

Étude de suites et calcul intégral.

1. L'exercice proposé au candidat.

Pour tout entier naturel n , on définit les nombres x_n et y_n par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t \, dt \quad \text{et} \quad y_n = \int_0^1 t^n \sin t \, dt$$

- 1° Calculer x_0 et x_1 .
- 2° En déduire que $(u_n)_{n \geq 1}$ est monotone.
- 3° Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont décroissantes et qu'elles convergent.
- 4° Montrer que pour tout entier naturel n , on a

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -(n+1)y_n + \sin(1) \\ y_{n+1} &= (n+1)x_n + \cos(1). \end{aligned}$$

En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = \cos(1) \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} ny_n = \sin(1)$$

2. Travail demandé au candidat.

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Après avoir résolu et analysé cet exercice, le candidat résumera son analyse sur la fiche tout en répondant aux questions suivantes :

- 1° Dans quel cadre et à quel niveau est-il envisageable de poser cet exercice ?
- 2° Dégager clairement les outils et les techniques à mettre en œuvre pour résoudre cet exercice.
- 3° Proposez un ou plusieurs autres exercices d'étude d'une suite en liaison avec des calculs d'intégrales.