des géométries non euclidiennes, c'est que la véritable définition de chose de la droite de la géométrie euclidienne provient de la cinquième demande, c'est-à-dire du postulat des parallèles :

> 5. Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits. (Euclide d'Alexandrie 1990, page 175.)

En effet, il s'avère que c'est lui qui oblige deux droites à toujours garder leur inclinaison respective (définissons-la comme la différence entre deux droits et la somme des angles intérieurs et du même côté faits par une droite tombant sur elles) et donc à ne pas se courber l'une par rapport à l'autre.

6.4 Critique de D'Alembert.

Voici une critique de D'Alembert de toutes les tentatives passées de définir la ligne droite dans un de ses *Éclaircissements* de 1767 consacré aux définitions mathématiques, à commencer par la définition des parallèles.

> On parviendrait peut-être plus facilement à la trouver, si on avait une bonne définition de la ligne droite ; par malheur cette définition nous manque. Il ne parait pas possible d'en donner une autre que celle dont presque tous les Mathématiciens font usage ; mais cette définition, comme nous l'avons dit ailleurs, exprime plutôt une propriété de la ligne droite, que sa notion primitive. Ce n'est pas que je veuille, avec quelques Géomètres, chercher cette notion dans l'idée que la vision nous donne de la ligne droite, en nous apprenant que les points de cette ligne se couvrent les uns les autres lorsque l'œil se trouve placé dans son prolongement. Cette notion de la ligne droite serait très-peu géométrique, 1°. parce qu'il y a des lignes droites pour un aveugle, et que l'illustre Saunderson entre autres en avait une idée très-distincte sans en avoir jamais vu ; 2°. parce qu'il serait impossible de savoir que la lumière se répand en ligne droite, si, pour connaitre la rectitude d'une ligne, nous n'avions d'autre moyen que d'examiner si les points de cette ligne se cachent les uns les autres quand l'œil est placé dans son prolongement. Si la lumière se propageait en suivant une ligne circulaire d'une courbure déterminée, et que l'œil fût placé sur la circonférence d'un tel cercle, tous les points de ce cercle se cacheraient les uns les autres, et cependant la ligne sur laquelle ils seraient placés ne serait pas droite.
>
> On ne définirait pas mieux la ligne droite, en disant avec d'autres Auteurs que c'est une ligne dont tous les points sont dans la même direction. Car qu'est-ce que *direction ?* Et comment en peut-on avoir l'idée, si on n'a déjà celle de ligne droite ?
>
> On est donc comme forcé d'en revenir à la définition ordinaire, que la ligne droite est celle qui est la plus courte d'un point à un autre. Mais il est aisé de sentir que cette définition n'est pas telle qu'on pourrait le désirer. En premier lieu, d'où sait-on que d'un point à un autre, il n'y a qu'un seul chemin qui soit le plus court ? Pourquoi ne pourrait-il pas y en avoir plusieurs, tous différents, tous égaux, et tous les plus courts ? On n'est persuadé de la vérité contraire, et on ne la suppose dans la définition de la ligne droite, que parce qu'on a déjà dans l'esprit ou plutôt dans les sens, si je puis parler de la sorte, une notion de la ligne droite qui renferme implicitement cette vérité. C'est cette notion qu'il faudrait exprimer ; mais les termes, et peut-être les idées, nous manquent pour cela. *Hoc opus, hic labor est [voilà l'obstacle, voilà l'épreuve].*
>
> En second lieu, supposons qu'en effet la ligne droite soit le plus court chemin d'un point à un autre, que ce plus court chemin soit unique, et qu'il n'y en ait pas deux égaux ; je vois clairement comment on peut conclure de là, que si on veut mener une ligne droite d'un point à un autre, tous les points par lesquels doit passer cette ligne,

sont nécessairement donnés, et que la ligne qui joint deux quelconques de ces points, est aussi la plus courte qu'on puisse mener ou imaginer de l'un à l'autre. Mais je ne vois pas avec la même évidence, en partant de la définition supposée, qu'une ligne droite tirée par deux points ne puisse être prolongée que d'une seule manière, ou ce qui revient au même, que deux lignes droites, tirées d'un même point à deux autres points, ne puissent pas avoir une partie commune : je ne dis pas que cela ne soit évident, je dis (et je me flatte qu'on en conviendra après y avoir fait attention) que cela ne suit pas évidemment de la définition supposée, mais d'une notion primitive de la ligne droite que nous avons dans l'esprit, sans pouvoir en quelque façon la rendre par des expressions ; idée dont la définition supposée n'est que la suite.

> La définition et les propriétés de la ligne droite, ainsi que des lignes parallèles, sont donc l'écueil, et, pour ainsi dire, le scandale des éléments de Géométrie. ([D'Alembert] 1767, § XI *Sur les éléments de Géométrie*, pages 203-207.)

Voici deux références pour prolonger cette enquête sur la définition de la droite : Barbin et Itard (1993), Bkouche (2009).

7 L'impossibilité de tout définir.

Notre enquête sur la définition de l'angle droit nous a menés à la définition des cinq termes de la section 3, puis nous nous sommes éloignés du discours mathématique pour chercher conseil auprès des lexicographes. Or les dictionnaires ont pour vocation de définir *tous* les mots. Est-ce envisageable pour les définitions de nom ? Voici comment Pascal introduit son opuscule.

> Mais il faut auparavant que je donne l'idée d'une méthode encore plus éminente et plus accomplie, mais où les hommes ne sauraient jamais arriver : car ce qui passe la géométrie nous surpasse ; et néanmoins il est nécessaire d'en dire quelque chose, quoiqu'il soit impossible de le pratiquer.
>
> Cette véritable méthode, qui formerait les démonstrations dans la plus haute excellence, s'il était possible d'y arriver, consisterait en deux choses principales : l'une, de n'employer aucun terme dont on n'eût auparavant expliqué nettement le sens ; l'autre, de n'avancer jamais aucune proposition qu'on ne démontrât par des vérités déjà connues ; c'est-à-dire, en un mot, à définir tous les termes et à prouver toutes les propositions. (Pascal 1991, page 393.)

Pourquoi est-il impossible de tout définir ? Pascal l'explique après avoir donné sa théorie de la définition de nom.

> Certainement cette méthode serait belle, mais elle est absolument impossible : car il est évident que les premiers termes qu'on voudrait définir en supposeraient de précédents pour servir à leur explication, et que de même les premières propositions qu'on voudrait prouver en supposeraient d'autres qui les précédassent ; et ainsi il est clair qu'on n'arriverait jamais aux premières.
>
> Aussi, en poussant les recherches de plus en plus, on arrive nécessairement à des mots primitifs qu'on ne peut plus définir, et à des principes si clairs qu'on n'en trouve plus qui le soient davantage pour servir à leur preuve. (Pascal 1991, page 395.)

En d'autres mots, cet idéal est inatteignable parce qu'on s'engagerait dans une régression à l'infini. Il y a donc des termes primitifs qui sont indéfinissables. Voici comment Pascal exprime les conséquences de ce constat.

> On trouvera peut-être étrange que la géométrie ne puisse définir aucune des choses qu'elle a pour principaux objets. Car elle ne peut définir ni le mouvement, ni les nombres, ni l'espace ; et cependant ces trois choses sont celles qu'elle considère

> particulièrement, et selon la recherche desquelles elle prend ces trois différents noms de mécanique, d'arithmétique, de géométrie, ce dernier nom appartenant au genre et à l'espèce.
>
> Mais on n'en sera pas surpris si l'on remarque que cette admirable science, ne s'attachant qu'aux choses les plus simples, cette même qualité qui les rend dignes d'être ses objets les rend incapables d'être définies ; de sorte que le manque de définition est plutôt une perfection qu'un défaut, parce qu'il ne vient pas de leur obscurité, mais au contraire de leur extrême évidence, qui est telle qu'encore qu'elle n'ait pas la conviction des démonstrations, elle en a toute la certitude. Elle suppose donc que l'on sait quelle est la chose qu'on entend par ces mots ; *mouvement, nombre, espace* ; et, sans s'arrêter à les définir inutilement, elle en pénètre la nature, et en découvre les merveilleuses propriétés. (Pascal 1991, page 401.)

Pascal fait donc appel à une « extrême évidence » pour les termes primitifs : ils réfèrent pour tous au même concept. Il y reviendra dans les *Pensées* pour exprimer ce qu'elle a d'incertain : voici comment Antony McKenna en rend compte.

> Ainsi ces *idées*, dont la conformité chez les hommes n'est qu'une *puissante conjecture*, s'appuient sur des principes que l'esprit humain ne saurait saisir, parce que « l'âme est jetée dans le corps ». Notre incapacité de douter de ces principes découle ainsi du corps qui nous empêche de voir au-delà. (McKenna 2001, page 354.)

Chacun peut avoir une opinion différente sur un même concept : redonnons la parole à Pascal.

> On voit assez de là qu'il y a des mots incapables d'être définis ; et si la nature n'avait suppléé à ce défaut par une idée pareille qu'elle a donnée à tous les hommes, toutes nos expressions seraient confuses ; au lieu qu'on en use avec la même assurance et la même certitude que s'ils étaient expliqués d'une manière parfaitement exempte d'équivoques ; parce que la nature nous en a elle-même donné, sans paroles, une intelligence plus nette que celle que l'art nous acquiert par nos explications.
>
> Ce n'est pas que tous les hommes aient la même idée de l'essence des choses que je dis qu'il est impossible et inutile de définir.
>
> Car, par exemple, le temps est de cette sorte. Qui le pourra définir ? Et pourquoi l'entreprendre, puisque tous les hommes conçoivent ce qu'on veut dire en parlant de temps, sans qu'on le désigne davantage ? Cependant il y a bien différentes opinions touchant l'essence du temps. Les uns disent que c'est le mouvement d'une chose créée ; les autres, la mesure du mouvement, etc. Aussi ce n'est pas la nature de ces choses que je dis qui est commune à tous ; ce n'est simplement que le rapport entre le nom et la chose ; en sorte qu'à cette expression, temps, tous portent la pensée vers le même objet : ce qui suffit pour faire que ce terme n'ait point besoin d'être défini, quoique ensuite, en examinant ce que c'est que le temps, on vienne à différer de sentiment après s'être mis à y penser. Car les définitions ne sont faites que pour désigner les choses que l'on nomme, et non pas pour en montrer la nature. (Pascal 1991, pages 397-398.)

8 Définition et axiomatique formelle.

8.1 Moritz Pasch.

Je me suis cantonné jusqu'à présent au cadre épistémologique euclidien auquel Hilbert et Bernays (1934) ont donné le nom d'*axiomatique matérielle* : le discours des *Éléments* fait implicitement appel à l'évidence que la géométrie provient de l'espace physique. C'est particulièrement le cas pour tout ce qui concerne l'ordre : être de part et d'autre d'un point donné sur une droite donnée, être de part et d'autre d'une droite donnée dans un plan donné, etc.

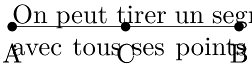
Vers la fin du 19e siècle, des mathématiciens comme Moritz Pasch ont été amenés à envisager d'une nouvelle manière le rapport des mathématiques au réel. Celui-ci commence ainsi la préface à ses *Leçons de géométrie nouvelle* (1882).

> Les tentatives passées de mettre les parties fondamentales de la géométrie dans une forme qui répond aux exigences devenues aigües avec le temps n'ont pas dégagé l'origine empirique de la géométrie avec entière détermination. [...] et en se restreignant d'avance au noyau empirique, on conserve à la géométrie le caractère de science naturelle, des autres parties de laquelle elle se distingue en ce qu'il ne lui faut prélever de l'expérience qu'un très petit nombre de concepts et de lois. (Pasch 1882, page III, ma traduction.)

Pasch isole ce noyau empirique par une analyse des tournures qui rendent compte de la géométrie dans la langue naturelle : l'évidence est explicitée et devient consciente. Il commence par la ligne droite et isole deux notions fondamentales.

> Nous allons d'abord nous occuper de la ligne droite. On dit : par deux points on peut tirer une ligne droite. Mais la ligne peut être diversement limitée ; l'indétermination de la ligne droite a mené à ce qu'on dit de la ligne qu'elle n'est pas limitée, qu'il faut se la “représenter” illimitée, d'étendue infinie. Cette demande ne correspond à aucun objet perceptible ; c'est plutôt seulement la ligne droite bien délimitée, le chemin droit entre deux points, le segment droit qui est appréhendé immédiatement à partir des perceptions. Nous voulons garder cette dernière expression et parlons
>
> 1. du segment droit tracé entre deux points
> 2. de points situés à l'intérieur d'un segment droit.
>
> Toutes les tournures qui apparaissent dans ce paragraphe peuvent être ramenées à ces deux tournures données. [...] (Pasch 1882, page 4, ma traduction.)

Puis Pasch propose de formaliser quelques évidences.

> Les observations les plus primitives sur les segments droits et leurs points livrent une série de relations ; une partie d'entre elles constitue le contenu des axiomes de ce paragraphe. Quels que soient les points A et B supposés (dans les limites étudiées plus précisément à la fin de ce paragraphe), on peut toujours relier A avec B par un segment droit ; mais on ne peut l'effectuer de plusieurs manières. On peut supposer un point C à l'intérieur du segment.
>
> 
>
>
> On peut tirer un segment droit de A à C ; celui-ci ne passe pas par B ; mais il tombe avec tous ses points dans le segment précédent. Donc, lorsqu'on relie A avec C et C avec B, on ne rencontre aucun point qu'on ne trouvait pas déjà dans le premier segment ; mais les points du premier segment seront eux aussi épuisés par ces deux segments-là. Les axiomes I.–V. restituent ces remarques.
>
> Axiome **I.** – Entre deux points on peut toujours tirer un segment droit, et un seul.
>
> Par conséquent, l'indication des points terminaux suffit à désigner le segment. Le segment de A à B sera désigné par AB ou BA.
>
> Axiome **II.** – On peut toujours indiquer un point situé à l'intérieur d'un segment droit donné.
>
> Axiome **III.** – Si le point C est situé à l'intérieur du segment AB, alors le point A est situé hors du segment BC.
>
> De même, le point B est situé hors du segment AC.
>
> Axiome **IV.** – Si le point C est situé à l'intérieur du segment AB, alors tous les points du segment AC sont à la fois points du segment AB.

Ou : si le point C est situé à l'intérieur du segment AB et le point D à l'intérieur du segment AC ou BC, alors D est situé aussi à l'intérieur du segment AB.

Axiome **V.** – Si le point C est situé à l'intérieur du segment AB, alors un point qui n'appartient à aucun des segments AC et BC ne peut appartenir au segment AB.

Ou : si les points C et D sont situés à l'intérieur du segment AB et le point D hors du segment AC, alors le point D est situé à l'intérieur du segment BC.

....

Formuler une assertion aussi triviale que celle contenue p. ex. dans le troisième axiome peut facilement être considéré comme inutile. Mais elle a été appliquée dans les démonstrations ci-dessus, et nous nous proposons de rendre compte de tous les arguments, même des plus insignifiants. (Pasch 1882, pages 5-6, ma traduction.)

Je constate que la démarche de Pasch est conforme aux conclusions de l'opuscule de Pascal : le point et le segment droit sont des termes premiers et ne sont pas définis ; leurs propriétés, c'est-à-dire les relations qu'ils entretiennent, sont posées dans les axiomes. Toute référence à l'espace physique est proscrit après n'avoir « prélevé de l'expérience qu'un très petit nombre de concepts et de lois. »

Les axiomes définissent donc les relations entre les termes premiers. De là à affirmer qu'ils définissent le point et le segment droit, il y a un pas que Pasch ne franchit pas.

Dans la suite de son ouvrage, Pasch ne propose qu'une définition implicite de la ligne droite en définissant la relation d'alignement, c'est-à-dire d'« être situé dans la ligne droite de deux points ». Il poursuit sa réflexion sur ce mode de définition dans les premières pages de Pasch (1909) et dans un article, Pasch (1920).

On peut consulter Nabonnand (2003), Gandon (2005) à ce sujet.

8.2 David Hilbert.

Toutes les éditions des *Grundlagen der Geometrie* de David Hilbert concordent sur l'introduction de la relation "entre".

§ 3. **Die Axiomgruppe II : Axiome der Anordnung.**

Die Axiome dieser Gruppe definieren den Begriff "zwischen" und ermöglichen auf Grund dieses Begriffes die *Anordnung* der Punkte auf einer Geraden, in einer Ebene und im Raume.

Erklärung. Die Punkte einer Geraden stehen in gewissen Beziehungen zu einander, zu deren Beschreibung uns insbesondere das Wort "*zwischen*" dient. (Hilbert 1899, page 6.)

Cette introduction est suivie de la donnée d'axiomes qui simplifient les axiomes de Pasch. Léonce Laugel propose la traduction suivante de ce passage, en accord avec l'auteur qui en a révisé les épreuves (voir Hallett et Majer 2004, pages 413-414).

§ 3. **Le groupe d'axiomes II : Axiomes de distribution.**

Les axiomes de ce groupe définissent l'idée exprimée par le mot « ENTRE » et permettent, en se basant sur cette idée, d'effectuer la *distribution* des points sur une droite, dans un plan et dans l'espace.

CONVENTION. — Les points d'une droite ont entre eux une certaine relation qui s'exprime en particulier au moyen du mot « entre ». (Hilbert 1900, pages 106-107.)

Paul Rossier en propose une traduction très différente.

3. ***Deuxième groupe d'axiomes : ordre.***

Les axiomes de ce groupe définissent le terme « entre » ; si l'on s'appuie sur la relation ainsi déterminée, ils permettent d'établir l'ordre des points alignés, coplanaires ou situés dans l'espace.

Définition. Entre les points d'une droite, il existe une relation dans la description de laquelle figure le mot « entre ». (Hilbert 1971, page 14.)

Le mot « Erklärung » est donc traduit successivement par « convention » et « définition ». En fait, dans la première édition, Hilbert réserve ce mot, que je traduirais littéralement par "déclaration", à l'introduction des termes primitifs de la géométrie et utilise le mot « Definition » pour les définitions de nom ; dès la deuxième édition, il abandonne cette distinction pour ne plus utiliser qu'« Erklärung » (voir Hallett et Majer 2004, page 421). Il ne prend par contre aucune précaution pour le verbe « definieren ». La première traduction montre l'embarras que cela cause à Laugel. Celui-ci se tire d'affaire en déplaçant l'acte de définition vers le domaine philosophique des idées : Hilbert ne met-il pas en exergue de son livre la phrase suivante de la *Critique de la raison pure*, « Toute science humaine commence par les intuitions, de là passe aux notions [Begriffe] et finit par les idées » ?

Gottlob Frege critique la démarche de Hilbert dès 1899.

Je commencerai par une formule de Thomae sur votre explication [Erklärung] du § 3. Il disait en substance : « Ce n'est pas une définition, car on ne donne pas de caractéristiques *(Merkmale)* permettant de reconnaitre si la relation « entre » est réalisée. » Je ne peux pas, moi non plus, la tenir pour une définition ; du reste vous ne la nommez pas ainsi, et vous parlez d'explication. Vous utilisez visiblement les deux expressions « explication » et « définition » pour désigner deux choses distinctes, mais la différence nous échappe. (Frege et Hilbert 1992, page 221.)

Nous sommes donc en droit de lire qu'Hilbert *définit* les points, les droites et les plans lorsqu'il écrit ceci.

Convention. — Concevons trois différents systèmes d'êtres : les êtres du PREMIER système, nous les nommerons *points* et nous les désignerons par A, B, C, . . . ; les êtres du DEUXIÈME système, nous les nommerons droites et nous les désignerons par *a*, *b*, *c*, . . . ; les êtres du TROISIÈME système, nous les nommerons *plans* et nous les désignerons par α, β, γ, . . . ; les points seront aussi nommés *éléments de la Géométrie linéaire* ; les points et les droites, *éléments de la Géométrie plane* ; et les points, les droites et les plans, *éléments de la Géométrie de l'espace* ou *éléments de l'espace.*

Concevons que les points, droites et plans aient entre eux certaines relations mutuelles et désignons ces relations par des mots tels que : « SONT SITUÉS », « ENTRE », « PARALLÈLE », « CONGRUENT », « CONTINU » ; la description exacte et complète de ces relations a lieu au moyen des *axiomes de la Géométrie.* (Hilbert 1900, page 104.)

En fait, en réponse à Frege, il affirme ceci.

Vous dites que mon explication du § 3 n'est pas une définition du concept « entre », car les caractéristiques font défaut. Or ces caractéristiques sont données en détail dans les axiomes II1-II5. Néanmoins, si l'on tient à prendre le mot « définition » précisément dans le sens reçu, il suffit de dire :

« "Entre" est une relation entre points d'une droite, qui possède les caractéristiques suivantes : II1. . .II5. »

Vous ajoutez : « Il en va tout autrement des explications du §1, où la référence des mots "points", "droite", . . ., n'est pas indiquée, mais supposée connue. » Le cœur du malentendu est ici. Je ne désire rien supposer connu ; je vois dans mon explication du § 1 la définition des concepts de point, de droite et de plan, si l'on

> prend comme caractéristiques tous les axiomes des groupes I-V. Si quelqu'un cherche d'autres définitions de « point », peut-être à l'aide de circonlocutions du type « sans extension », etc., il me faudra évidemment m'opposer à cette entreprise de la manière la plus nette ; on cherche là quelque chose qu'on ne pourra jamais trouver parce qu'à cet endroit il n'y a rien, et tout se perd, devient confus et vague, dégénère en un jeu de cache-cache. Si vous préférez dire que mes axiomes sont les caractéristiques des concepts que mes « explications » posent et amènent donc à l'existence, je n'ai vraiment rien à objecter, sinon peut-être que cela heurte les habitudes des mathématiciens et des physiciens. Naturellement, il faut que je puisse poser ces caractéristiques librement. Car sitôt que j'ai posé un axiome, il est là et il est « vrai ». (Frege et Hilbert 1992, page 226.)

Dans son cours du semestre d'été de 1902, Hilbert ira jusqu'à affirmer que « les choses dont les mathématiques s'occupent sont définies, *mises au monde* par les axiomes » (Hilbert 1902, page 47).

Les axiomes de la géométrie peuvent ainsi être conçus comme une définition de chose des objets de la géométrie et des relations qui les lient. Cette définition est implicite au sens du paragraphe 3.2. Elle n'est pas arbitraire aux sens suivants :
- la légitimité des axiomes est mise à l'épreuve de leur simplicité et de leur évidence lors de leur appréhension ;
- leur efficacité est mise à l'épreuve par leur usage dans les démonstrations ;
- de plus, Hilbert doit prouver leur non-contradiction parce qu'il estime qu'à présent elle seule assure l'existence des objets mathématiques.

Moritz Schlick (1918, §7, pages 30-37) propose une réflexion philosophique sur la définition implicite des notions primitives de la géométrie.

Voici comment Hilbert et Bernays circonscrivent le nouveau contexte épistémologique de l'*axiomatique formelle* dans leurs *Fondements des mathématiques* (1934).

> [. . .] parmi les matériaux objectifs de notre représentation et à partir desquels sont formés les concepts fondamentaux d'une théorie, la construction axiomatique de la théorie ne conserve que l'extrait formulé dans les axiomes, et fait abstraction de tout autre contenu (Inhalt). Un autre moment de cette axiomatique au sens le plus étroit est celui de la *forme existentielle*. [. . .] on travaille avec un système bien précis de choses (resp. plusieurs systèmes de cette sorte), système qui forme un *domaine* a priori *délimité de sujets*, pour tous les prédicats à partir desquels s'assemblent les énoncés de la théorie.
>
> Ainsi, on pose au départ une telle totalité du “domaine d'individus” ; or cette supposition est une hypothèse idéalisante – sauf dans les cas triviaux où une théorie porte seulement sur une collection finie, solidement délimitée – ; et cette hypothèse s'ajoute aux hypothèses formulées par les axiomes. (Hilbert et Bernays 2001, pages 55-56.)

Je précise que le but de cette section est non seulement de rendre compte de ce contexte qui permet de traiter les concepts fondamentaux d'une théorie exclusivement comme des « systèmes » « sujets » de « prédicats » (comme “entre”) régis par des axiomes, mais encore de réfléchir au sens de ces concepts dans ce contexte. Hilbert et Bernays rajoutent ceci.

> L'axiomatique formelle a besoin d'être complétée par l'axiomatique matérielle (inhaltlich) car celle-ci est seule à diriger le choix des formalismes ; de plus, pour une théorie formelle existante, elle est seule aussi à servir de guide pour son application à un domaine de la réalité. (Hilbert et Bernays 2001, page 57.)

Schoenflies (1911) revient sur la définition dans l'axiomatique formelle.

9 Conclusion.

Pour la conclusion, je laisse la parole à la *Logique démonstrative* de Giovanni Girolamo Saccheri, dont la première édition est de 1697 et qui a été redécouverte par Giovanni Vailati (1903).

> De là s'entend que la définition quidditive [“qui explique la nature de la chose”] est le plus souvent le fruit d'une longue série de démonstrations sur un sujet donné. Elle ne peut pas, en fait, être établie sur le genre et la différence prochains si ce n'est à la suite d'un examen prolongé des propriétés ou des prédicats qui conviennent au sujet donné. J'ai dit *le plus souvent* parce qu'il peut arriver que la définition *de nom* posée en premier lieu soit elle-même quidditive ; dans tous les cas, qu'elle soit quidditive peut difficilement être établi dès le début, comme le révèle l'expérience. Pour cela, si ce n'est sur la base d'une cognition réfléchie, le fait qu'une définition soit quidditive est toujours le fruit de nombreuses démonstrations. (Saccherius 1701, page 120, ma traduction.)

P.-S. : après avoir écrit cet article, j'ai découvert le travail de Jacqueline Boniface (2008) qui a mené la même enquête, et celui de Jean-Pierre Desclés (2008) qui a choisi le même guide.

Références

Académie française. 1878, *Dictionnaire*, vol. premier : A-H, 7e éd., Firmin-Didot et Cie, Paris.

Académie française. 1932, *Dictionnaire*, vol. premier : A-G, 8e éd., Hachette, Paris.

Académie française. 1935, *Dictionnaire*, vol. second : H-Z, 8e éd., Hachette, Paris.

Académie française. 1992, *Dictionnaire*, vol. 1 : A-Enz, 9e éd., Arthème Fayard et Imprimerie nationale, Paris.

Académie française. 2000, *Dictionnaire*, vol. 2 : Éoc-Map, 9e éd., Arthème Fayard et Imprimerie nationale, Paris.

Académie française. 2011, *Dictionnaire*, vol. 3 : Maq-Quo, 9e éd., Arthème Fayard et Imprimerie nationale, Paris.

Académie françoise. 1694, *Dictionnaire*, vol. premier : A-L, chez la veuve de Jean Baptiste Coignard : et chez Jean Baptiste Coignard, Paris.

Aristote. 1967, *Topiques : tome I, livres I-IV*, Collection des universités de France, Les Belles Lettres, Paris. Texte établi et traduit par Jacques Brunschwig.

Arnauld, A. 2009, « Nouveaux éléments de géométrie », dans *Géométries de Port-Royal*, *Sources classiques*, vol. 100, édité par D. Descotes, Honoré Champion, Paris, p. 91-798.

Arnauld, A. et P. Nicole. 2011, *La logique, ou l'Art de penser*, *Sources classiques*, vol. 108, Honoré Champion, Paris. Édition critique par D. Descotes.

Auroux, S. 1993, *La logique des idées*, *Collection Analytiques*, vol. 6, chap. La logique des idées et la définition, Bellarmin et Vrin, Montréal et Paris, p. 203-215.

Barbin, É. 1994, « Sur la conception des savoirs géométriques dans les *Éléments de géométrie* », *Cahiers de didactique des mathématiques (Thessalonique)*, vol. 14-15, p. 135-158.

Barbin, É. et G. Itard. 1993, « Le courbe et le droit », dans *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques*, édité par la Commission inter-IREM Épistémologie et histoire des mathématiques, Ellipses, Paris, p. 113-137.

Bkouche, R. 2009, « Qu'est-ce qu'une ligne droite ? », dans *Histoire du calcul de la géométrie à l'algèbre*, édité par L. Sinègre, Vuibert, Rouen, p. 173-186. http://michel.delord.free.fr/rb/rb-lignedroite.pdf.

Boniface, J. 2008, « La définition dans les axiomatiques euclidienne et hilbertienne », dans Joray et Miéville (2008), p. 1-27. http://doc.rero.ch/record/32868.

Caveing, M. 1990, « Introduction générale », dans Euclide d'Alexandrie (1990), p. 13-148. Traduction du texte de Heiberg et commentaires par Bernard Vitrac.

Clavius, C. 1589, *Euclidis Elementorvm lib[ri] XV*, Apud Bartholomaeum Grassium, Rome. http://hdl.handle.net/10481/9882.

[D'Alembert]. 1767, *Mélanges de littérature, d'histoire, et de philosophie*, vol. cinquième, chap. Éclaircissemens sur différens endroits des Élémens de Philosophie, chez Zacharie Chatelain et Fils, Amsterdam, p. 1-272. Ouvrage paru anonymement.

Desclés, J.-P. 2008, « De la définition chez Pascal aux définitions en logique combinatoire », dans Joray et Miéville (2008), p. 73-113. http://doc.rero.ch/record/32871.

Euclide d'Alexandrie. 1990, *Les Éléments : volume 1. Livres I-IV : géométrie plane*, Bibliothèque d'histoire des sciences, Presses universitaires de France, Paris. Traduction du texte de Heiberg et commentaires par Bernard Vitrac.

Euclide d'Alexandrie. 1994, *Les Éléments : volume 2. Livres V-VI : proportions et similitude. Livres VII-IX : arithmétique*, Bibliothèque d'histoire des sciences, Presses universitaires de France, Paris. Traduction du texte de Heiberg et commentaires par Bernard Vitrac.

Euclide d'Alexandrie. 2001, *Les Éléments : volume 4. Livres XI-XIII : géométrie des solides*, Bibliothèque d'histoire des sciences, Presses universitaires de France, Paris. Traduction du texte de Heiberg et commentaires par Bernard Vitrac.

Federspiel, M. 1991, « Sur la définition euclidienne de la droite », dans Rashed (1991), p. 115-130.

Frege, G. et D. Hilbert. 1992, « Correspondance », dans *Logique et fondements des mathématiques : anthologie (1850-1914)*, édité par l'Institut d'histoire et de philosophie des sciences et des techniques, Payot, Paris, p. 215-235. Traduction et introduction de J. Dubucs.

Gandon, S. 2005, « Pasch entre Klein et Peano : empirisme et idéalité en géométrie », *Dialogue*, vol. 44, n° 4, p. 653-692. http://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00299983.

Gergonne, J. D. 1818, « Essai sur la théorie des définitions », *Annales de mathématiques pures et appliquées*, vol. IX, n° 1, p. 1-35. http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1818-1819__9__1_0.

Giovacchini, J. 2010, « L'angle et l'atome dans la physique épicurienne : réflexions sur un témoignage de Sextus Empiricus », dans *Philosophie et mathématiques*, *Philosophie Antique*, vol. 10, Presses universitaires du Septentrion, Villeneuve d'Ascq, p. 139-166.

Giusti, E. 2000, *La naissance des objets mathématiques*, L'esprit des sciences, Ellipses, Paris. Traduction par Georges Barthélemy.

Gomez-Lobo, A. 1981, « Definitions in Aristotle's *Posterior Analytics* », dans *Studies in Aristotle*, *Studies in philosophy and the history of philosophy*, vol. 9, édité par D. J. O'Meara, The Catholic university of America press, Washington, p. 25-46.

Guillaume d'Ockham. 1988, *Somme de logique*, T.E.R. bilingue, Trans-Europ-Repress, Mauvezin. Traduction, introduction et notes de Joël Biard.

Hallett, M. et U. Majer, éd. 2004, *David Hilbert's Lectures on the foundations of geometry, 1891-1902*, *Foundational Lectures*, vol. 1, Springer-Verlag, Berlin.

Henrion, D. 1632, *Les quinze livres des Éléments géométriques d'Euclide*, Imprimerie d'Isaac Dedin, Paris. http://n2t.net/ark:/47881/m6cf9n9x.

Hilbert, D. 1899, « Grundlagen der Geometrie », dans *Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen*, B. G. Teubner, Leipzig. 92 pages.

Hilbert, D. 1900, « Les principes fondamentaux de la géométrie », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure (3)*, vol. 17, p. 103-209. http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1900_3_17__103_0, traduit par L. Laugel.

Hilbert, D. 1902, « Grundlagen der Geometrie », Lesesaal, Mathematisches Institut, Georg-August-Universität Göttingen. Publié dans Hallett et Majer (2004, pages 531-606).

Hilbert, D. 1971, *Les fondements de la géométrie*, Monographies universitaires de mathématiques, Dunod, Paris. Édition critique avec introduction et compléments préparée par Paul Rossier.

Hilbert, D. et P. Bernays. 1934, *Grundlagen der Mathematik. I*, *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete*, vol. 40, Julius Springer, Berlin.

Hilbert, D. et P. Bernays. 2001, *Fondements des mathématiques 1*, L'Harmattan, Paris. Traduction de l'ouvrage *Grundlagen der Mathematik 1*, 2e édition (1968) avec les passages parallèles de la 1re édition (1934) par François Gaillard et Marcel Guillaume.

Imbs, P. 1971, « Préface », dans *Trésor de la langue française : dictionnaire de la langue du XIXe et du XXe siècle (1789-1960)*, vol. premier : A-affiner, édité par le Centre de recherche pour un Trésor de la langue française (Nancy), Éditions du Centre national de la recherche scientifique, Paris, p. IX-XLVII. http://www.atilf.fr/IMG/pdf/La_Preface_originale_du_TLF.pdf.

Joray, P. et D. Miéville, éd. 2008, *Définition : rôles et fonctions en logique et en mathématiques, actes du colloque, Neuchâtel, 19-20 octobre 2007*, *Travaux de logique*, vol. 19, Centre de recherches sémiologiques, Université de Neuchâtel.

Leibniz, G. W. 1995, *La caractéristique géométrique*, Mathesis, J. Vrin, Paris. Traduction du latin par Javier Echeverría.

Loget, F. 2002, « Jacques Peletier du Mans, mathématicien : l'angle de contact », *Nouvelle revue du XVIe siècle*, vol. 20, no 2, p. 37-55.

McKenna, A. 2001, « Les *Pensées* de Pascal : une ébauche d'apologie sceptique », dans *Le retour des philosophes antiques à l'âge classique. Tome II, Le scepticisme au XVIe et au XVIIe siècle*, édité par P.-F. Moreau, Bibliothèque Albin Michel Idées, Albin Michel, p. 348-361.

Mueller, I. 1981, *Philosophy of mathematics and deductive structure in Euclid's Elements*, MIT press, Cambridge, Massachusetts.

Mueller, I. 1991, « Sur les principes des mathématiques chez Aristote et Euclide », dans Rashed (1991), p. 101-113.

Nabonnand, P. 2003, « Des « Grundbegriffe » aux « Stammbegriffe » », dans *Histoires de géométries : texte du séminaire de l'année 2002*, édité par D. Flament, Documents de travail, Fondation Maison des sciences de l'homme, p. 149-171. `http://semioweb.msh-paris.fr/f2ds/docs/geo_2002/Document02_Nabonnad5.pdf`.

Pascal, B. 1970, « Lettre à Le Pailleur », dans *Œuvres complètes II*, Bibliothèque européenne, Desclée de Brouwer, Paris, p. 556-576. Texte établi, présenté et annoté par Jean Mesnard.

Pascal, B. 1991, « De l'esprit géométrique », dans *Œuvres complètes III*, Bibliothèque européenne, Desclée de Brouwer, Paris, p. 360-428. Texte établi, présenté et annoté par Jean Mesnard.

Pasch, M. 1882, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, B. G. Teubner, Leipzig.

Pasch, M. 1909, *Grundlagen der Analysis*, B. G. Teubner, Leipzig. Rédigé avec la collaboration de Clemens Thaer.

Pasch, M. 1920, « Die Begründung der Mathematik und die implizite Definition: ein Zusammenhang mit der Lehre vom Als-Ob », *Annalen der Philosophie*, vol. 2, no 1, p. 145-162.

Quemada, B. 1967, *Les dictionnaires du français moderne 1539-1863 : étude sur leur histoire, leurs types et leurs méthodes*, chap. Les définitions, Études lexicologiques, Didier, Paris, p. 391-464.

Quemada, B., éd. 1997, *Les Préfaces du dictionnaire de l'Académie française 1694-1992*, *Lexica : mots et dictionnaires*, vol. 1, Honoré Champion, Paris.

Rashed, R., éd. 1991, *Mathématiques et philosophie : de l'Antiquité à l'âge classique : hommage à Jules Vuillemin*, Éditions du Centre national de la recherche scientifique, Paris.

Robinson, R. 1950, *Definition*, chap. Definition in mathematics, Clarendon press, Oxford, p. 193-200.

Saccheri, G. 2012, *Logica dimostrativa*, *Mathematica italiana*, vol. 3, Edizioni della Normale, Pise. Par les soins de Massimo Mugnai et Massimo Girondino.

Saccherius, H. 1701, *Logica demonstrativa*, Typis hæredum Caroli Francisci Magrij Impressorum Civit., Pavie. Reproduit en facsimilé dans Saccheri (2012).

Schlick, M. 1918, *Allgemeine Erkenntnislehre*, *Naturwissenschaftliche Monographien und Lehrbücher*, vol. 1, Julius Springer, Berlin.

Schoenflies, A. 1911, « Über die Stellung der Definition in der Axiomatik », *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 20, p. 222-255.

Turner, E., D. H. Fowler, L. Koenen et L. C. Youtie. 1985, « Euclid, *Elements* I, definitions 1–10 (*P. Mich.* III 143) », dans *Papyrology*, *Yale classical studies*, vol. 28, édité par N. Lewis, Cambridge university press, Cambridge, p. 13-24. Le papyrus peut être consulté sur `http://quod.lib.umich.edu/a/apis/x-3163`.

Ueberweg, F. 1857, *System der Logik und Geschichte der logischen Lehren*, Adolph Marcus, Bonn.

Vailati, G. 1903, « Di un'opera dimenticata *del P. Gerolamo Saccheri* (« Logica demonstrativa » 1697) », *Rivista filosofica*, vol. 5, p. 528-540.

Wolff, F. 2000, « Les principes de la science chez Aristote et Euclide », *Revue de métaphysique et de morale*, n° 3, p. 329-362.