

Étude de configurations à l'aide de transformations.

1. L'exercice proposé au candidat.

Le Théorème de Ménélaüs.

On se propose de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que trois points pris sur les côtés d'un triangle soient alignés.

Notations et hypothèses : Une droite Δ coupe les trois côtés d'un triangle ABC en des points distincts des sommets. Δ coupe (BC) en P , elle coupe (AC) en Q et (AB) en R .

h_1 est l'homothétie de centre P qui transforme C en B ; h_2 est l'homothétie de centre R qui transforme B en A ; h_3 est l'homothétie de centre Q qui transforme A en C .

1° Montrez que le rapport de l'homothétie h_1 est $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}$ et que celui de l'homothétie h_2 est $\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}}$.

2° Quelle est l'image de C par $h_2 \circ h_1$? La composée $h_2 \circ h_1$ est soit une translation, soit une homothétie.

- a) Pourquoi $h_2 \circ h_1$ n'est-elle pas une translation?
- b) $h_2 \circ h_1$ est donc une homothétie. Quel est son centre? son rapport?
- c) Déduisez-en que :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1.$$

2. Travail demandé au candidat.

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Après avoir résolu et analysé cet exercice, le candidat résumera son analyse sur la fiche tout en répondant aux questions suivantes :

1. Cet exercice, issu d'un ouvrage édité en 1987, n'est plus d'actualité pour les classes secondaires. Pourquoi?
2. On souhaite néanmoins faire travailler des élèves de Terminale S sur cette configuration. On remplace les hypothèses que Δ rencontre les droites (BC) , (AC) par le fait qu'elle rencontre les segments $[BC]$ et $[AC]$ respectivement en P et Q . Quel est l'intérêt de cette modification? Rédiger un exercice correspondant à cette situation.
3. Représenter la figure sur la calculatrice et utiliser les possibilités de géométrie dynamique pour illustrer le résultat de ce théorème.
4. Proposer d'autres exercices sur le même thème (étude de configurations à l'aide de transformations).