

Le planimètre polaire

Document d'accompagnement des transparents.

Bruno Aebischer

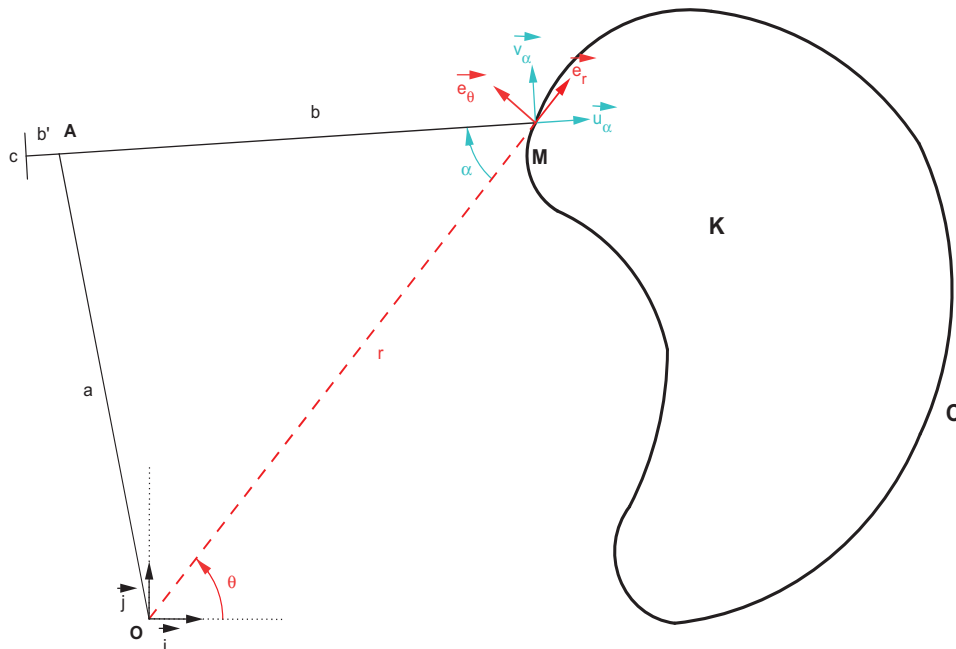
Introduction

Dans mon exposé à La Rochelle, ou au séminaire de l'IREM de Besançon, j'ai volontairement consacré une longue partie à rappeler et démontrer des propriétés « élémentaires » d'analyse : intégrale double, formes différentielles, intégrale curviligne, Green-Riemann.

La démonstration proprement dite du fonctionnement du planimètre s'en trouve du coup un peu perdue à la fin de ces explications.

Je vais procéder différemment dans ce document, en ne rappelant plus les propriétés « à savoir », et en attaquant directement dans ce qui sert à la démonstration ; j'en profite pour donner une autre démonstration du fonctionnement du planimètre polaire, pour donner une démonstration du fonctionnement du planimètre linéaire, et je continue en donnant la démonstration du fonctionnement d'un planimètre général que j'ai annoncée lors de l'exposé, et qui est valable dans les deux cas précédents, et pour finir, je corrige une erreur dans mes raisonnements initiaux, erreur que personne n'avait relevée, mais qui n'était pas anodine.

1 Figure



Le planimètre polaire et ses deux bras sont ici schématisés par les deux segments $[OA]$ et $[AM]$ de longueurs respectives a et b (et classiquement, en mettant l'origine du repère (O, \vec{i}, \vec{j}) en O , le rayon $[OM]$ vaut r). La roulette d'enregistrement est le petit segment c .

On cherche l'aire de la figure K , dont le contour est la courbe fermée \mathcal{C} , paramétrée par
$$\begin{array}{l} [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto M(t) \end{array}$$

On peut travailler en coordonnées polaires, ou en coordonnées cartésiennes, dans le repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Le vecteur \vec{u}_α est le vecteur normal porté par le bras $[AM]$ ($\vec{u}_\alpha = \frac{1}{b} \overrightarrow{AM}$) et le vecteur \vec{v}_α est le vecteur normé directement orthogonal à \vec{u}_α .

L'angle orienté α est $\alpha = \widehat{(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AM})}$.

2 Principe

On admet que la roulette ne peut tourner que perpendiculairement au deuxième bras $[AM]$ du planimètre. De ce fait, elle n'enregistre que le projeté orthogonal d'un déplacement élémentaire $d\vec{M}$ sur le vecteur unitaire \vec{v}_α . Au bout d'un tour, la valeur affichée par le planimètre correspond donc, à un coefficient de proportionnalité près¹, à la circulation du champ de vecteur \vec{v}_α le long du contour \mathcal{C} de la figure K .

Si on veut raisonner plus « rigoureusement », on peut travailler avec les vitesses instantanées (ce qui revient à diviser le déplacement élémentaire $d\vec{M}$ par un instant élémentaire dt !). On obtient la même formule au bout du compte, car $f(t_1) - f(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} f'(t) dt = k \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{v_\alpha(M(t))} \cdot \overrightarrow{M'(t)} dt = k \int_{\mathcal{C}} \vec{v}_\alpha \cdot d\vec{M}$.

3 Calcul en polaires

3.1 Calcul du produit scalaire.

Soit $\mathcal{P}(K)$ la valeur affichée par le planimètre au bout d'un tour. On a donc

$$\mathcal{P}(K) = k \int_{\mathcal{C}} \vec{v}_\alpha \cdot d\vec{M} = k \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{v_\alpha(M(t))} \cdot \overrightarrow{M'(t)} dt$$

Or les coordonnées de \vec{v}_α dans la base orthonormale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ associée aux coordonnées polaires, pour le point M sont $(-\sin \alpha, \cos \alpha)$ (celles de \vec{u}_α sont $(\cos \alpha, \sin \alpha)$).

Comme d'autre part, dans cette base, les coordonnées de $\overrightarrow{M'(t)}$ sont $(r'(t), r(t)\theta'(t))$, on a donc $\overrightarrow{v_\alpha(M(t))} \cdot \overrightarrow{M'(t)} = -r'(t) \sin(\alpha(t)) + r(t) \cos \alpha(t) \theta'(t)$.

3.2 Calcul de l'angle α .

Grâce à Al-Kashi, on a $\cos \alpha = \frac{r^2 + b^2 - a^2}{2br}$, donc $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{r^2 + b^2 - a^2}{2br}\right)^2} = g(r)$ (sin α , comme cos α d'ailleurs, ne dépend que de r et pas de θ .)

3.3 Calcul final.

Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(K) &= k \int_{\mathcal{C}} \vec{v}_\alpha \cdot d\vec{M} = k \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{v_\alpha(M(t))} \cdot \overrightarrow{M'(t)} dt \\ &= k \int_{t_0}^{t_1} \left(-g(r(t))r'(t) + r(t) \frac{r(t)^2 + b^2 - a^2}{2br(t)} \theta'(t) \right) dt \\ \mathcal{P}(K) &= k \int_{\mathcal{C}} g(r) dr + \frac{r^2 + b^2 - a^2}{2b} d\theta \end{aligned}$$

1. C'est vite dit! en fait, cette affirmation que je considérais comme évidente, que personne n'a contestée lors de mes exposés, est erronée, voir le dernier paragraphe 8

La forme différentielle $\omega'' = g(r) dr + \frac{r^2 + b^2 - a^2}{2b} d\theta$ peut s'écrire $\omega'' = \omega + \omega'$, avec $\omega' = g(r) dr + \frac{b^2 - a^2}{2b} d\theta$ et $\omega = \frac{r^2}{2b} d\theta$; la forme différentielle ω' est exacte, puisque $\text{rot}(\omega') = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{b^2 - a^2}{2b} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} (g(r)) = 0$, donc

$$\mathcal{P}(K) = k \int_{\mathcal{C}} \frac{r^2}{2b} d\theta = \frac{k}{b} \mathcal{A}(K).$$

La valeur affichée par le planimètre est bien proportionnelle à l'aire de K .

4 Calcul en coordonnées cartésiennes.

Sur la suggestion de Frédérique Plantevin, voici une démonstration de ce résultat n'utilisant pas les coordonnées polaires.

On a toujours l'expression de la valeur affichée par le planimètre comme circulation du champ de vecteurs \vec{v}_α :

$$\mathcal{P}(K) = \int_{\mathcal{C}} \vec{v}_\alpha \cdot d\vec{M}.$$

Mais on sait que $\vec{u}_\alpha = \frac{1}{b} \overrightarrow{AM}$; les coordonnées de \vec{u}_α sont donc $\left(\frac{x - x_A}{b}, \frac{y - y_A}{b} \right)$ et celles de \vec{v}_α sont donc

$$\left(-\frac{y - y_A}{b}, \frac{x - x_A}{b} \right).$$

Par définition de la circulation d'un champ de vecteurs, et en appliquant Green-Riemann, on a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(K) &= \frac{k}{b} \int_{\mathcal{C}} -(y - y_A) dx + (x - x_A) dy = \frac{k}{b} \iint_K \left(\frac{\partial(x - x_A)}{\partial x} + \frac{\partial(y - y_A)}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \frac{k}{b} \iint_K \left(2 - \frac{\partial x_A}{\partial x} - \frac{\partial y_A}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Or on peut, sans calculer les coordonnées du point A , trouver la valeur de $\frac{\partial x_A}{\partial x} + \frac{\partial y_A}{\partial y}$, en utilisant le fait que les segments $[OA]$ et $[AM]$, même s'ils dépendent de x et de y , ont des longueurs a et b fixes.

Puisque $x_A^2 + y_A^2 = a^2$, on a
$$\begin{cases} x_A \frac{\partial x_A}{\partial x} + y_A \frac{\partial y_A}{\partial x} = 0 & (1) \\ x_A \frac{\partial x_A}{\partial y} + y_A \frac{\partial y_A}{\partial y} = 0 & (2) \end{cases}$$

De même, puisque $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = b^2$, on a
$$\begin{cases} (x - x_A) \frac{\partial(x - x_A)}{\partial x} + (y - y_A) \frac{\partial(y - y_A)}{\partial x} = 0 \\ (x - x_A) \frac{\partial(x - x_A)}{\partial y} + (y - y_A) \frac{\partial(y - y_A)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Ce dernier système équivaut à
$$\begin{cases} (x - x_A) \left(1 - \frac{\partial x_A}{\partial x} \right) - (y - y_A) \frac{\partial y_A}{\partial x} = 0 \\ -(x - x_A) \frac{\partial x_A}{\partial y} + (y - y_A) \left(1 - \frac{\partial y_A}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}$$

Ou encore
$$\begin{cases} (x - x_A) \frac{\partial x_A}{\partial x} + (y - y_A) \frac{\partial y_A}{\partial x} = x - x_A & (3) \\ (x - x_A) \frac{\partial x_A}{\partial y} + (y - y_A) \frac{\partial y_A}{\partial y} = y - y_A & (4) \end{cases}$$

Prenons les équations (1) et (3), nous obtenons le système :
$$\begin{cases} x_A \frac{\partial x_A}{\partial x} + y_A \frac{\partial y_A}{\partial x} = 0 & (1) \\ (x - x_A) \frac{\partial x_A}{\partial x} + (y - y_A) \frac{\partial y_A}{\partial x} = x - x_A & (3) \end{cases} ;$$

c'est un système de Cramer, on obtient facilement la valeur
$$\frac{\partial x_A}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_A \\ x - x_A & y - y_A \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x - x_A & y - y_A \end{vmatrix}} = \frac{x_A y_A - x y_A}{x_A y - x y_A}$$

De même, avec les équations (2) et (4), on obtient le système
$$\begin{cases} x_A \frac{\partial x_A}{\partial y} + y_A \frac{\partial y_A}{\partial y} = 0 & (2) \\ (x - x_A) \frac{\partial x_A}{\partial y} + (y - y_A) \frac{\partial y_A}{\partial y} = y - y_A & (4) \end{cases}$$

et
$$\frac{\partial y_A}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} x_A & 0 \\ x - x_A & y - y_A \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x - x_A & y - y_A \end{vmatrix}} = \frac{x_A y - x_A y_A}{x_A y - x y_A}.$$

Finalement $\frac{\partial x_A}{\partial x} + \frac{\partial y_A}{\partial y} = 1$, et donc $\mathcal{P}(K) = \frac{k}{b} \iint_K (2 - 1) dx dy = \frac{k}{b} \mathcal{A}(K)$.

5 Remarque.

Dans le calcul du §4, on trouve à la fin que $\mathcal{P}(K) = \frac{k}{b} \iint_K \operatorname{div}(\overrightarrow{AM}) dx dy$

(puisque $\operatorname{div}(\overrightarrow{AM}) = \frac{\partial(x - x_A)}{\partial x} + \frac{\partial(y - y_A)}{\partial y}$).

D'après la linéarité de la fonction divergence, puisque $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$, on peut interpréter le calcul précédent ainsi :

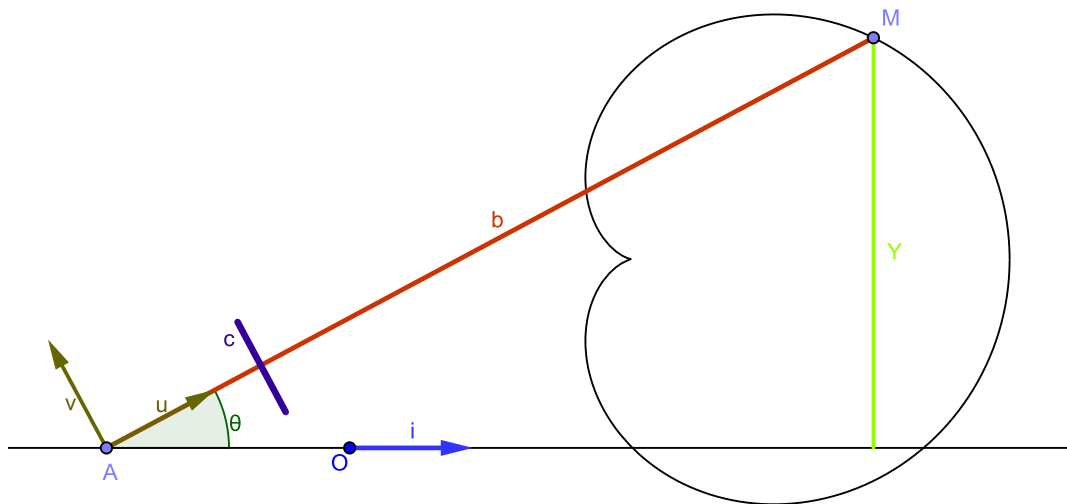
$$\mathcal{P}(K) = \frac{k}{b} \iint_K \operatorname{div}(\overrightarrow{AM}) dx dy = \frac{k}{b} \iint_K \operatorname{div}(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}) dx dy$$

et s'il est évident que $\operatorname{div}(\overrightarrow{OM}) = 2$, on prouve donc que $\operatorname{div}(\overrightarrow{AM}) = \operatorname{div}(\overrightarrow{OA}) = 1$. Cette propriété remarquable peut peut-être se prouver autrement. . .

Si quelqu'un trouve un raccourci pour cette démonstration, je suis preneur !

6 Planimètre linéaire.

Un planimètre linéaire est constitué d'un bras $[AM]$ de longueur fixe, muni d'une roulette perpendiculaire à ce bras, n'enregistrant que les déplacements perpendiculaires à ce bras. Le point A est astreint à se déplacer de manière rectiligne, sur une droite qu'on prendra comme axe des abscisses. Le point M décrit le contour de la figure dont on veut mesurer l'aire.



Soit $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{AM})$;

On pose $\vec{u}_\theta = \frac{1}{b} \overrightarrow{AM}$ et on prend \vec{v}_θ tel que $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ soit une base orthonormale directe.

Lorsque le point M a fait le tour de la surface à mesurer, la valeur affichée est proportionnelle² à l'intégrale de $\vec{v}_\theta \cdot d\vec{M}$:

$$\mathcal{P}(K) = k \int_C \vec{v}_\theta \cdot d\vec{M}.$$

Or $\vec{u}_\theta(\cos \theta, \sin \theta)$ donc $\vec{v}_\theta(-\sin \theta, \cos \theta)$

Mais $\sin \theta = \frac{y}{b}$; donc $\cos \theta = \pm \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} = \frac{h(y)}{b}$

D'où $\vec{v}_\theta \cdot d\vec{M} = \frac{1}{b}(-y dx + h(y) dy)$;

Posons $\omega = -y dx = P dx + Q dy$ et $\omega' = h(y) dy$; il est clair que $\text{rot}(\omega) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ et de même $\text{rot}(\omega') = 0$

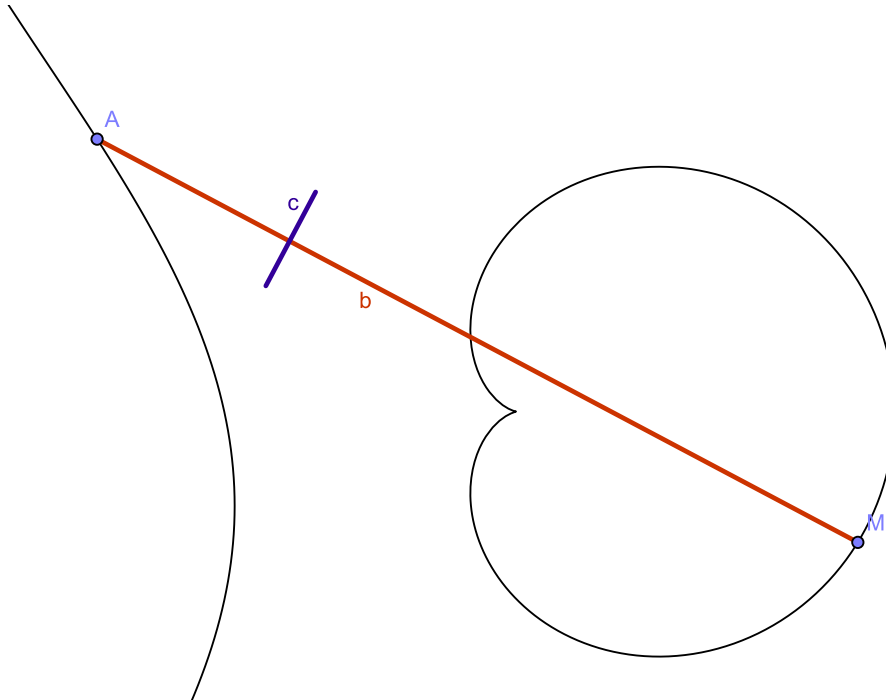
Donc $\mathcal{P}(K) = \frac{k}{b} \int_C \omega + \omega' = \frac{k}{b} \iint_K 1 dx dy = \frac{k}{b} \mathcal{A}(K).$

7 Généralisation.

7.1 Planimètre généralisé.

Voici une démonstration unifiée du fonctionnement de ces deux planimètres.

On considère un bras $[AM]$ de longueur b fixe, avec un roulette montée n'importe où, tournant perpendiculairement à ce bras ; On suppose que A reste sur une courbe fixe (et ne fait que des allers-retours) tandis que M décrit le contour de la surface à mesurer.



Nous allons montrer que quelle que soit la courbe sur laquelle A se déplace (et où que soit la roulette d'enregistrement c), ce dispositif a un comportement de planimètre, c'est-à-dire que la roulette enregistre une quantité proportionnelle à l'aire de K .

7.2 Aire décrite par un segment.

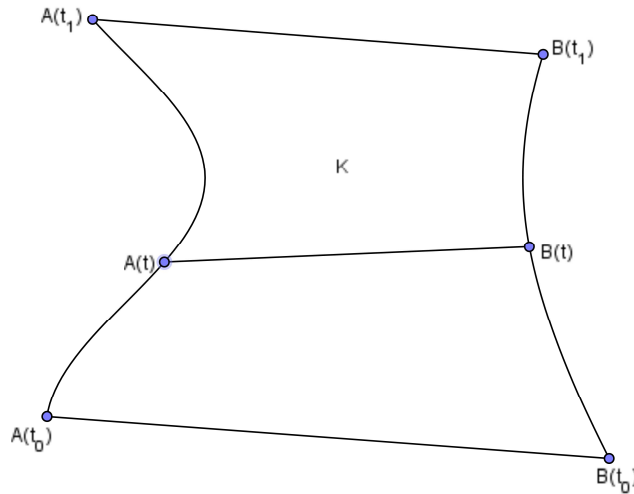
On considère un segment mobile $[AB]$. Disons que la position de ses extrémités est fonction d'un paramètre t qui peut être le temps pour fixer les idées. L'aire décrite par ce segment entre les instants t_0 et t_1 est l'aire algébrique

2. Même erreur que celle signalée au §2 ; elle sera corrigée au §8 par la même démarche.

de la partie de plan limitée par les segments $[A(t_0)B(t_0)]$ et $[A(t_1)B(t_1)]$ et les deux courbes paramétrées respectivement décrites par les points $A(t)$ et $B(t)$.

Si K est le compact limité par les deux segments et les deux arcs paramétrés, son contour ∂K est la réunion des deux segments et des deux arcs. On convient que l'orientation du contour est choisie de façon que $[A(t_0)B(t_0)]$ soit décrit de A vers B .

L'aire décrite par le segment $[AB]$, pour $t \in [t_0, t_1]$ est l'aire algébrique de K , pour cette orientation du contour (positive sur cette figure).



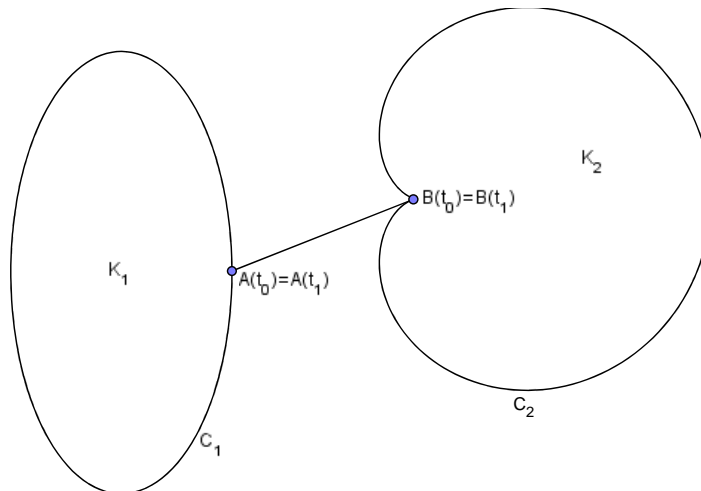
Sa valeur est

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(K) &= \int_{\partial K} \frac{x \, dy - y \, dx}{2} \\ &= \int_{[A(t_0)B(t_0)]} \frac{x \, dy - y \, dx}{2} + \int_{\widehat{B(t_0)B(t_1)}} \frac{x \, dy - y \, dx}{2} - \int_{[A(t_1)B(t_1)]} \frac{x \, dy - y \, dx}{2} - \int_{\widehat{A(t_0)A(t_1)}} \frac{x \, dy - y \, dx}{2} \end{aligned}$$

Dans cette écriture, les segments sont orientés de l'origine vers l'extrémité (de A vers B) (de gauche à droite sur la figure) et les arcs sont orientés dans le sens des t croissants, de t_0 vers t_1 (de bas en haut sur la figure).

7.3 Segment dont les extrémités décrivent deux courbes fermées.

Théorème 1 Si les extrémités $A(t)$ et $B(t)$ d'un segment décrivent respectivement les courbes fermées C_1 et C_2 , qui entourent respectivement les compacts K_1 et K_2 , alors l'aire décrite par le segment $[A(t)B(t)]$ est égale à la différence des aires algébriques de K_1 et K_2 : c'est $\mathcal{A}(K_2) - \mathcal{A}(K_1)$



Preuve : Il suffit d'appliquer la formule ci-dessus, lorsqu'on a décrit un tour complet des courbes C_1 et C_2 : à ce moment-là, on a $A(t_0) = A(t_1)$ et $B(t_0) = B(t_1)$, de sorte que dans la formule ci-dessus, les intégrales sur les

segments se compensent et disparaissent. Il ne reste plus que la différence entre les intégrales sur les contours C_1 et C_2 d'une forme différentielle qui donne justement l'aire de ces surfaces. \square

Pour la figure ci-dessus, le signe des aires de K_1 et K_2 dépend respectivement de l'orientation de C_1 et C_2 : si A décrit C_1 dans le sens positif, $\mathcal{A}(K_1) > 0$, etc. La différence des aires obtenue peut donc très bien en pratique être une somme d'aires géométriques !

7.4 Cas où l'origine du segment reste sur une courbe.

Si l'origine du segment reste sur une courbe C , et fait des allers-retours sur cette courbe, on pourra considérer qu'on est dans la situation précédente, avec un compact K_1 d'aire nulle, et donc l'aire décrite par le segment $[AB]$ n'est rien d'autre que l'aire du compact K_2 .

Pour l'instant, dans le § suivant, on ne considérera pas encore que le point A fait des allers-retours sur une courbe, mais qu'il décrit le contour C_1 d'un compact K_1 .

Notons aussi que pour l'instant, nous n'imposons pas au segment $[AB]$ d'avoir une longueur fixe.

7.5 Dérivation de la fonction *aire décrite*

On considère encore la situation d'un segment dont les extrémités décrivent deux courbes fermées (dont l'une est éventuellement « aplatie »). On suppose que les points A et B décrivent un tour complet pour T qui varie entre 0 et T_f .

On définit la fonction S par $S(T)$ est l'aire décrite par le segment $[AB]$ entre l'instant 0 et l'instant T . Bien entendu, on vient de voir que $S(T_f) = \mathcal{A}(K_2) - \mathcal{A}(K_1)$.

Nous avons vu que

$$S(T) = \int_{[A(0)B(0)]} \frac{x dy - y dx}{2} + \int_{\widehat{B(0)B(T)}} \frac{x dy - y dx}{2} - \int_{[A(T)B(T)]} \frac{x dy - y dx}{2} - \int_{\widehat{A(0)A(T)}} \frac{x dy - y dx}{2}$$

$$S(T) = I_1 + I_2 - I_3 - I_4.$$

Considérons une paramétrisation naturelle des courbes C_1 et C_2 :

$$\begin{cases} x = x_A(t) \\ y = y_A(t) \end{cases} \quad t \in [0, T_f] \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = x_B(t) \\ y = y_B(t) \end{cases} \quad t \in [0, T_f]$$

On a donc

$$I_2 = I_2(T) = \int_0^T \frac{x_B(t)y'_B(t) - y_B(t)x'_B(t)}{2} dt \quad \text{et} \quad I_4 = I_4(T) = \int_0^T \frac{x_A(t)y'_A(t) - y_A(t)x'_A(t)}{2} dt.$$

Pour le segment $[A(T)B(T)]$, on utilise une paramétrisation naturelle d'un segment :

$$\begin{cases} x = x_A(T) + t(x_B(T) - x_A(T)) \\ y = y_A(T) + t(y_B(T) - y_A(T)) \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

Donc

$$I_3 = I_3(T) = \int_0^1 \frac{(x_A(T) + t(x_B(T) - x_A(T)))(y_B(T) - y_A(T)) - (y_A(T) + t(y_B(T) - y_A(T)))(x_B(T) - x_A(T))}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (x_A(T)y_B(T) - y_A(T)x_B(T)) dt = \frac{x_A(T)y_B(T) - y_A(T)x_B(T)}{2}$$

Pour I_1 , on trouve évidemment la même chose en remplaçant T par 0, mais la valeur obtenue est constante, et on va s'intéresser à la dérivée (par rapport à T) de $S(T)$, donc la valeur constante de I_1 va disparaître.

On a obtenu :

$$S(T) = I_1 + \int_0^T \frac{x_B(t)y'_B(t) - y_B(t)x'_B(t)}{2} dt - \frac{x_A(T)y_B(T) - y_A(T)x_B(T)}{2} - \int_0^T \frac{x_A(t)y'_A(t) - y_A(t)x'_A(t)}{2} dt$$

Donc

$$S'(T) = \frac{x_B(T)y'_B(T) - y_B(T)x'_B(T)}{2} - \frac{x_A(T)y'_A(T) - y_A(T)x'_A(T)}{2}$$

$$= \frac{y'_A(T) + y'_B(T)}{2} (x_B(T) - x_A(T)) - \frac{x'_A(T) + x'_B(T)}{2} (y_B(T) - y_A(T))$$

7.6 Interprétation.

On suppose maintenant que le segment $[AB]$ a une longueur fixe b

On a obtenu $\mathcal{A}(K_2) - \mathcal{A}(K_1) = S(T_f) = \int_0^{T_f} S'(t) dt$

Soit I le milieu du segment mobile $[AB]$; on peut interpréter ainsi l'expression de $S'(t)$:

$S'(t) = x'_I(t) (-y_{\overrightarrow{AB}}(t)) + y'_I(t) x_{\overrightarrow{AB}}(t) = b \overrightarrow{I}'(t) \cdot \overrightarrow{v}(t)$, en considérant le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}(t) = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{1}{b} \overrightarrow{AB}$

et \overrightarrow{v} tel que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ soit une base orthonormale directe.

Les coordonnées de \overrightarrow{u} sont donc $\left(\frac{1}{b} x_{\overrightarrow{AB}}, \frac{1}{b} y_{\overrightarrow{AB}}\right)$ et celles de \overrightarrow{v} : $\left(-\frac{1}{b} y_{\overrightarrow{AB}}, \frac{1}{b} x_{\overrightarrow{AB}}\right)$

Par conséquent, $\mathcal{A}(K_2) - \mathcal{A}(K_1) = b \int_0^{T_f} \overrightarrow{I}'(t) \cdot \overrightarrow{v}(t) dt$.

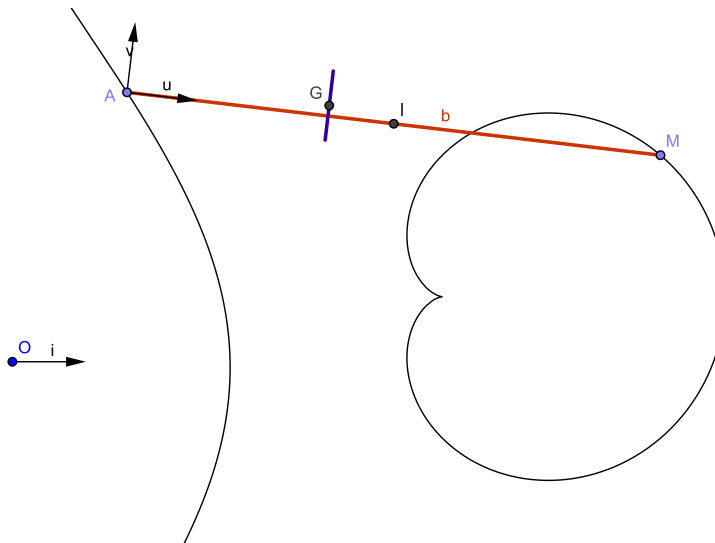
Donc un dispositif qui permettrait d'enregistrer la projection orthogonale à \overrightarrow{AB} du déplacement du milieu I du segment $[AB]$, enregistrerait, au bout d'un tour, la différence des aires de K_1 et K_2 .

7.7 Solution pratique.

La première solution à laquelle on pourrait penser consisterait bien sûr à mettre une roulette de planimètre au milieu du segment $[AB]$.

Mais, en pratique, on ne se fatigue pas à essayer de mettre la roulette exactement au milieu du segment $[AB]$: elle peut se situer n'importe où, pas forcément sur le segment ; la seule contrainte est que sa position par rapport au segment $[AB]$ soit fixée (mais les systèmes mécaniques sont rigides, ce n'est pas contraignant).

Bien sûr, le segment $[AB]$ a une longueur fixe b ; comme on veut mesurer une seule surface à la fois, on prend un compact K_1 d'aire nulle, c'est-à-dire qu'on impose au point A de faire des allers-retours sur une courbe, tandis que le point B (qu'on appellera M à partir d'ici) décrit le contour de la surface qu'on veut mesurer. Il reste à prouver que la quantité enregistrée par une tel dispositif est bien proportionnelle à l'aire ; on prouvera même que cette quantité est exactement la même que si la roulette se situait exactement au milieu du segment $[AB]$.



Supposons que la roulette soit située en un point G , tel que $G = I + \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}$ (avec λ, μ constantes).

La roulette c enregistre donc la composante selon \overrightarrow{v} du mouvement du point G , donc lorsqu'on a fini le tour de la surface à mesurer, la valeur affichée $\mathcal{P}(K)$ par le compteur est proportionnelle à l'intégrale de 0 à T_f de $\overrightarrow{G}' \cdot \overrightarrow{v}$.

En fait, si λ et μ sont bien des constantes, les vecteurs \overrightarrow{u} et \overrightarrow{v} sont des vecteurs unitaires non fixes ; ils ont des coordonnées qui dépendent d'un angle $\theta = \widehat{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u})} = \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u})}$, lui-même dépendant de la position du point

$M(t)$, donc du paramètre t . Donc on peut écrire $\vec{u} = \vec{u}_{\theta(t)}(\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ et $\vec{v} = \vec{v}_{\theta(t)}(-\sin \theta(t), \cos \theta(t))$. Et il est classique que $\frac{d}{dt} \vec{u}_{\theta(t)} = \theta'(t) \vec{v}_{\theta(t)}$ tandis que $\frac{d}{dt} \vec{v}_{\theta(t)} = -\theta'(t) \vec{u}_{\theta(t)}$

Donc la valeur affichée par le compteur au bout du tour de K est $\mathcal{P}(K) = k \int_0^{T_f} \vec{G}'(t) \cdot \vec{v}_{\theta(t)} dt$.

Or $G(t) = I(t) + \lambda \vec{u}_{\theta(t)} + \mu \vec{v}_{\theta(t)}$ donc $G'(t) = I'(t) + \lambda \theta'(t) \vec{v}_{\theta(t)} - \mu \theta'(t) \vec{u}_{\theta(t)}$

Donc

$\mathcal{P}(K) = k \int_0^{T_f} \vec{I}'(t) \cdot \vec{v}_{\theta(t)} dt + k \lambda \int_0^{T_f} \theta'(t) dt - 0 = \frac{k}{b} \mathcal{A}(K) + k \theta(T_f) - k \theta(0) = \frac{k}{b} \mathcal{A}(K)$ car $\theta(T_f) = \theta(0)$, puisqu'on suppose que la position finale du segment $[AM]$ est la même que la position initiale, avec simplement des allers retours pour le point A (il ne faut pas que le point M fasse un tour complet autour de A).

On a donc établi qu'on peut construire un planimètre général, en astreignant simplement le point A à rester sur une courbe. Cette démonstration est valable à la fois pour le planimètre polaire, et pour le planimètre linéaire.

8 Correction d'une erreur.

Cette dernière démonstration permet de se rendre compte de la présence d'une erreur dans toutes les démonstrations initiales. À chaque fois, on a prétendu que le déplacement de la roulette était proportionnel à la composante perpendiculaire au bras mobile du déplacement $d\vec{M}$. Or ceci n'est qu'une illusion. Dans le cas du planimètre polaire, il semble que ce soit le cas, en utilisant une homothétie de centre le point A , où s'articulent les deux bras. Mais ce point étant mobile, qu'est-ce qu'une homothétie de centre mobile? Pour le planimètre linéaire, on a le même problème, encore plus criant. En fait, c'est la dernière démonstration qui donne encore la solution, et qui permet de corriger cette erreur.

Les calculs faits pour le planimètre polaire, (lors du raisonnement en coordonnées polaires comme pour le raisonnement en coordonnées cartésiennes) ainsi que ceux faits pour le planimètre linéaire sont valables à condition que la roulette soit située au point M qui décrit la courbe (ce qui serait en pratique fort peu confortable!) Ils montrent à chaque fois que $\mathcal{P}(K) = \int_{\mathcal{C}} \vec{v}_\alpha \cdot d\vec{M}$ est proportionnelle à l'aire $\mathcal{A}(K)$.

Mais en fait, la roulette n'enregistre pas la composante selon $\vec{v} = \vec{v}_\alpha$ ou $\vec{v}_{\theta(t)}$ du déplacement $d\vec{M}$, mais la composante selon ce même vecteur du déplacement $d\vec{G}$ du point G de contact de la roulette avec la feuille de papier, ce déplacement n'étant en rien proportionnel au déplacement du point M (pointeur du planimètre).

On a donc enregistré, au bout d'un tour, $\mathcal{Q}(K) = \int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{G}$. Or $G = M + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$, les vecteurs unitaires \vec{u} et \vec{v} étant tels que $\vec{u} = \frac{1}{b} \overrightarrow{AM}$ et (\vec{u}, \vec{v}) est une base orthonormale directe. λ et μ sont des constantes, au

contraire de ces vecteurs unitaires. On a donc $\vec{u} = \overrightarrow{u_\theta(t)} = \cos(\theta(t)) \vec{i} + \sin(\theta(t)) \vec{j}$, avec $\theta(t) = (\vec{i}, \widehat{A(t)M(t)})$. ($t \mapsto M(t)$ pour $t \in [t_0, t_1]$ étant une paramétrisation quelconque, par exemple temporelle, du contour \mathcal{C} de la surface K qu'on cherche à mesurer.)

Par conséquent, $\frac{d}{dt} \overrightarrow{u_\theta(t)} = \theta'(t) \overrightarrow{v_\theta(t)}$ et $\frac{d}{dt} \overrightarrow{v_\theta(t)} = -\theta'(t) \overrightarrow{u_\theta(t)}$ et on peut écrire $\overrightarrow{G}'(t) = \overrightarrow{M}'(t) + \lambda \theta'(t) \overrightarrow{v} - \mu \theta'(t) \overrightarrow{u}$. Finalement, l'enregistrement de la roulette au bout d'un tour, est :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(K) &= k \int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{G} = k \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{v_\theta(t)} \cdot \overrightarrow{G}'(t) dt = k \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{v_\theta(t)} \cdot (\overrightarrow{M}'(t) + \lambda \theta'(t) \overrightarrow{v_\theta(t)} - \mu \theta'(t) \overrightarrow{u_\theta(t)}) dt \\ &= k \int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{M} + k \int_{t_0}^{t_1} \lambda \theta'(t) dt = k \int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{M} + k \lambda (\theta(t_1) - \theta(t_2)) = k \int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{M}. \end{aligned}$$

(Puisqu'on suppose que le bras mobile du planimètre finit sa course dans la même position qu'au départ, sans avoir fait un tour complet sur lui-même, c'est-à-dire $\theta(t_1) = \theta(t_2)$.)

On a ainsi prouvé, non seulement que la démonstration faite est encore valable quelle que soit la position de la roulette d'enregistrement, (pas seulement pour la roulette placée en $M(t)$), mais encore que $\mathcal{Q}(K) = \mathcal{P}(K)$, pour une roulette de même dimension : le coefficient de proportionnalité obtenu dépend certainement de la taille de la roulette, des graduations du système d'enregistrement, mais pas de la position de la roulette! (Ce n'était pas clair avec la première erreur, car dans l'illusion d'une homothétie de centre A , on croyait introduire une constante liée à la position de la roulette sur le bras mobile).