Arbres dyadiques et super-réflexivité

Perreau Yoël

Vendredi 6 Avril 2018

X Banach réel

$$\begin{array}{cccccc} \pi_X : & X & \to & X^{**} & & \\ & x & \mapsto & \pi_X(x) : & X^* & \to & \mathbb{R} \\ & & & & x^* & \mapsto & x^*(x) \end{array}$$

H.B. $\Longrightarrow$ $\|\pi_X(x)\| = \|x\|$ (π_X isométrie linéaire)

Réflexivité

X réflexif : π_X surjective

Exemples

$1 < p < \infty$: l_p, L_p réflexifs
c_0, l_1, l_∞, L_1, L_∞, $C([0,1])$ non-réflexifs

X, Y Banach réels

Super-réflexivité

$\star$ Y finiment crûment représentable dans X (f.c.r.) : $\exists C > 0$:
$\forall F$ s.e.v. Y, $\dim F < \infty$, $\exists E$ s.e.v. X, $\exists T : F \to E$ linéaire bijective :

$$\|T\| \left\|T^{-1}\right\| \leq C$$

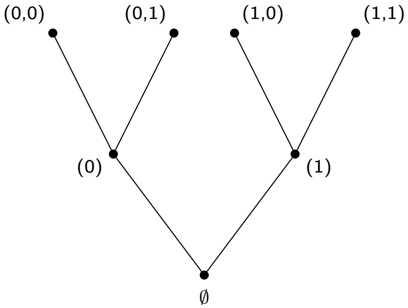
$\star$ X super-réflexif : tout Banach Z f.c.r. dans X est réflexif

Exemples

$1 < p < \infty$: l_p, L_p super-réflexifs

Arbres dyadiques

$D_N = \{\emptyset\} \cup \bigcup_{n=1}^{N} \{0,1\}^n$



Notations :

⋆ $|s|$: longueur de la suite s

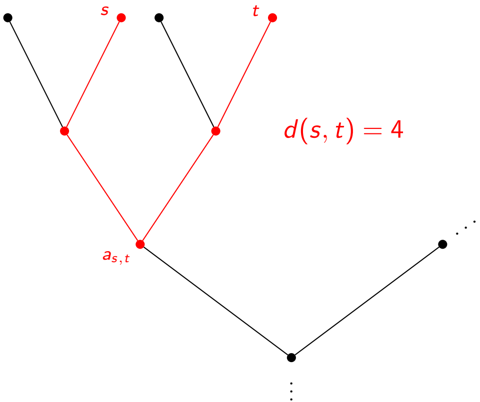
⋆ $s \leq t$: la suite t prolonge la suite s

⋆ $a_{s,t}$: plus proche ancêtre commun aux suites s et t

Distance sur D_N

longueur du plus court chemin entre deux points du graphe

$$d(s,t) = d(s, a_{s,t}) + d(a_{s,t}, t) = |s| - |a_{s,t}| + |t| - |a_{s,t}|$$



X Banach réel

Plongements Lipschitz

$f : D_N \to X$ plongement Lipschitz ($f : D_N \underset{L}{\hookrightarrow} X$) : $\exists A, B > 0$:

$$\forall s, t \in D_N,\ \ Ad(s,t) \leq \|f(s) - f(t)\| \leq Bd(s,t)$$

Théorème de Bourgain

X non-super-réflexif $\iff \exists C > 0 :\ \forall N \geq 1,\ \exists f_N : D_N \underset{L}{\hookrightarrow} X$:

$$\operatorname{Lip}(f_N) \operatorname{Lip}\left(f_N^{-1}\right) \leq C$$

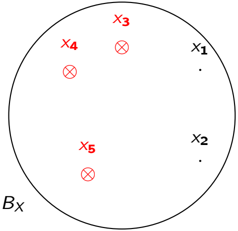
X non-super-réflexif, $N \geq 1$, $0 < \theta < 1$, $n = |D_N|$

Critère de James

il existe $x_1, \dots, x_n \in B_X$ et il existe $x_1^*, \dots, x_n^* \in B_{X^*}$ tels que :

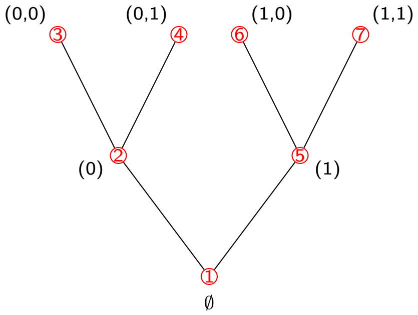
$$x_k^*(x_l) = \begin{cases} \theta \text{ si } k \leq l \leq n \\ 0 \text{ si } l < k \leq n \end{cases}$$

x_k^* charge les points de coordonnées plus grandes que k



action de x_3^* sur $x_1, \dots, x_5$

$\Phi : D_N \to \{1, \ldots, n\}$ énumération des points de D_N dans l'ordre lexicographique



Choix du plongement

$$f(s) = \sum_{u \leq s} x_{\Phi(u)}$$

⋆ simplification cruciale :

$$f(s) - f(t) = \sum_{a_{s,t} < u \leq s} x_{\Phi(u)} - \sum_{a_{s,t} < u \leq t} x_{\Phi(u)}$$

⋆ majoration : $\|x_k\| \leq 1 \implies$

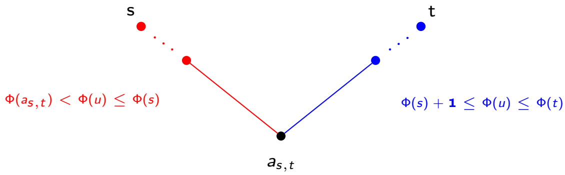
$$\begin{aligned} \|f(s) - f(t)\| &\leq \operatorname{card}\{u \in D_N \ : \ a_{s,t} < u \leq s\} + \operatorname{card}\{u \in D_N \ : \ a_{s,t} < u \leq t\} \\ &= d(a_{s,t}, s) + d(a_{s,t}, t) \\ &= d(s,t) \end{aligned}$$

$\star$ rappel : $\forall x \in X,\ \forall x^* \in X^* :\ |x^*(x)| \leq \|x^*\|\,\|x\|$

$\|x_k^*\| \leq 1 \implies$

$$\begin{aligned}\|f(s)-f(t)\| &\geq |x_k^*(f(s)-f(t))| \\ &= \left| \sum_{a_{s,t}<u\leq s} x_k^*\left(x_{\Phi(u)}\right) - \sum_{a_{s,t}<u\leq t} x_k^*\left(x_{\Phi(u)}\right) \right|\end{aligned}$$

$\Phi(s) \leq \Phi(t)$



$x^*_{\Phi(a_{s,t})}$ charge tous les points $\Longrightarrow$

$$\|f(s) - f(t)\| \geq \theta d(a_{s,t}, s) - \theta d(a_{s,t}, t)$$

$x^*_{\Phi(s)+1}$ charge seulement les points de la branche $a_{s,t} - t$ $\Longrightarrow$

$$\|f(s) - f(t)\| \geq \theta d(a_{s,t}, t)$$

$\star$ minoration :

$$3\left\|f(s)-f(t)\right\| \geq \theta d(a_{s,t},s)+\theta d(a_{s,t},t)=\theta d(s,t)$$

Conclusion

$$\frac{\theta}{3}d(s,t) \leq \left\|f(s)-f(t)\right\| \leq d(s,t)$$

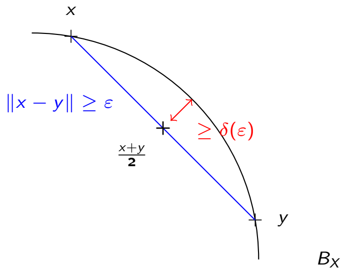
X Banach réel

Convexité uniforme

$\star$ X uniformément convexe : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$:

$$\forall x, y \in B_X,\ \|x - y\| \geq \varepsilon \implies \frac{\|x+y\|}{2} \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

$\star$ X p-uniformément convexe $(p \geq 1)$: $\exists c > 0 :\ \forall \varepsilon > 0,\ \delta(\varepsilon) \geq c\varepsilon^p$



Théorème d'Enflo-Pisier

X super-réflexif $\iff$ X admet une norme équivalente p-uniformément convexe

Minoration de la distortion

X p-uniformément convexe, $N \geq 1$, $f : D_N \underset{L}{\hookrightarrow} X$

$$\mathrm{Lip}\,(f)\,\mathrm{Lip}\,(f^{-1}) \gtrsim \ln(N)^{\frac{1}{p}}$$

Thanks for listening !