

Conceptions de l'infini mathématique et philosophie

Notes de lectures

F. Ammar Khodja
IUFM de Franche-Comté
Fort Griffon 25000 Besançon
ammar@math.univ-fcomte.fr

June 21, 2005

”Si la pensée mathématique est défectueuse, où donc
trouverons-nous vérité et certitude?”

G. Cantor (1845-1918)

1 Théorie mathématique de l'infini

1.1 La théorie de Cantor

Lorsque Cantor publia en 1883 ses premiers articles sur l'infini et la théorie des ensembles, il n'avait probablement pas mesuré la profondeur et l'ampleur du débat qu'il allait provoquer au sein de la communauté des mathématiciens et même au delà. On s'accorde à dire, aujourd'hui, que la théorie mathématique de l'infini est née avec lui. Rappelons brièvement en quoi a consisté l'apport de Cantor.

Bolzano avait déjà mis le doigt sur la source de beaucoup des paradoxes produits dans l'histoire dès lors que l'on admettait l'existence d'ensembles infinis: d'une part, le **tout est toujours plus grand que sa partie** (énoncé formulé dans les *Éléments* d'Euclide, 3ème siècle avant J.-C.) et, d'autre part, **un infini ne peut être plus grand qu'un autre infini** (qui découle de l'énoncé précédent). A la suite de Bolzano, Dedekind va proposer -pas décisif, au moins en mathématiques!- d'adopter la source de tous ces paradoxes comme la caractéristique des ensembles infinis: un ensemble est infini s'il est en bijection avec une de ses parties propres (i. e. strictement contenue). Dans cette conception, un ensemble est fini s'il n'est en bijection avec aucune de ses parties propres.

Cantor va se saisir de ce nouvel outil pour introduire la notion de **nombre transfini**. Ce nombre est la généralisation du **nombre cardinal (ou nombre des éléments)** d'un ensemble fini. Le cardinal d'un ensemble fini est donc un nombre entier. Celui d'un ensemble infini sera dit nombre transfini. Cantor définit une relation d'équivalence entre ensemble: deux ensembles E et F sont **équipotents** s'ils sont en bijection. Plus rigoureusement donc, le nombre cardinal désignera les classes d'équivalence pour la relation d'équipotence. On peut ainsi voir que l'ensemble des entiers pairs (ou impairs) est équipotent à \mathbb{N} . Il en est de même de l'ensemble des entiers relatifs et de l'ensemble des rationnels. Ainsi:

$$\text{Card}\mathbb{N} = \text{Card}\mathbb{Z} = \text{Card}\mathbb{Q}$$

Cantor choisira la lettre hébraïque \aleph_0 (aleph) pour désigner ce cardinal et dira de tout ensemble équipotent à N qu'il est dénombrable. Ensuite, il établira que si $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble de toutes les parties de E alors le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ est strictement plus grand que celui de E . On peut donc imaginer l'existence d'autres nombres transfinis: $\aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \dots$ et ces nombres peuvent être comparés (tout comme les nombres entiers). En fait, Cantor va démontrer que le cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est le même que celui de l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} . Par analogie au cas des ensembles finis¹, il notera ce cardinal 2^{\aleph_0} . Il établit quantité d'autres résultats défiant l'intuition parmi lesquels: \mathbb{R} est en bijection avec ses intervalles et... avec le

¹Un ensemble à n éléments admet 2^n parties.

plan \mathbb{R}^2 . Ceci revient à concevoir qu'il y a "autant" de points dans un segment de longueur l que dans un carré de côté l ... Cantor prouve également que l'ensemble des racines de tous les polynôme à coefficients rationnels (*les nombres algébriques*) est dénombrable. Il en déduit ainsi très simplement que non seulement l'ensemble des nombres transcendants n'est pas vide mais qu'en plus il n'est pas dénombrable! Tout cela sans exhiber un seul nombre transcendant...

Jusqu'à la fin de sa vie, Cantor essaiera, sans succès, de prouver que son échelle des nombres transfinis épuise tous les infinis. En particulier, il tentera d'établir que le nombre transfini immédiatement supérieur à \aleph_0 est 2^{\aleph_0} : cette conjecture est connue sous le nom d'"*hypothèse du continu*". Les travaux de Gödel (1931) et de Cohen (1963) établiront, bien plus tard, que cette proposition est *indécidable* dans les théories axiomatiques usuelles.

Cantor va lui-même détecter un premier paradoxe: l'ensemble de tous les ensembles ne peut être... un ensemble! Sinon, il contiendrait l'ensemble de toutes ses parties (puisque'il est l'ensemble de tous les ensembles) et cela conduit à contredire un résultat déjà établi: $Card\mathcal{P}(E) > Card E$. Par ailleurs, Cantor prouve que, en supposant que *tout ensemble peut être bien ordonné*, son échelle des alephs épuise tous les cardinaux (ce qui signifie qu'à tout ensemble, on peut attribuer un cardinal de l'échelle des alephs). Mais ce que Cantor considère comme une "loi de pensée" (*tout ensemble peut être bien ordonné*) s'avérera équivalente à l'*axiome du choix*. De plus, Burali-Forti montrera que cet énoncé admet une conséquence contradictoire. Conclusion: la notion d'ensemble est encore trop vague et ne saurait, en l'état, être à la base de l'édifice de Cantor. C'est le début d'une grande crise: celle des fondements des mathématiques.

1.2 La grande dispute

Les théories de Cantor et ses implications vont scinder la communauté mathématique en deux camps: ceux qui soutiennent que les mathématiques n'ont pas besoin d'une théorie d'un infini en acte et ceux pour lesquels ces théories ouvrent de nouveaux horizons aux mathématiques. Parmi les premiers, on trouvera d'illustres mathématiciens comme Kronecker (dont la violence de l'opposition aux théories de Cantor est difficilement compréhensible si on ne reste que dans le domaine des mathématiques...), Poincaré et toute l'école française d'analyse (Borel, Baire, Lebesgue, ... à l'exception de Hadamard) et surtout Brouwer et Weyl, fondateurs de l'*intuitionnisme*. De l'autre côté, Dedekind, Peano, Frege, Russell, Hilbert et les écoles dites *logiciste* et *formaliste*. Entre Hilbert et Brouwer, les débats ne seront pas que mathématiques...

Les premiers pensent avec Kronecker et Poincaré, que les seuls objets mathématiques acceptables sont ceux qui peuvent être construits à partir des nombres entiers naturels en un nombre fini d'étapes ou peuvent être définis complètement par un nombre fini de mots. Brouwer, Weyl et leurs "héritiers" prônent l'autonomie des objets mathématiques par rapport à la logique, rejettent le principe du tiers exclu et n'acceptent que les résultats d'existence dont les démonstrations sont constructives. L'autre camp crie à la folie et à l'infaisabilité. Avec Hilbert, les *formalistes* refusent de renoncer au "*paradis cantorien*", posent la non-contradiction comme critère suffisant d'existence mathématique et défendent l'idée qu'une axiomatisation rigoureuse lèverait les paradoxes et contradictions engendrés par la théorie "naïve" des ensembles (Gödel et Russell montreront le caractère vain de cet espoir). Les *logicistes* tenteront d'axiomatiser la logique de façon à construire un langage universel (le rêve de Leibniz...).

La violence des oppositions interroge nécessairement sur les enjeux des débats. Ils sont souvent extra-mathématiques et renvoient à des positions philosophiques, métaphysiques voire théologiques (ce que Cantor, par exemple, avance explicitement dans ses premiers articles...). Ils ont surtout une longue histoire derrière eux. C'est ce que nous allons tenter d'éclairer dans le paragraphe suivant.

2 Philosophie de l'infini

En fait, ce débat est aussi celui, millénaire, sur l'infini en philosophie. Aristote formule clairement le problème. Pour lui, l'infini est lié au quantitatif, "il est dans la quantité"; les autres catégories de l'être (substance, qualité, lieu...) ne peuvent entrer en relation avec lui que "par accident, existant à titre de telle ou telle quantité". Par ailleurs, ce qui amène à croire en la réalité de l'infini c'est, par exemple, le temps, la division des grandeurs. Du "temps" et de la "division des grandeurs", il déduira la possibilité de l'infini en puissance (ou potentiel). La représentation, pour Aristote, mène à postuler l'existence d'un infini en acte mais "il est inconvenant d'ajouter foi à la représentation, car l'excès et le défaut ne se produisent pas dans la chose, mais dans la représentation". Il pose que l'infini en acte, comme totalité achevée, n'a pas de sens. Il n'existe pas et, en adoptant cette position, il ne pense pas limiter "les considérations des mathématiciens" puisque, en réalité, "ils n'ont pas besoin et ne font point usage de l'infini mais seulement des grandeurs aussi grandes qu'ils voudront, mais limitées".

Autour de ces positions d'Aristote s'organiserait un débat millénaire. Pour E. Levinas, ce n'est que par la rupture avec la notion quantitative de l'infini que la contradiction que représente l'infini actuel sera surmontée dans l'histoire philosophique de ce concept. L'infini actuel de Cantor, quant à lui, n'a qu'un sens "rigoureusement opératoire relevant d'une modification de l'axiomatique". Ce même auteur résume par ces quelques questions les problèmes que pose l'infini:

- L'infini actuel a-t-il un sens? N'est-il qu'une idée régulatrice, un simple mot ou équivaut-il à l'être même?
- Connaît-on l'infini à partir du fini ou le fini sur fond d'infini? (problème de la priorité de l'infini).

Sans doute considérera-t-on qu'il est caricatural de résumer la nature des réponses qui ont été apportées à ces questions en affirmant qu'elles sont irrémédiablement contradictoires selon que les conceptions philosophiques relèvent du *matérialisme* ou de l'*idéisme* (philosophique, est-il utile de le rajouter?).

Il apparaît pourtant que ceux qui s'attacheront à défendre, par la réfutation des théories d'Aristote, la réalité de l'infini actuel identifieront ce concept à celui de l'infinité de Dieu, donc à la priorité de l'idée. Pour Philon d'Alexandrie (-20 av. J.-C.-50 après J.-C.), "...c'est Dieu lui-même qui est appelé lieu du fait qu'Il contient toutes choses et n'est contenu absolument par rien, qu'Il est le refuge de toutes choses et parce qu'Il est son propre lieu, étant contenu en lui-même et enveloppé par lui seul. Saint Augustin (354-430), quant à lui, pensera que "ce serait ramener Dieu à l'humain que de lui interdire d'embrasser l'infini". Jean Philopon (5ème-6ème siècle), connu dans la tradition arabe sous le nom de Yahya Al-nahwi (Jean le grammairien) pour sa critique d'Aristote, tentera de démontrer que l'être de l'infini en puissance (potentiel) est équivalent à l'être de l'infini actuel. Le théologien musulman Al-Nazzam (m. 845) soutient la thèse de l'infini divisibilité de la matière et proposera de caractériser le fini par sa modification par l'augmentation ou la diminution. Pour Jean Damascène (675-750), "la divinité est à la fois incompréhensible et infinie et c'est seulement ce qu'on peut en comprendre: son infinité et son incompréhensibilité". Thabit ibn Qurra (826-901), sans doute le premier à ébaucher une arithmétique de l'infini mathématique, défendra, comme le fera plus tard Avicenne (980-1037), la possibilité pour les âmes d'être en nombre infini et d'être l'objet de la science divine. La renaissance installera solidement la thèse que par l'infini on connaît le fini. Cette priorité intellectuelle et ontologique de l'infini sera soutenue en particulier par Descartes (mais aussi par Malebranche, Pascal et Leibniz) pour qui l'idée de Dieu est innée à l'âme. Leibniz écrira: "Je suis tellement pour l'infini actuel qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre comme on le dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affiche partout pour mieux marquer la perfection de son Auteur".

Pour Hegel, dans la *Logique*, "le fini, c'est quelque chose qui est posé avec sa frontière immanente comme la contradiction de lui-même par laquelle il renvoie et est poussé hors de lui-même". "Il est le mode, commente Lévinas, selon lequel l'infini se révèle". Kant, quant à lui, se démarquera de Descartes: le fini n'est pas compris ou connu sur fond d'infini. Il se rapproche sans doute plus d'Aristote lorsqu'il soutient que l'infini actuel n'est qu'une idée régulatrice ne constituant pas le donné, et que, suivant le commentaire de Lévinas, "l'infini de l'idée ne s'actualise qu'au prix d'une illusion appelée apparence transcendante, la Raison sautant illicitement par-dessus le temps". Heidegger rajoutera plus tard que la finitude de l'être n'équivaut pas à la négation de l'infini mais que "rien ne répugne aussi radicalement à l'ontologie que l'idée d'un être infini".

Il est arbitraire de clore ce tour d'horizon philosophique à ce niveau mais il est amplement suffisant pour notre propos. Clairement, me semble-t-il, "la grande dispute" des mathématiciens s'apparente aux divergences philosophiques sur le concept d'infini. On pourrait sans doute rattacher -mais cela demanderait certainement une démonstration plus rigoureuse- l'école *intuitionniste* à Kant ou Hegel et les logicistes ou formalistes à la tradition cartésienne, au moins si est adoptée la ligne de départage que suggèrent les deux questions précédemment formulées.

3 En conclusion

Au vu de tout ce qui vient d'être écrit, il est difficile de considérer avec Lévinas, que du point de vue philosophique, la question de l'infini ait été résolue dès lors qu'elle a été extraite du carcan du quantitatif. On le voit, les antagonismes, et donc le débat, persistent. Du reste, la théorie mathématique de l'infini n'a pas réglé tous les paradoxes que fait surgir l'infini actuel de Cantor. La théorie des ensembles, même lorsque des axiomes sont rajoutés pour "légitimer" les nombres transfinis, n'arrive pas à expliquer des paradoxes comme celui de Banach-Tarski. La position actuelle de la majorité écrasante des mathématiciens qui consiste à "faire comme si de rien n'était" n'a peut-être pas d'alternative dans l'état actuel des connaissances. La pression de l'économique et l'extraordinaire développement des moyens de calcul semblent pousser progressivement vers une réhabilitation des idées essentielles de l'*intuitionnisme*, dont les fondements n'induisent pas de paradoxes connus mais surtout une difficulté bien plus grande de résolution des problèmes. Un mathématicien se contente de moins en moins des résultats d'existence car ces moyens de calcul permettent aujourd'hui d'être plus constructif.

4 Bibliographie succincte

Le choix est évidemment arbitraire mais je propose ici les ouvrages ou articles sur lesquels je me suis essentiellement appuyé. A développer...

References

- [1] Tony Lévy : Figures de linfini, les mathématiques au miroir des cultures (Seuil, 1987).
- [2] Emmanuel Lévinas, L'infini, Encyclopédie Universalis.