

Le planimètre polaire

Bruno Aebischer

Table des matières

1	Figure	2
2	Principe	3
3	Calcul en polaires	3
3.1	Calcul du produit scalaire	3
3.2	Calcul de l'angle α	3
3.3	Calcul final	4
4	Calcul en coordonnées cartésiennes	4
5	Remarque	6
6	Planimètre linéaire	7
7	Généralisation	8
7.1	Planimètre généralisé	8
7.2	Aire décrite par un segment.	9
7.3	Segment dont les extrémités décrivent deux courbes fermées.	10
7.4	Cas où l'origine du segment reste sur une courbe	10
7.5	Dérivation de la fonction <i>aire décrite</i>	11
7.6	Interprétation	12
7.7	Solution pratique.	12
8	Correction d'une erreur.	13

Introduction

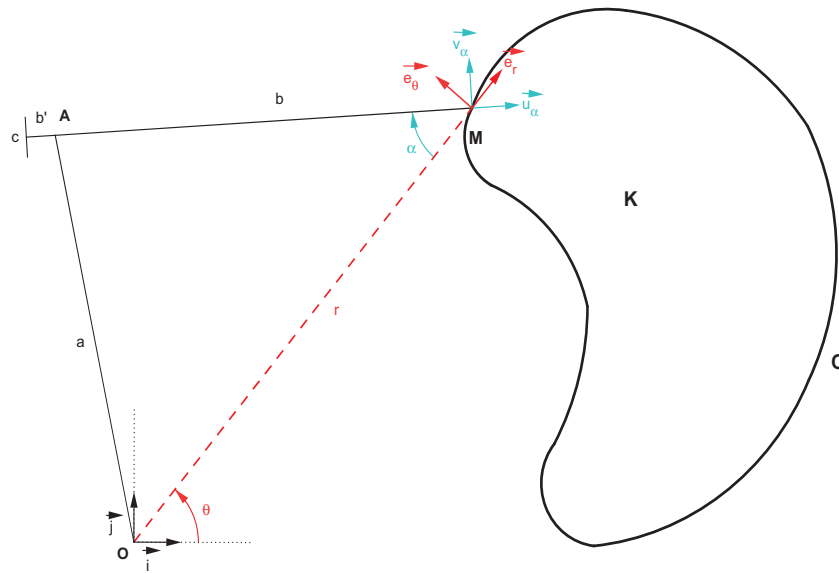
Ce texte se situe dans la continuité des deux ateliers que j'ai animés, d'abord aux journées de l'APMEP de la Rochelle, puis au séminaire de l'IREM de Franche-Comté, à Besançon.

Lors de mes deux exposés, j'ai volontairement consacré une longue partie à rappeler et démontrer des propriétés « élémentaires » d'analyse : intégrale double, formes différentielles, intégrale curviligne, Green-Riemann.

La démonstration proprement dite du fonctionnement du planimètre s'en trouve du coup un peu perdue à la fin de ces explications.

Je procède différemment dans ce document, en ne rappelant que les propriétés utiles à la compréhension du fonctionnement du planimètre. Je donne aussi une autre démonstration du fonctionnement du planimètre polaire, j'explique aussi le fonctionnement du planimètre linéaire. Je donne ensuite une démonstration du fonctionnement d'un planimètre général que j'ai annoncée lors de l'exposé, et qui est valable dans les deux cas précédents, et pour finir, je corrige une erreur dans mes raisonnements initiaux, erreur que personne n'avait relevée, mais qui n'était pas anodine.

1 Figure



Le planimètre polaire consiste en un point fixe et deux bras. Les deux bras sont ici schématisés par le segment $[OA]$ (dont l'extrémité O est fixe) et le segment $[AM]$ de longueurs respectives a et b (classiquement, en mettant l'origine du repère (O, \vec{i}, \vec{j}) en O , la longueur du segment $[OM]$ vaut r). La roulette d'enregistrement est le petit segment c . En O et en A se situent des articulations permettant une rotation libre, du segment $[OA]$ autour du point fixe O , et du segment $[AM]$ autour du point (mobile) A . De fait, ce point A se déplace sur le cercle de centre O et de rayon a , cette remarque nous servira plus loin.

On cherche l'aire de la figure K , dont le contour est la courbe fermée \mathcal{C} , paramétrée par

$$\begin{aligned} [t_0, t_1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto M(t) \end{aligned}$$

On peut travailler en coordonnées polaires, ou en coordonnées cartésiennes, dans le repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . (Le vecteur unitaire \vec{i} est choisi librement.)

Le vecteur \vec{u}_α est le vecteur normal porté par le bras $[AM]$ donc $\vec{u}_\alpha = \frac{1}{b} \overrightarrow{AM}$; le vecteur \vec{v}_α est le vecteur normé directement orthogonal à \vec{u}_α .

L'angle orienté α est $\alpha = \widehat{(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AM})}$.

2 Principe

On impose au point M de décrire le contour \mathcal{C} de la figure K . La roulette c ne peut tourner que perpendiculairement au deuxième bras $[AM]$ du planimètre. De ce fait, elle n'enregistre que le projeté orthogonal d'un déplacement élémentaire \overrightarrow{dM} sur le vecteur unitaire $\overrightarrow{v_\alpha}$. Au bout d'un tour, la valeur affichée par le planimètre correspond donc, à un coefficient de proportionnalité près¹, à la circulation du champ de vecteur $\overrightarrow{v_\alpha}$ le long du contour \mathcal{C} de la figure K :

$$\mathcal{P}(K) = k \int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{v_\alpha} \cdot \overrightarrow{dM}.$$

Si on veut raisonner plus « rigoureusement », on peut travailler avec les vitesses instantanées (ce qui revient à diviser le déplacement élémentaire \overrightarrow{dM} par un instant élémentaire dt). On obtient la même formule au bout du compte : f étant la fonction correspondant à l'affichage de la graduation de la roulette, on a

$$\mathcal{P}(K) = f(t_1) - f(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} f'(t) dt = k \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{v_\alpha(M(t))} \cdot \overrightarrow{M'(t)} dt = k \int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{v_\alpha} \cdot \overrightarrow{dM}.$$

3 Calcul en polaires

3.1 Calcul du produit scalaire

Soit $\mathcal{P}(K)$ la valeur affichée par le planimètre au bout d'un tour. On a donc

$$\mathcal{P}(K) = k \int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{v_\alpha} \cdot \overrightarrow{dM} = k \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{v_\alpha(M(t))} \cdot \overrightarrow{M'(t)} dt$$

Or les coordonnées de $\overrightarrow{v_\alpha}$, dans la base orthonormale $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ liée au point M et associée aux coordonnées polaires, sont $(-\sin \alpha, \cos \alpha)$ (celles de $\overrightarrow{u_\alpha}$ sont $(\cos \alpha, \sin \alpha)$).

D'autre part, on a $M(t) = O + r(t)\overrightarrow{e_r}(t)$, donc $\overrightarrow{M'(t)} = r'(t)\overrightarrow{e_r}(t) + r(t)\frac{d}{dt}\overrightarrow{e_r}(t)$; comme $\overrightarrow{e_r} = \cos \theta(t)\overrightarrow{i} + \sin \theta(t)\overrightarrow{j}$, on a $\frac{d}{dt}\overrightarrow{e_r}(t) = \theta'(t)(-\sin \theta(t)\overrightarrow{i} + \cos \theta(t)\overrightarrow{j}) = \theta'(t)\overrightarrow{e_\theta}(t)$. Les coordonnées de $\overrightarrow{M'(t)}$ dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ sont donc $(r'(t), r(t)\theta'(t))$.

On a donc $\overrightarrow{v_\alpha(M(t))} \cdot \overrightarrow{M'(t)} = -r'(t) \sin(\alpha(t)) + r(t) \theta'(t) \cos(\alpha(t))$.

3.2 Calcul de l'angle α

Grâce à Al-Kashi, on a $\cos \alpha = \frac{r^2 + b^2 - a^2}{2br}$, donc $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{r^2 + b^2 - a^2}{2br}\right)^2} = g(r)$.

On a prouvé que $\sin \alpha$ ne dépend que de r et pas de θ (c'est aussi le cas pour $\cos \alpha$, d'ailleurs, mais c'est moins important.)

1. C'est vite dit ! en fait, cette affirmation que je considérais comme évidente, que personne n'a contestée lors de mes exposés, est erronée, voir le dernier paragraphe 8

3.3 Calcul final

Donc

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(K) &= k \int_{\mathcal{C}} \vec{v}_\alpha \cdot \overrightarrow{dM} = k \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{v_\alpha(M(t))} \cdot \overrightarrow{M'(t)} dt \\ &= k \int_{t_0}^{t_1} \left(-g(r(t))r'(t) + r(t) \frac{r(t)^2 + b^2 - a^2}{2br(t)} \theta'(t) \right) dt \\ \mathcal{P}(K) &= k \int_{\mathcal{C}} g(r) dr + \frac{r^2 + b^2 - a^2}{2b} d\theta\end{aligned}$$

La forme différentielle $\omega'' = g(r) dr + \frac{r^2 + b^2 - a^2}{2b} d\theta$ peut s'écrire $\omega'' = \omega + \omega'$, avec $\omega' = g(r) dr + \frac{b^2 - a^2}{2b} d\theta$ et $\omega = \frac{r^2}{2b} d\theta$; la forme différentielle ω' est exacte, puisque $\text{rot}(\omega') = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{b^2 - a^2}{2b} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} (g(r)) = 0$, donc

$$\mathcal{P}(K) = k \int_{\mathcal{C}} \frac{r^2}{2b} d\theta = \frac{k}{b} \mathcal{A}(K).$$

La valeur affichée par le planimètre est bien proportionnelle à l'aire de K .

4 Calcul en coordonnées cartésiennes

Sur la suggestion de Frédérique Plantevin², voici une démonstration de ce résultat n'utilisant pas les coordonnées polaires.

On a toujours l'expression de la valeur affichée par le planimètre comme circulation du champ de vecteurs \vec{v}_α :

$$\mathcal{P}(K) = \int_{\mathcal{C}} \vec{v}_\alpha \cdot \overrightarrow{dM}.$$

Puisque $\vec{u}_\alpha = \frac{1}{b} \overrightarrow{AM}$, les coordonnées de \vec{u}_α sont $\left(\frac{x - x_A}{b}, \frac{y - y_A}{b} \right)$ et celles de \vec{v}_α sont donc $\left(-\frac{y - y_A}{b}, \frac{x - x_A}{b} \right)$.

Par définition de la circulation d'un champ de vecteurs, et en appliquant la formule de Green-Riemann³, on a donc

2. Frédérique Plantevin, est Maître de Conférences à l'Université de Brest, directrice de l'IREM de Brest, elle a animé un autre atelier aux journées de l'APMEP sur les mesures de surfaces, et également beaucoup travaillé avec des planimètres polaires.

3. La formule de Green-Riemann dit que si K est un compact de bord \mathcal{C} , sous certaines conditions de régularité de K et de \mathcal{C} , pour toute forme différentielle $\omega = P(u, v) du + Q(u, v) dv$, on a

$$\int_{\mathcal{C}} \omega = \int_{\mathcal{C}} P du + Q dv = \iint_K \text{rot}(\omega) = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) du dv.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(K) &= \frac{k}{b} \int_{\mathcal{C}} -(y - y_A) dx + (x - x_A) dy = \frac{k}{b} \iint_K \left(\frac{\partial(x - x_A)}{\partial x} + \frac{\partial(y - y_A)}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \frac{k}{b} \iint_K \left(2 - \frac{\partial x_A}{\partial x} - \frac{\partial y_A}{\partial y} \right) dx dy.\end{aligned}$$

Or on peut, sans calculer les coordonnées du point A , trouver la valeur de $\frac{\partial x_A}{\partial x} + \frac{\partial y_A}{\partial y}$, en utilisant le fait que les segments $[OA]$ et $[AM]$, même s'ils dépendent de x et de y , ont des longueurs a et b fixes.

Puisque $x_A^2 + y_A^2 = a^2$, on a
$$\begin{cases} x_A \frac{\partial x_A}{\partial x} + y_A \frac{\partial y_A}{\partial x} = 0 & (1) \\ x_A \frac{\partial x_A}{\partial y} + y_A \frac{\partial y_A}{\partial y} = 0 & (2) \end{cases}$$

De même, puisque $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = b^2$, on a
$$\begin{cases} (x - x_A) \frac{\partial(x - x_A)}{\partial x} + (y - y_A) \frac{\partial(y - y_A)}{\partial x} = 0 \\ (x - x_A) \frac{\partial(x - x_A)}{\partial y} + (y - y_A) \frac{\partial(y - y_A)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Ce dernier système équivaut à
$$\begin{cases} (x - x_A) \left(1 - \frac{\partial x_A}{\partial x} \right) - (y - y_A) \frac{\partial y_A}{\partial x} = 0 \\ -(x - x_A) \frac{\partial x_A}{\partial y} + (y - y_A) \left(1 - \frac{\partial y_A}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}$$

Ou encore
$$\begin{cases} (x - x_A) \frac{\partial x_A}{\partial x} + (y - y_A) \frac{\partial y_A}{\partial x} = x - x_A & (3) \\ (x - x_A) \frac{\partial x_A}{\partial y} + (y - y_A) \frac{\partial y_A}{\partial y} = y - y_A & (4) \end{cases}$$

Prenons les équations (1) et (3), nous obtenons le système de Cramer :

$$\begin{cases} x_A \frac{\partial x_A}{\partial x} + y_A \frac{\partial y_A}{\partial x} = 0 & (1) \\ (x - x_A) \frac{\partial x_A}{\partial x} + (y - y_A) \frac{\partial y_A}{\partial x} = x - x_A & (3) \end{cases}$$

On en déduit
$$\frac{\partial x_A}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_A \\ x - x_A & y - y_A \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x - x_A & y - y_A \end{vmatrix}} = \frac{x_A y_A - x y_A}{x_A y - x y_A}.$$

(Nous ne calculons pas valeur de $\frac{\partial x_A}{\partial y}$ car elle ne sert pas dans la suite).

De même, avec les équations (2) et (4), on obtient le système :

$$\begin{cases} x_A \frac{\partial x_A}{\partial y} + y_A \frac{\partial y_A}{\partial y} = 0 & (2) \\ (x - x_A) \frac{\partial x_A}{\partial y} + (y - y_A) \frac{\partial y_A}{\partial y} = y - y_A & (4) \end{cases}$$

Donc
$$\frac{\partial y_A}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} x_A & 0 \\ x - x_A & y - y_A \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x - x_A & y - y_A \end{vmatrix}} = \frac{x_A y - x_A y_A}{x_A y - x y_A}.$$

Finalement $\frac{\partial x_A}{\partial x} + \frac{\partial y_A}{\partial y} = 1$, et donc $\mathcal{P}(K) = \frac{k}{b} \iint_K (2 - 1) \, dx \, dy = \frac{k}{b} \mathcal{A}(K)$.

5 Remarque

Rappel :

Soit $\vec{g}(M) = g_1(M) \vec{i} + g_2(M) \vec{j}$ un champ vectoriel, on a $\operatorname{div}(\vec{g}(M)) = \frac{\partial g_1(M)}{\partial x} + \frac{\partial g_2(M)}{\partial y}$,

de sorte que $\operatorname{div}(\overrightarrow{AM}) = \frac{\partial(x - x_A)}{\partial x} + \frac{\partial(y - y_A)}{\partial y}$

Donc dans le calcul du §4, le calcul initial peut s'interpréter ainsi :

$$\mathcal{P}(K) = \frac{k}{b} \iint_K \left(\frac{\partial(x - x_A)}{\partial x} + \frac{\partial(y - y_A)}{\partial y} \right) \, dx \, dy = \frac{k}{b} \iint_K \operatorname{div}(\overrightarrow{AM}) \, dx \, dy.$$

La fonctionnelle divergence est clairement linéaire, et on a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$, on peut interpréter le calcul précédent ainsi :

$$\mathcal{P}(K) = \frac{k}{b} \iint_K \operatorname{div}(\overrightarrow{AM}) \, dx \, dy = \frac{k}{b} \iint_K \operatorname{div}(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}) \, dx \, dy = \frac{k}{b} \iint_K \left(\operatorname{div}(\overrightarrow{OM}) - \operatorname{div}(\overrightarrow{OA}) \right) \, dx \, dy$$

Il est clair que $\operatorname{div}(\overrightarrow{OM}) = 2$, et les calculs qu'on a faits prouvent donc que

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{AM}) = \operatorname{div}(\overrightarrow{OA}) = 1.$$

Cette propriété remarquable peut se prouver autrement :

Voici cet autre raisonnement, très subtil, dû à mon collègue Éric Ricard, Chargé de Recherche au C.N.R.S., en poste à Besançon.

On utilise trois remarques :

- (i) La divergence d'un champ de vecteurs \vec{f} , qu'on peut considérer comme une application différentiable de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 n'est rien d'autre que la trace de la différentielle $D\vec{f}$ de la fonction \vec{f} .

En effet, si $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, on sait que $D\vec{f}$ est l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 dont la matrice est, dans la base canonique,

$$\text{la matrice jacobienne } J(\vec{f}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}, \text{ donc } \operatorname{Tr}(D\vec{f}) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = \operatorname{div} \vec{f}.$$

- (ii) Un endomorphisme u de \mathbb{R}^2 qui a la propriété que $\operatorname{rg}(u) \leq 1$ et $\operatorname{rg}(\operatorname{id} - u) \leq 1$ est forcément un projection vectorielle sur une droite et sa trace vaut $\operatorname{Tr}(u) = 1$.

(Pour s'en convaincre, il suffit de se rappeler qu'un tel endomorphisme u admet nécessairement 0 comme valeur propre ; si 0 était valeur propre double, la matrice de u dans une base dont le premier vecteur est un vecteur propre serait de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $\operatorname{id} - u$ aurait comme matrice $\begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et serait inversible ; donc u admet une autre valeur propre $\lambda \neq 0$; la matrice de u dans une base $(\vec{v}_0, \vec{v}_\lambda)$ formée de vecteurs propres est donc $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, celle de $\operatorname{id} - u$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$ et comme on suppose que cette dernière matrice n'est pas inversible, il faut nécessairement que $\lambda = 1$.

Donc u est la projection sur $\operatorname{vect}(\vec{v}_\lambda)$ dans la direction de $\ker u = \operatorname{vect}(\vec{v}_0)$, et on a bien $\operatorname{Tr}(u) = 1$

(iii) Une application différentiable \vec{f} , de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 , qui vérifie $\|\vec{f}\| = K$ (de norme constante) a une différentielle qui n'est pas inversible, donc de rang ≤ 1 .

(Si $\|\vec{f}\| = K$, on a $\|\vec{f}\|^2 = f_1^2 + f_2^2 = K^2$, donc en dérivant par rapport à x puis par rapport à y , on obtient

$$\begin{cases} 2f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + 2f_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 \\ 2f_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + 2f_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

qu'on peut écrire $f_1 \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix} + f_2 \begin{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$; nous venons d'obtenir une relation

de dépendance linéaire entre les lignes de la matrice jacobienne $J(\vec{f})$ (à moins que \vec{f} soit nulle auquel cas le résultat est évident), donc $D\vec{f}$ a un déterminant nul, et est de rang ≤ 1 .)

Il suffit maintenant d'appliquer toutes ces propriétés. Tout d'abord on applique (iii) au champ vectoriel \overrightarrow{AM} . En effet, on a $\|\overrightarrow{AM}\| = b$, donc $\text{rg}(D(\overrightarrow{AM})) \leq 1$.

D'autre part, \overrightarrow{OA} est aussi un champ vectoriel (A dépend de M), et on a $\|\overrightarrow{OA}\| = a$ donc on peut encore appliquer (iii), et on a $\text{rg}(D(\overrightarrow{OA})) \leq 1$

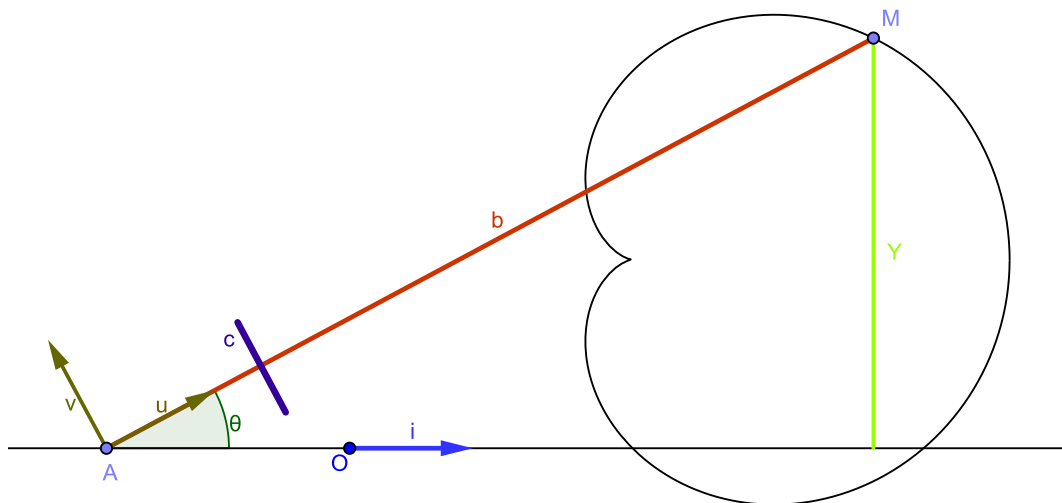
Ensuite $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM}$; or $D(\overrightarrow{OM}) = \text{id}$ (puisque les composantes de \overrightarrow{OM} sont (x, y)).

Comme la différentiation est linéaire, on a $D(\overrightarrow{OA}) + D(\overrightarrow{AM}) = D(\overrightarrow{OM}) = \text{id}$, donc $D(\overrightarrow{AM})$ est un endomorphisme qui vérifie les hypothèses de (ii), et on peut donc affirmer que $D(\overrightarrow{AM})$ est un projecteur et sa trace vaut 1.

Pour finir, en application de (i), on a bien $\text{div}(\overrightarrow{AM}) = \text{Tr}(D(\overrightarrow{AM})) = 1$, ce qu'on voulait établir. Notons qu'on a aussi, pour la même raison, $\text{div}(\overrightarrow{OA}) = 1$.

6 Planimètre linéaire

Un planimètre linéaire est constitué d'un bras $[AM]$ de longueur fixe, muni d'une roulette perpendiculaire à ce bras, n'enregistrant que les déplacements perpendiculaires à ce bras. Le point A est astreint à se déplacer sur une droite qu'on prendra comme axe des abscisses. Le point M décrit le contour de la figure dont on veut mesurer l'aire.



Soit $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{AM})$;

On pose $\vec{u}_\theta = \frac{1}{b}\overrightarrow{AM}$ et on prend \vec{v}_θ tel que $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ soit une base orthonormale directe. Lorsque le point M a décrit le périmètre de la surface à mesurer, la valeur affichée est proportionnelle⁴ à l'intégrale de $\vec{v}_\theta \cdot \overrightarrow{dM}$: $\mathcal{P}(K) = k \int_C \vec{v}_\theta \cdot \overrightarrow{dM}$.

Or $\vec{u}_\theta(\cos \theta, \sin \theta)$ donc $\vec{v}_\theta(-\sin \theta, \cos \theta)$

Mais $\sin \theta = \frac{y}{b}$; donc $\cos \theta = \pm \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} = \pm \frac{1}{b} \sqrt{b^2 - y^2} = \frac{h(y)}{b}$

D'où $\vec{v}_\theta \cdot \overrightarrow{dM} = \frac{1}{b}(-y dx + h(y) dy)$;

Posons $\omega = -y dx = P dx + Q dy$ et $\omega' = h(y) dy$; il est clair que $\text{rot}(\omega) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ et que $\text{rot}(\omega') = 0$

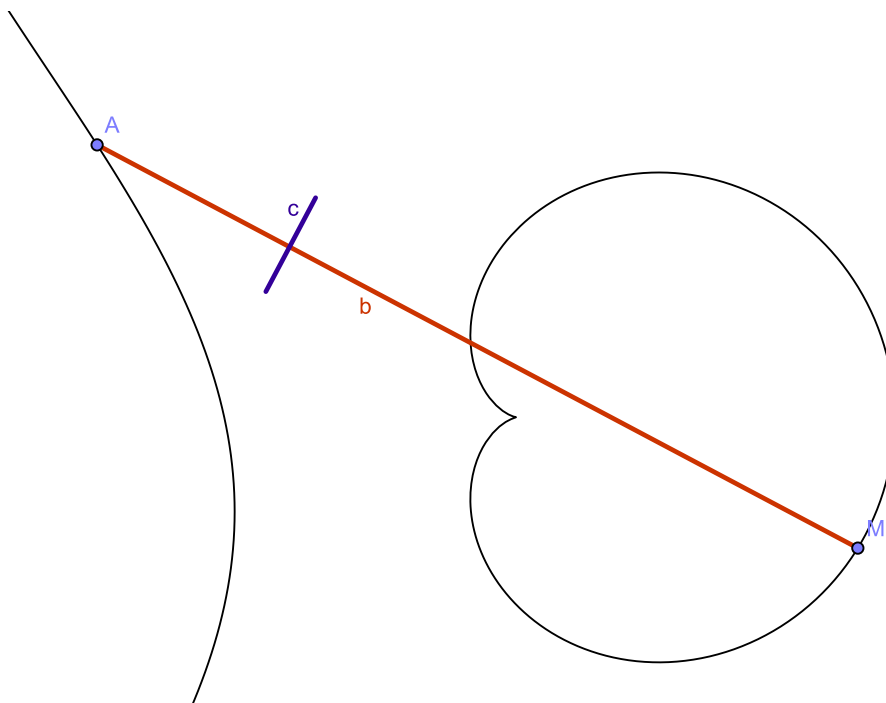
Donc $\mathcal{P}(K) = \frac{k}{b} \int_C \omega + \omega' = \frac{k}{b} \iint_K 1 dx dy = \frac{k}{b} \mathcal{A}(K)$.

Nous avons démontré que le planimètre linéaire affiche aussi une quantité proportionnelle à l'aire à mesurer.

7 Généralisation

7.1 Planimètre généralisé

Voici une démonstration unifiée du fonctionnement de ces deux planimètres, polaire et linéaire.



On considère un bras $[AM]$ de longueur b fixe, avec une roulette montée n'importe où, tournant perpendiculairement à ce bras. On suppose que A reste sur une courbe fixe (et ne fait que des allers-retours) tandis que M décrit le contour de la surface à mesurer.

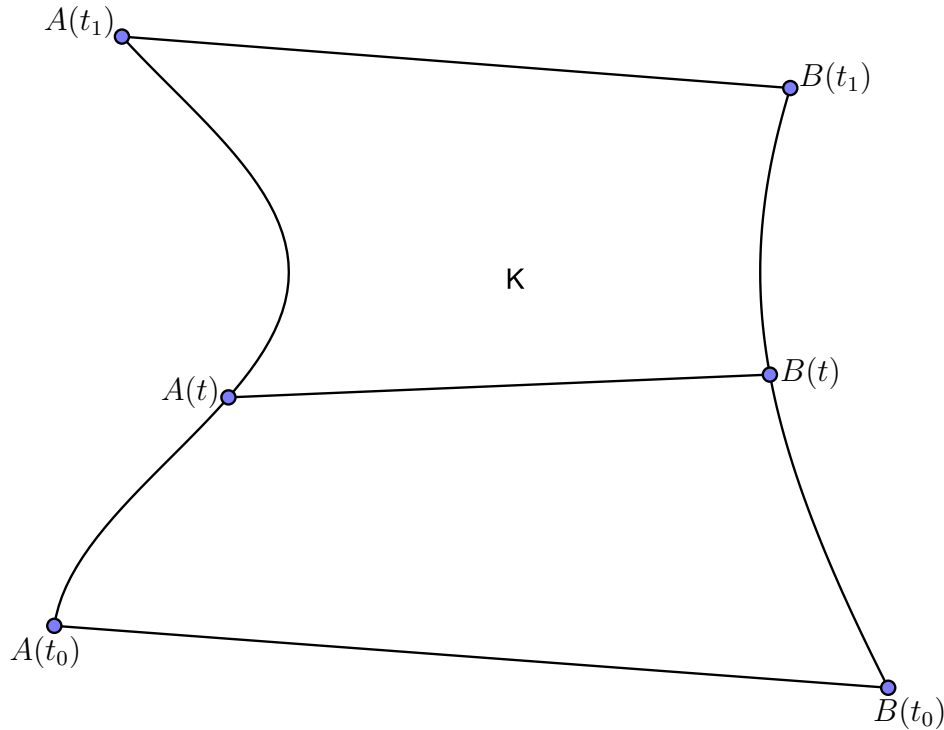
4. Même erreur que celle signalée au §2 ; elle sera corrigée au §8 par la même démarche.

Nous allons montrer que, quelle que soit la courbe sur laquelle A se déplace, et où que soit la roulette d'enregistrement c , ce dispositif a un comportement de planimètre, c'est-à-dire que la roulette enregistre une quantité proportionnelle à l'aire de K .

7.2 Aire décrite par un segment.

On considère un segment mobile $[AB]$. Disons que la position de ses extrémités est fonction d'un paramètre t qui peut être le temps pour fixer les idées. L'aire décrite par ce segment entre les instants t_0 et t_1 est l'aire algébrique de la partie de plan limitée par les segments $[A(t_0)B(t_0)]$ et $[A(t_1)B(t_1)]$ et les deux courbes paramétrées respectivement décrites par les points $A(t)$ et $B(t)$.

Si K est le compact limité par les deux segments et les deux arcs paramétrés, son contour ∂K est la réunion des deux segments et des deux arcs. On convient que l'orientation du contour ∂K est choisie de façon que $[A(t_0)B(t_0)]$ soit décrit de A vers B , de gauche à droite sur la figure. L'aire décrite par le segment $[AB]$, pour $t \in [t_0, t_1]$ est l'aire algébrique de K , pour cette orientation du contour; sur cette figure, l'aire est positive.



Un résultat classique (qu'on obtient avec la formule de Green-Riemann) est que l'aire du compact K est :

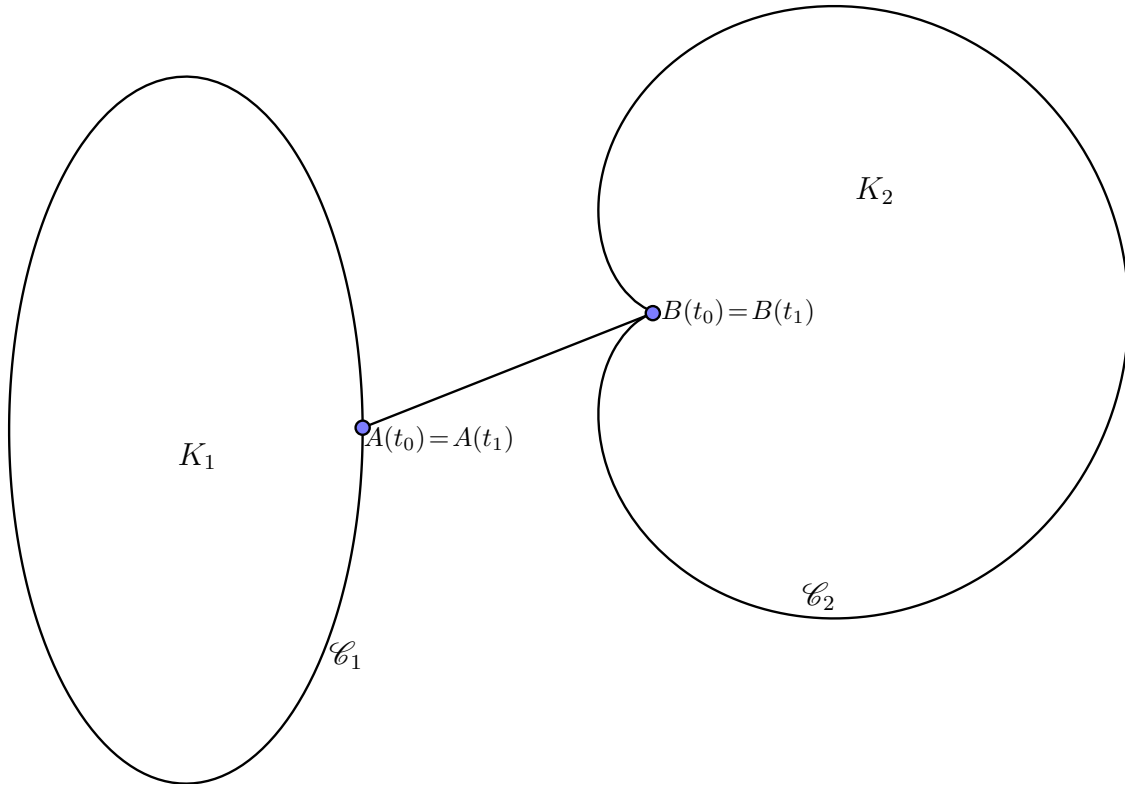
$$\mathcal{A}(K) = \int_{\partial K} \frac{x dy - y dx}{2}.$$

On a donc

$$\mathcal{A}(K) = \int_{[A(t_0)B(t_0)]} \frac{x dy - y dx}{2} + \int_{\widehat{B(t_0)B(t_1)}} \frac{x dy - y dx}{2} - \int_{[A(t_1)B(t_1)]} \frac{x dy - y dx}{2} - \int_{\widehat{A(t_0)A(t_1)}} \frac{x dy - y dx}{2}$$

Dans cette écriture, les segments sont orientés de l'origine vers l'extrémité, c'est-à-dire de $A(t_i)$ vers $B(t_i)$ (de gauche à droite sur la figure) et les arcs sont orientés dans le sens des t croissants, de t_0 vers t_1 (de bas en haut sur la figure).

7.3 Segment dont les extrémités décrivent deux courbes fermées.



Théorème 1 Si les extrémités $A(t)$ et $B(t)$ d'un segment décrivent respectivement les courbes fermées \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 , qui entourent respectivement les compacts K_1 et K_2 , alors l'aire décrite par le segment $[A(t)B(t)]$ est égale à la différence des aires algébriques de K_1 et K_2 : c'est $\mathcal{A}(K_2) - \mathcal{A}(K_1)$

Preuve : Il suffit d'appliquer la formule ci-dessus, lorsqu'on a décrit un tour complet des courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 : à ce moment-là, on a $A(t_0) = A(t_1)$ et $B(t_0) = B(t_1)$, de sorte que dans la formule ci-dessus, les intégrales sur les segments se compensent et disparaissent. Il ne reste plus que la différence entre les intégrales sur les contours \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 d'une forme différentielle qui donne justement l'aire de ces surfaces. \square

Pour la figure ci-dessus, le signe des aires de K_1 et K_2 dépend respectivement de l'orientation de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 : si A décrit \mathcal{C}_1 dans le sens positif, $\mathcal{A}(K_1) > 0$, etc. La différence des aires obtenue peut donc très bien en pratique être une somme d'aires géométriques.

7.4 Cas où l'origine du segment reste sur une courbe

Si l'origine du segment reste sur une courbe \mathcal{C} , et fait des allers-retours sur une portion de cette courbe, on pourra considérer qu'on est dans la situation précédente, avec un compact K_1 d'aire nulle, et donc l'aire décrite par le segment $[AB]$ n'est rien d'autre que l'aire du compact K_2 .

Pour l'instant, dans le § suivant, on ne considérera pas encore que le point A fait des allers-retours sur une courbe, mais qu'il décrit le contour \mathcal{C}_1 d'un compact K_1 .

Notons aussi que pour l'instant, nous n'imposons pas au segment $[AB]$ d'avoir une longueur fixe.

7.5 Dérivation de la fonction *aire décrite*

On considère encore la situation d'un segment dont les extrémités décrivent deux courbes fermées (dont l'une est éventuellement « aplatie »). On suppose que les points A et B décrivent un tour complet lorsque T qui varie de 0 à T_f .

On considère la fonction S : « aire décrite par le segment $[AB]$ ». $S(T)$ est l'aire décrite par le segment $[AB]$ entre l'instant 0 et l'instant T (on suppose donc que $t_0 = 0$ et $t_1 = T$, dans la figure ci-dessus). D'après le [théorème 1](#) de ce §, on a

$$S(T_f) = \mathcal{A}(K_2) - \mathcal{A}(K_1).$$

Nous avons vu que

$$S(T) = \int_{[A(0)B(0)]} \frac{x dy - y dx}{2} + \int_{\widehat{B(0)B(T)}} \frac{x dy - y dx}{2} - \int_{[A(T)B(T)]} \frac{x dy - y dx}{2} - \int_{\widehat{A(0)A(T)}} \frac{x dy - y dx}{2}$$

$$S(T) = I_1 + I_2 - I_3 - I_4.$$

Considérons les paramétrisations suivantes des courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 :

$$\begin{cases} x = x_A(t) \\ y = y_A(t) \end{cases} \quad t \in [0, T_f] \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = x_B(t) \\ y = y_B(t) \end{cases} \quad t \in [0, T_f]$$

On a donc

$$I_2 = I_2(T) = \int_0^T \frac{x_B(t)y'_B(t) - y_B(t)x'_B(t)}{2} dt \quad \text{et} \quad I_4 = I_4(T) = \int_0^T \frac{x_A(t)y'_A(t) - y_A(t)x'_A(t)}{2} dt.$$

Pour le segment $[A(T)B(T)]$, on utilise la paramétrisation classique d'un segment :

$$\begin{cases} x = x_A(T) + t(x_B(T) - x_A(T)) \\ y = y_A(T) + t(y_B(T) - y_A(T)) \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

Donc

$$\begin{aligned} I_3 = I_3(T) &= \int_0^1 \frac{\left(x_A(T) + t(x_B(T) - x_A(T))\right) \left(y_B(T) - y_A(T)\right) - \left(y_A(T) + t(y_B(T) - y_A(T))\right) \left(x_B(T) - x_A(T)\right)}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x_A(T)y_B(T) - y_A(T)x_B(T)) dt = \frac{x_A(T)y_B(T) - y_A(T)x_B(T)}{2} \end{aligned}$$

Pour I_1 , on trouve évidemment la même chose en remplaçant T par 0, mais la valeur obtenue est constante, et on va s'intéresser à la dérivée (par rapport à T) de $S(T)$, donc la valeur constante de I_1 va disparaître.

On a obtenu :

$$S(T) = I_1 + \int_0^T \frac{x_B(t)y'_B(t) - y_B(t)x'_B(t)}{2} dt - \frac{x_A(T)y_B(T) - y_A(T)x_B(T)}{2} - \int_0^T \frac{x_A(t)y'_A(t) - y_A(t)x'_A(t)}{2} dt$$

Donc

$$\begin{aligned} S'(T) &= \frac{x_B(T)y'_B(T) - y_B(T)x'_B(T)}{2} - \frac{x_A(T)y'_A(T) - y_A(T)x'_A(T)}{2} \\ &\quad - \frac{x'_A(T)y_B(T) + x_A(T)y'_B(T) - y'_A(T)x_B(T) - y_A(T)x'_B(T)}{2} \\ &= \frac{y'_A(T) + y'_B(T)}{2} (x_B(T) - x_A(T)) - \frac{x'_A(T) + x'_B(T)}{2} (y_B(T) - y_A(T)) \end{aligned}$$

7.6 Interprétation

On suppose maintenant que le segment $[AB]$ a une longueur fixe b

On a obtenu $\mathcal{A}(K_2) - \mathcal{A}(K_1) = S(T_f) = \int_0^{T_f} S'(t) dt$

Soit I le milieu du segment mobile $[AB]$; on peut interpréter ainsi l'expression de $S'(t)$:

$$S'(t) = x'_I(t) (-y_{\overrightarrow{AB}}(t)) + y'_I(t) x_{\overrightarrow{AB}}(t)$$

Considérons le vecteur $\vec{u} = \vec{u}(t) = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{1}{b} \overrightarrow{AB}$ et \vec{v} tel que (\vec{u}, \vec{v}) soit une base orthonormale directe.

Les coordonnées de \vec{u} sont donc $\left(\frac{1}{b} x_{\overrightarrow{AB}}, \frac{1}{b} y_{\overrightarrow{AB}}\right)$ et celles de \vec{v} : $\left(-\frac{1}{b} y_{\overrightarrow{AB}}, \frac{1}{b} x_{\overrightarrow{AB}}\right)$

On remarque qu'on a donc $S'(t) = b \left(x'_I(t) \frac{-y_{\overrightarrow{AB}}(t)}{b} + y'_I(t) \frac{x_{\overrightarrow{AB}}(t)}{b} \right) = b \vec{I}'(t) \cdot \vec{v}(t)$

Par conséquent, $\mathcal{A}(K_2) - \mathcal{A}(K_1) = b \int_0^{T_f} \vec{I}'(t) \cdot \vec{v}(t) dt$.

Donc un dispositif qui permettrait d'enregistrer la projection orthogonale à \overrightarrow{AB} du déplacement du milieu I du segment $[AB]$, enregistrerait, au bout d'un tour, la différence des aires de K_1 et K_2 .

7.7 Solution pratique.

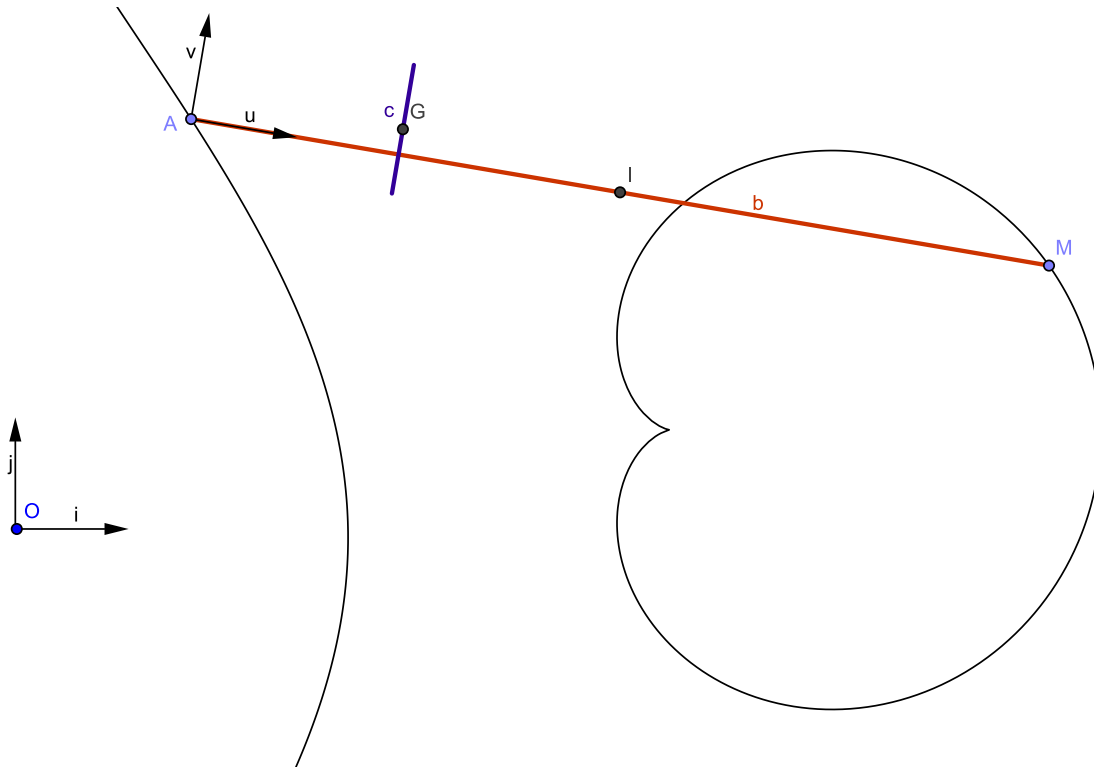
La première solution à laquelle on pourrait penser, mais qui serait bien compliquée à réaliser, consisterait bien sûr à mettre une roulette de planimètre au milieu du segment $[AB]$.

Ce n'est pas la solution retenue. en pratique, la roulette peut se situer n'importe où, et même pas forcément sur le segment ni même sur la droite (AB) ; la seule contrainte est que sa position par rapport au segment $[AB]$ soit fixée (mais les systèmes mécaniques sont rigides, ce n'est pas contraignant).

Bien sûr, le segment $[AB]$ a une longueur fixe b ; comme on veut mesurer une seule surface à la fois, on prend un compact K_1 d'aire nulle, c'est-à-dire qu'on impose au point A de faire des allers-retours sur une courbe, tandis que le point B (qu'on appellera M à partir d'ici) décrit le contour de la surface qu'on veut mesurer. Il reste à prouver que la quantité enregistrée par une tel dispositif est bien proportionnelle à l'aire; on prouvera même que cette quantité est exactement la même que si la roulette se situait exactement au milieu du segment $[AM]$.

Supposons que la roulette soit située en un point G , tel que $G = I + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ (avec λ, μ constantes).

La roulette c enregistre donc la composante selon \vec{v} du mouvement du point G , donc lorsqu'on a fini le tour de la surface à mesurer, la valeur affichée $\mathcal{P}(K)$ par le compteur est proportionnelle à l'intégrale de 0 à T_f de $\vec{G}' \cdot \vec{v}$.



En fait, si λ et μ sont bien des constantes, les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont des vecteurs unitaires non fixes; ils ont des coordonnées qui dépendent d'un angle $\theta = (\vec{i}, \vec{u}) = (\vec{i}, \widehat{AM})$, lui-même dépendant de la position du point $M(t)$, donc du paramètre t . Donc on peut écrire $\vec{u} = \vec{u}_{\theta(t)}(\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ et $\vec{v} = \vec{v}_{\theta(t)}(-\sin \theta(t), \cos \theta(t))$. Et il est classique que $\frac{d}{dt} \vec{u}_{\theta(t)} = \theta'(t) \vec{v}_{\theta(t)}$ tandis que $\frac{d}{dt} \vec{v}_{\theta(t)} = -\theta'(t) \vec{u}_{\theta(t)}$

Donc la valeur affichée par le compteur au bout du tour de K est $\mathcal{P}(K) = k \int_0^{T_f} \vec{G}'(t) \cdot \vec{v}_{\theta(t)} dt$.

Or $G(t) = I(t) + \lambda \vec{u}_{\theta(t)} + \mu \vec{v}_{\theta(t)}$ donc $G'(t) = I'(t) + \lambda \theta'(t) \vec{v}_{\theta(t)} - \mu \theta'(t) \vec{u}_{\theta(t)}$

Donc

$$\mathcal{P}(K) = k \int_0^{T_f} \vec{I}'(t) \cdot \vec{v}_{\theta(t)} dt + k\lambda \int_0^{T_f} \theta'(t) dt - 0 = \frac{k}{b} \mathcal{A}(K) + k\theta(T_f) - k\theta(0) = \frac{k}{b} \mathcal{A}(K)$$

car $\theta(T_f) = \theta(0)$, puisqu'on suppose que la position finale du segment $[AM]$ est la même que la position initiale, avec simplement des allers retours pour le point A (il ne faut pas que le point M fasse un tour complet autour de A).

On a donc établi qu'on peut construire un planimètre général, en astreignant simplement le point A à rester sur une courbe. Cette démonstration est valable à la fois pour le planimètre polaire, et pour le planimètre linéaire.

8 Correction d'une erreur.

Cette dernière démonstration permet de se rendre compte de la présence une erreur dans toutes les démonstrations initiales. À chaque fois, on a prétendu que le déplacement de la roulette était

proportionnel à la composante perpendiculaire au bras mobile du déplacement \overrightarrow{dM} . Or ceci n'est qu'une illusion. Dans le cas du planimètre polaire, il semble que ce soit le cas, en utilisant une homothétie de centre le point A , où s'articulent les deux bras. Mais ce point étant mobile, qu'est-ce qu'une homothétie de centre mobile ? Pour le planimètre linéaire, on a le même problème, encore plus criant. En fait, c'est la dernière démonstration qui donne encore la solution, et qui permet de corriger cette erreur.

Les calculs faits pour le planimètre polaire, (lors du raisonnement en coordonnées polaires comme pour le raisonnement en coordonnées cartésiennes) ainsi que ceux faits pour le planimètre linéaire sont valables à condition que la roulette soit située au point M qui décrit la courbe, ce qui serait en pratique fort peu confortable. Ils montrent à chaque fois que $\mathcal{P}(K) = \int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{v}_\alpha \cdot \overrightarrow{dM}$ est proportionnelle à l'aire $\mathcal{A}(K)$.

Mais en fait, la roulette n'enregistre pas la composante selon $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_\alpha$ ou $\overrightarrow{v_{\theta(t)}}$ du déplacement \overrightarrow{dM} , mais la composante selon ce même vecteur du déplacement \overrightarrow{dG} du point G de contact de la roulette avec la feuille de papier, ce déplacement n'étant en rien proportionnel au déplacement du point M (pointeur du planimètre).

On a donc enregistré, au bout d'un tour, $\mathcal{Q}(K) = \int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{dG}$. Or $G = M + \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}$, les vecteurs unitaires \overrightarrow{u} et \overrightarrow{v} étant tels que $\overrightarrow{u} = \frac{1}{b} \overrightarrow{AM}$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base orthonormale directe. λ et μ sont des constantes, au contraire de ces vecteurs unitaires.

On a donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_{\theta(t)}} = \cos(\theta(t)) \overrightarrow{i} + \sin(\theta(t)) \overrightarrow{j}$, avec $\theta(t) = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{AM(t)})$.

($t \mapsto M(t)$ pour $t \in [t_0, t_1]$ étant une paramétrisation quelconque, par exemple temporelle, du contour \mathcal{C} de la surface K qu'on cherche à mesurer.)

Par conséquent, $\frac{d}{dt} \overrightarrow{u_{\theta(t)}} = \theta'(t) \overrightarrow{v_{\theta(t)}}$ et $\frac{d}{dt} \overrightarrow{v_{\theta(t)}} = -\theta'(t) \overrightarrow{u_{\theta(t)}}$ et on peut écrire $\overrightarrow{G'(t)} = \overrightarrow{M'(t)} + \lambda \theta'(t) \overrightarrow{v} - \mu \theta'(t) \overrightarrow{u}$.

Finalement, l'enregistrement de la roulette au bout d'un tour, est :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(K) &= k \int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{dG} = k \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{v_{\theta(t)}} \cdot \overrightarrow{G'(t)} dt = k \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{v_{\theta(t)}} \cdot \left(\overrightarrow{M'(t)} + \lambda \theta'(t) \overrightarrow{v_{\theta(t)}} - \mu \theta'(t) \overrightarrow{u_{\theta(t)}} \right) dt \\ &= k \int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{dM} + k \int_{t_0}^{t_1} \lambda \theta'(t) dt = k \int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{dM} + k \lambda (\theta(t_1) - \theta(t_0)) = k \int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{dM}. \end{aligned}$$

(Puisqu'on suppose que le bras mobile du planimètre finit sa course dans la même position qu'au départ, sans avoir fait un tour complet sur lui-même, c'est-à-dire $\theta(t_0) = \theta(t_1)$.)

On a ainsi prouvé, non seulement que la démonstration faite est encore valable quelle que soit la position de la roulette d'enregistrement, (pas seulement pour la roulette placée en $M(t)$), mais encore que $\mathcal{Q}(K) = \mathcal{P}(K)$, pour une roulette de même dimension : Dans la formule $\mathcal{P}(K) = \frac{k}{b} \mathcal{A}(K)$, le coefficient de proportionnalité k obtenu dépend certainement de la taille de la roulette, des graduations du système d'enregistrement, mais pas de la position de la roulette ! (Ce n'était pas clair avec la première erreur, car dans l'illusion d'une homothétie de centre A , on croyait introduire une constante liée à la position de la roulette sur le bras mobile) ; de plus, l'affichage du système est bien inversement proportionnel à la longueur du bras mobile $[AM]$ (et, dans le cas du planimètre polaire, ça ne dépend pas de la longueur du bras à extrémité fixe $[OM]$).