Université de Franche-Comté
Licence de Mathématiques, Semestre 6, 2018-19

Discrétisation des EDPs
Feuille de TP n^{o}1
Méthodes à un pas pour les EDO

On considère le problème de Cauchy

$$(\text{P}) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \text{ pour } t \in (0, T) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

où $T > 0$ et y_0 sont donnés et où la solution (exacte) y_{ex} de (P) peut-être à valeurs vectorielles.

Approximation de (P) :
Pour $N \in \mathbb{N}^*$ donné, on pose $h = \frac{T}{N}$ puis $\forall n \in [\![0, N]\!]$, $t_n = nh$ et on note y_n une approximation de $y_{ex}(t_n)$.
On va alors étudier quelques méthodes d'approximations vues en cours :

- *Euler explicite :* $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$
- *Heun :* $\left| \begin{array}{rcl} z_{n+1} &=& y_n + hf(t_n, y_n) \\ y_{n+1} &=& y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, z_{n+1})\right) \end{array} \right.$
- *Runge-Kutta classique (RK4) :* $\left| \begin{array}{rcl} k_{n,1} &=& f(t_n, y_n) \\ k_{n,2} &=& f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_{n,1}) \\ k_{n,3} &=& f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_{n,2}) \\ k_{n,4} &=& f(t_n + h, y_n + hk_{n,3}) \\ y_{n+1} &=& y_n + \frac{h}{6}\left(k_{n,1} + 2k_{n,2} + 2k_{n,3} + k_{n,4}\right) \end{array} \right.$
- *Euler implicite :* $y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$

Consignes-conseils

> Toutes les fonctions seront écrites dans le même fichier `ApproximationsEDP.sci`.
> Faire un script `TP1-Etudes.sce` pour les questions 2 et 3 et un script `TP1-Applications.sce` pour les questions 4 et 5.
> Toutes les représentations graphiques devront contenir un titre ainsi que des légendes pour les axes.

1. *Discrétisation*
   Ecrire une fonction discrétisant uniformément le segment $[0, T]$ en $N + 1$ points.

2. *Schémas numériques*

   (a) Ecrire une fonction `EulerExplicite` approchant la solution de (P) par Euler explicite.

   (b) Pour $f(t, y) = y$, $y(0) = 1$, $T = 2$ et différentes valeurs de h , représenter sur un même graphique la solution de (P) et les différentes solutions approchées.

   (c) Faire de même pour les schémas de Heun, RK4 et Euler implicite (pour ce dernier utiliser la méthode de Newton).

3. *Etude des différentes méthodes : cas du modèle de Verhulst*
   On choisit pour cette question $f(t, y) = y(1 - y)$, $y_0 = 2$, $T = 10$.
   La solution de (P) est alors $y_{ex} : t \mapsto \frac{y_0}{y_0 + (1 - y_0)e^{-t}}$.
   Les questions sont à faire pour chacune des 4 méthodes d'approximation.

   (a) Représenter sur un même graphique la solution exacte et les solutions approchées obtenues pour $h = \frac{1}{4}$, $h = \frac{1}{8}$ puis $h = \frac{1}{16}$.

   (b) Que vaut dans chaque cas l'erreur globale e_h ? En déduire une estimation de l'ordre de convergence de la méthode.

(c) On souhaite affiner l'estimation de l'ordre de convergence obtenu à la question précédent. Calculer l'erreur globale e_h lorsque N varie de 10 à 1000 par pas de 10. Conclure en justifiant votre démarche et en illustrant par un graphique.

On va utiliser les méthodes précédentes pour étudier quelques propriétés de modèles issus de la dynamique des populations.

4. *Applications : dynamique des populations (modèles à une seule population)*

Tous les modèles sont obtenus en faisant des hypothèses de base sur la dynamique des populations en présence. Ainsi par exemple, si on suppose qu'une population s'accroît proportionnellement au nombre d'individus, désignant par $y(t) \geq 0$ la taille de la population au temps t, on obtient :

$$y'(t) = \tau y(t) \text{ modèle à croissance exponentielle ou Malthusien}$$

où le taux de croissance $\tau \in \mathbb{R}$ est supposé connu. Ce modèle, très simple, ne tient pas compte d'éventuelles limites à la croissance de la population qui peut tendre vers l'infini (cas $\tau > 0$)...
Si, de manière plus réaliste, on suppose que la population ne peut dépasser un certain seuil $\kappa > 0$, on obtient

$$y'(t) = \tau y(t)\left(1 - \frac{1}{\kappa} y(t)\right) \text{ modèle à croissance logistique ou de Verhulst}$$

On prend $\tau = \kappa = 1$ dans ce dernier modèle (voir question 3).

Choisir une des méthodes d'approximations précédentes qui soit d'ordre au moins 2, pour représenter sur un même graphique les différents comportements de la solution de (P) suivant les valeurs de la condition initiale $y_0 \geq 0$. Utiliser la souris pour sélectionner graphiquement y_0 (voir commande `xclick` et options `rec` et `style` de `plot2d`)

5. *Applications : cas de modèles à deux populations*

On généralise le modèle logistique au cas de deux espèces cohabitantes : une proie et un prédateur. Si $y_1(t) \geq 0$ et $y_2(t) \geq 0$ désignent les tailles respectives de ces propulations à l'instant t, elles satisfont le système différentiel

$$(LV) \left\{ \begin{array}{l} y_1'(t) = y_1(t)(\alpha - \beta y_2(t)) \\ y_2'(t) = y_2(t)(-\gamma + \delta y_1(t)) \\ y_1(0) = y_{10},\ y_2(0) = y_{20} \end{array} \right. \quad : \text{modèle prédateur-proie ou de Lotka-Volterra}$$

Dans la suite on prendra : $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = 2$ et $\delta = 1$.

(a) Déterminer les solutions stationnaires de (LV).

(b) On prend $y(0) = (1, \frac{1}{2})$ et $T = 20$.

i. Déterminer la solution approchée par chacune des 4 méthodes.

ii. Pour chaque schéma, représenter dans une même fenêtre les deux composantes de la solution et utiliser la commande `subplot` pour visualiser les 4 paires simultanément.

iii. Représenter simultanément dans 4 sous fenêtres les *diagrammes de phase* (ie. les points de coordonnées $y_n = (y_{1,n}, y_{2,n})$).

iv. On admettra que la fonction définie par $H(a, b) = a + b - 2\ln(a) - \ln(y)$ est constante le long des trajectoires. Représenter $H(y_h) - H(y(0))$ pour chacune des 4 méthodes.

(c) *Etude de stabilité des solutions stationnaires*
On dit qu'une solution stationnaire u est STABLE si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \|y_0 - u\| \leq \eta \Longrightarrow \forall t > 0,\ \|y(t) - u\| < \varepsilon$$

où y est la solution de (LV) pour $y(0) = y_0$.

i. Utiliser RK4 pour étudier graphiquement la stabilité de la solution stationnaire $(0, 0)$.
Pour cela, représenter dans la même fenêtre les diagrammes de phase de la solution stationnaire et de différentes solutions. Utiliser les 3 boutons de la souris : un pour sélectionner graphiquement y_0, un autre pour zoomer ($\times 2$) et le dernier pour quitter (voir commande `zoom_rect`).

ii. Faire de même pour la solution stationnaire $(2, 1)$.