N° attribué par la Bibliothèque

ACADÉMIE DE BORDEAUX | 0 | 4 | P | A | U | U | 3 | 0 | 1 | 2 |

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES EXACTES ET DE LEURS APPLICATIONS

par

Ulrich Jerry RAZAFISON

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

Spécialité :
MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

THÉORIE L^p AVEC POIDS POUR LES EQUATIONS D'OSEEN DANS DES DOMAINES NON BORNÉS

Soutenue le 01 juillet 2004 :

Après avis de :

Mme. V. GIRAULT		Maître de Conférences HDR, Université Pierre et Marie Curie, Paris	**Rapporteur**
M.	**A. NOVOTNÝ**	Maître de Conférences HDR, Université de Toulon et du Var	**Rapporteur**

Devant la commission d'examen formée de :

M.	**J-M. THOMAS**	Professeur, Université de Pau et des Pays de l'Adour	**Président du jury**
M.	**C. AMROUCHE**	Professeur, Université de Pau et des Pays de l'Adour	**Directeur de Thèse**
M.	**T. COLIN**	Professeur, Université de Bordeaux I	**Examinateur**
M.	**J-M. ROQUEJOFFRE**	Professeur, Université de Paul Sabatier Toulouse	**Examinateur**

- 2004 -

Remerciements

Je voudrais exprimer tous mes remerciements à Monsieur Chérif Amrouche pour m'avoir proposé ce sujet de thèse ainsi que pour sa rigueur et son enthousiasme dans la direction de ce travail. Il m'a initié à l'univers des espaces avec poids et son soutien sans limite, ses encouragements, ainsi que son exigence de clarté m'ont beaucoup apporté. Je lui en suis très reconnaissant.

Je remercie vivement Madame Vivette Girault et Monsieur Antonín Novotný pour l'honneur qu'ils m'ont fait en rapportant mon travail. Leurs travaux ainsi que leurs remarques et suggestions m'ont été d'une aide précieuse.

Que Monsieur Jean-Marie Thomas trouve ici l'expression de mes plus respectueux remerciements pour avoir accepté d'être président du jury.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Messieurs Thierry Colin et Jean-Michel Roquejoffre qui ont accepté de participer au jury de cette thèse.

C'est avec plaisir que j'exprime mes remerciements à Monsieur Tahar Zamène Boulmezaoud pour l'interêt qu'il a porté à mon travail et pour avoir completé ma formation. Ses remarques et ses suggestions m'ont été très utiles.

J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur Mohamed Amara, Directeur du Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'Université de Pau de m'avoir permis de bénéficier de bonnes conditions de travail dans ce laboratoire.

Un grand merci aux membres du LMA de Pau pour leur accueil sympathique.

À mes parents, qui m'ont toujours aidé, soutenu, encouragé et qui ont suivi mon parcours avec interêt depuis mon départ de Madagascar jusqu'à aujourd'hui, j'adresse toute ma tendresse et ma reconnaissance.

À mes soeurs Candicia, Jessie, à mon frère Adriano, merci pour votre soutien.

À tous mes amis que j'ai connus et cotoyés durant toutes ces années.

Pour mes parents avec amour et admiration,
Pour mes sœurs Candicia et Jessie,
Pour mon frère Adriano.

Une démonstration n'est pas autre chose que la résolution d'une vérité en d'autres vérités déjà connues.

Leibniz.

Table des matières

1 Introduction **3**

2 Cadre fonctionnel et propriétés **9**

2.1 Introduction et notations générales 9

2.2 Rappels sur les espaces $W_{\alpha}^{m,p}$ 10

2.3 Les espaces avec poids $\widetilde{W}_0^{1,p}$ et $\mathcal{M}_0^{1,p}$ 14

2.4 Espaces avec poids anisotropes 19

2.4.1 Définitions et premières propriétés 19

2.4.2 Inégalités de Hardy 25

2.4.3 Inégalités avec des poids vérifiant la condition A_∞ 42

2.4.4 Propriétés fonctionelles d'opérateurs 45

2.4.5 Inégalités de Hardy avec poids logarithmiques 52

3 Le problème stationnaire d'Oseen dans $\mathbb{R}^3$ **61**

3.1 Introduction 61

3.2 Résultats préliminaires 63

3.3 Le modèle scalaire 68

3.3.1 Le noyau de l'opérateur T 68

3.3.2 Résultats d'existence pour le modèle scalaire 69

3.3.3 Un résultat de régularité 93

3.4 Le problème d'Oseen dans $\mathbb{R}^3$ 95

3.4.1 Unicité de la solution 96

3.4.2 Résultats d'existence 97

3.4.3 Un résultat de régularité 111

4 Le problème stationnaire d'Oseen dans $\mathbb{R}^n$ **115**

5 Le problème stationnaire d'Oseen dans un domaine extérieur **145**

5.1 Introduction et notations 145

5.2 Résultats préliminaires 147

5.3 Le cas hilbertien 151

5.4 Le cas général 158

Références bibliographiques **169**

NOTATIONS

Notations générales

p'	exposant conjugué de p, c'est-à-dire $p' = \frac{p}{p-1}$
$r = \|\boldsymbol{x}\|$	norme de $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$
$\rho = 1 + r$	poids
$s = r - x_1$	poids
$\eta_\beta^\alpha = (1+r)^\alpha (1+s)^\beta$	poids anisotropique
$[k]$	partie entière de k
$\mathbb{P}_{\mathrm{j}}$	espaces des polynômes de degré inférieur à j
$\mathbb{P}_{\mathrm{j}} = \{0\}$	si $j < 0$
$\mathbb{P}_{\mathrm{j}}^\Delta$	polynômes harmoniques de $\mathbb{P}_{\mathrm{j}}$
B_R	boule ouverte centrée à l'origine et de rayon R
B_R'	complémentaire de $\overline{B}_R$
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$	ouvert
$\partial\Omega$	frontière de Ω
$\Omega_R = \Omega \cap B_R$	
$\mathcal{E}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi\|\boldsymbol{x}\|}$	solution fondamentale du laplacien
$(\boldsymbol{\mathcal{O}}, \boldsymbol{\mathcal{P}})$	solution fondamentale d'Oseen
$\mathcal{O}$	solution fondamentale du modèle scalaire d'Oseen
$f * g$	produit de convolution des fonctions f et g
E'	espace dual de E
$\mathbf{E} = (E_1, ..., E_n)$	champs de vecteurs
$\mathbf{E} = (E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$	champs de matrices
$\langle \, , \, \rangle_{E',E}$	produit de dualité E', E
$B' \bot X = X^\bot$	l'orthogonal de X, sous-espace fermé de B'
$\mathrm{Supp}\ u$	support de u
$f \sim g$	$c_1\, g \leq f \leq c_2\, g$, c_1, c_2 deux constantes positives
$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n})$	gradient de u
$\mathrm{div}\ \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$	divergence de $\boldsymbol{u}$
$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{u} = (\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j})$	rotationnel de $\boldsymbol{u}$
$\partial^{\boldsymbol{\lambda}} u = \frac{\partial^{\lambda_1 + ... + \lambda_n} u}{\partial x_1^{\lambda_1} ... \partial x_n^{\lambda_n}}$	$\|\boldsymbol{\lambda}\| = \sum_{i=1}^n \lambda_i$

$\boldsymbol{e}_i$, $1 \leq i \leq n$	i ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$
I	matrice identité d'odre n
$\boldsymbol{u}^t$	le transposé du vecteur $\boldsymbol{u}$
S_2	sphère unité de $\mathbb{R}^3$
w_3	aire de S_2
$\boldsymbol{n}$	la normale extérieure à l'ouvert Ω

Espaces fonctionnels

$\mathcal{D}(\Omega)$	espace des fonctions indéfiniments différentiables à support compact dans Ω
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	espace des fonctions à décroissance rapide dans $\mathbb{R}^n$
$\mathcal{D}'(\Omega)$	espace des distributions sur Ω
$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	espace des distributions tempérées dans $\mathbb{R}^n$
$L^p(\Omega)$	ensemble des fonctions u mesurables sur Ω telles que $\int_\Omega \lvert u\rvert^p d\boldsymbol{x} < \infty$
$L^p_{\text{loc}}(\Omega)$	ensemble des fonctions $u \in L^p(\Omega')$ pour tout ouvert borné Ω' avec $\overline{\Omega'} \subset \Omega$
$W^{m,p}(\Omega)$	espace de Sobolev d'ordre m équippé de la norme $\lVert . \rVert_{W^{m,p}(\Omega)}$
$H^m(\Omega)$	espace de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$
$W^{1,p}_0(\Omega')$	adhérence de $\mathcal{D}(\Omega')$ par rapport à la norme $\lVert . \rVert_{W^{1,p}(\Omega')}$, avec Ω' borné
$\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$	adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ par rapport à la norme $\lVert . \rVert_{W^{1,p}(\Omega)}$, avec Ω non borné

Chapitre 1

Introduction

L'étude des écoulements stationnaires de fluides incompressibles autour d'un obstacle, supposé fixe, occupe une place importante dans la mécanique des fluides. Depuis les travaux de C.L.M.H. Navier [43] et de C.G. Stokes [59], on sait que ce problème est décrit par un système d'équations non-linéaires, dit de Navier-Stokes, et s'écrit dans sa forme la plus simple :

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\boldsymbol{u} + \rho\boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\pi = \boldsymbol{f} \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \text{div } \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_* \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.1}$$

On se place ici dans le cas où Ω est un ouvert extérieur de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire le complémentaire d'un compact que nous notons D représentant l'obstacle. La viscosité ν, la densité ρ du fluide, les forces extérieures $\boldsymbol{f}$ et la valeur au bord $\boldsymbol{u}_*$ sont données. Le problème consiste à trouver le champ de vitesses $\boldsymbol{u}$ et la pression π. Par commodité, l'origine du repère est placée à l'intérieur de l'obstacle. Puisque le domaine est non borné, nous devons ajouter au système une condition à l'infini

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_\infty, \tag{1.2}$$

où $\boldsymbol{u}_\infty$ est un vecteur constant de $\mathbb{R}^3$. Ces équations posent de nombreuses questions mathématiques qui restent jusqu'à aujourd'hui sans réponse (voir par exemple [61], [27] et [28]). Il est donc indispensable et naturel de commencer par analyser des

problèmes linéaires les approchant. La linéarisation du système (1.1) se fait autour du vecteur constant $\boldsymbol{u}_\infty$ et deux cas se présentent :
1) Si $\boldsymbol{u}_\infty = \mathbf{0}$, on aboutit aux équations bien connues de Stokes :

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla\pi = \boldsymbol{f} \quad &\text{dans} \quad \Omega, \\ \text{div}\ \boldsymbol{u} = 0 \quad &\text{dans} \quad \Omega, \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_* \quad &\text{sur}\ \partial\Omega, \\ \boldsymbol{u} \to \mathbf{0} \quad &\text{quand} \quad |\boldsymbol{x}| \to \infty. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Mais dans le cas particulier où $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{u}_* = \mathbf{0}$ et Ω est le complémentaire de la sphère unité de $\mathbb{R}^3$, Stokes [59] a construit une solution explicite présentant une symétrie par rapport au centre de la sphère. De plus, si on s'intéresse à la solution fondamentale de Stokes $(\mathbf{U}, \mathbf{P})$, elle s'écrit en dimension 3 :

$$U_{ij}(\boldsymbol{x}) = \left(\delta_{ij}\Delta - \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\Phi(\boldsymbol{x}), \quad P_i(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial\mathcal{E}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}, \tag{1.4}$$

où

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{8\pi r}, \quad r = |\boldsymbol{x}|.$$

Nous pouvons observer que la vitesse fondamentale satisfait $\mathbf{U} = O(r^{-1})$. Elle a donc le même comportement dans toutes les directions de $\mathbb{R}^3$. Or cette propriété n'est pas physiquement réaliste. Les expériences montrent, en effet, que durant l'écoulement d'un fluide autour d'un obstacle, apparaît à l'arrière de celui-ci, un sillage parabolique. Dans le souci de décrire cette importante propriété de l'écoulement, Oseen proposa en 1910 (voir [47] et aussi [48]) une linéarisation autour d'un vecteur $\boldsymbol{u}_\infty$ non nul.

2) Si $\boldsymbol{u}_\infty \neq \mathbf{0}$, par un changement éventuel de repère, on suppose de plus que $\boldsymbol{u}_\infty = h\boldsymbol{e}_1$ où h est un réel strictement positif. En posant $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}_\infty$, on aboutit

aux équations d'Oseen suivantes :

$$
\begin{aligned}
-\nu\Delta \boldsymbol{v} + k\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_1} + \nabla\pi = \boldsymbol{f} \quad \text{dans} \quad \Omega,\\
\operatorname{div}\, \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega,\\
\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_* - \boldsymbol{u}_\infty \quad \text{sur}\ \partial\Omega,\\
\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{0} \quad \text{quand} \quad |\boldsymbol{x}| \to \infty,
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

où $k = \rho h > 0$. Nous pouvons déjà observer que le terme $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_1}$ est une des différences entre les modèles (1.3) et (1.5). Une autre différence vient de la solution fondamentale d'Oseen $(\boldsymbol{\mathcal{O}}, \boldsymbol{\mathcal{P}})$ qui est de la forme

$$
\mathcal{O}_{ij}(\boldsymbol{x}) = \left(\delta_{ij}\Delta - \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\Phi(\boldsymbol{x}), \quad \mathcal{P}_i(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \mathcal{E}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}, \tag{1.6}
$$

mais maintenant,

$$
\Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi k}\int_0^{ks/2\nu} \frac{1 - e^{-t}}{t}\, dt, \quad s = r - x_1.
$$

Le terme s représente la structure anisotrope des équations d'Oseen (1.5) et montre l'existence d'un sillage parabolique à l'arrière de l'obstacle. En effet, la région $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3,\ 0 \le s \le 1\}$ représente une paraboïde symétrique par rapport à l'axe $(0, x_1)$. Par ailleurs, le comportement asymptotique de la vitesse fondamentale est $\boldsymbol{\mathcal{O}}(\boldsymbol{x}) = O(r^{-1}(1+s)^{-1})$. Nous pouvons donc constater que dans la région paraboloïdale, $\boldsymbol{\mathcal{O}}(\boldsymbol{x}) = O(r^{-1})$, alors qu'à l'extérieur, $\boldsymbol{\mathcal{O}}(\boldsymbol{x}) = O(r^{-2})$. Autrement dit, le comportement de la vitesse fondamentale diffère selon que l'on se situe à l'intérieur ou à l'extérieur du sillage. Les résultats de l'approximation d'Oseen sont ainsi plus satisfaisantes que ceux de Stokes.

L'objet de cette thèse est d'étudier le problème d'Oseen (1.5) avec la perspective d'utiliser les résultats obtenus pour l'analyse du modèle de Navier-Stokes (1.1), et ainsi, apporter notre modeste contribution à une meilleure compréhension de (1.1). Dans cette optique, l'étude de (1.5) repose sur une théorie L^p. En effet, dans un domaine non borné, une théorie hilbertienne ne suffit pas pour décrire complètement les différentes propriétés des solutions, dans le cas présent, le comportement à l'infini. Cette dernière propriété nous amène à choisir les espaces de Sobolev avec poids comme cadre fonctionnel de notre étude. Afin de prendre en compte le sillage, un poids anisotrope est aussi considéré et celui-ci est donné par le comportement asymptotique de la vitesse fondamentale d'Oseen $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ dont nous rappelons qu'elle se comporte comme $r^{-1}(1+s)^{-1}$. Par ailleurs, pour ses dérivées successives on a :

$$\nabla \boldsymbol{\mathcal{O}}(\boldsymbol{x}) = O(r^{-3/2}(1+s)^{-3/2}), \quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{O}}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j} = O(r^{-2}(1+s)^{-2}), \quad \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{O}}(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} = O(r^{-2}(1+s)^{-1}).$$

Il est ainsi naturel de considérer le poids anisotrope η_β^α défini par

$$\eta_\beta^\alpha = (1+r)^\alpha (1+s)^\beta.$$

Faisons à présent un rapide survol des travaux consacrés au problème (1.5). Les premières études complètes sont dues à Faxén [24] qui généralise les méthodes introduites par Odqvist [45] pour le problème de Stokes. Plus récemment, en utilisant la méthode de Galerkin, Finn [25] établit l'existence de solutions pour le problème (1.5) incluant des estimations avec poids. Il montre, en particulier, que si $r\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$, alors le système (1.5) admet une vitesse $\boldsymbol{u}$ qui tend vers zéro à l'infini, dans le sens $r^{-1}\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ (pour la définition de la limite, voir chapitre 3, définition 3.3 et remarque 3.4). Dans [13], Babenko utilise le théorème des multiplicateurs de Lizorkin [40] pour établir l'existence de solutions au problème d'Oseen. Les résultats de Finn et de Babenko sont ensuite étendus et généralisés par Galdi dans [26] et [27]. Nous citons également Farwig [21], [20] qui étudie (1.5) dans des espaces L^2 avec le poids anisotrope η_β^α. Il considère l'espace :

$$L^2_{\alpha,\beta}(\Omega) = \{u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega),\ \eta_\beta^\alpha u \in L^2(\Omega)\}$$

et montre l'existence de solutions qui s'écrivent explicitement comme la convolée par la solution fondamentale. Il étudie pour cela les opérateurs $\boldsymbol{f} \to \boldsymbol{\mathcal{O}} * \boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{f} \to \nabla \boldsymbol{\mathcal{O}} * \boldsymbol{f}$ dans les espaces $L^2_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$ et les estimations obtenues sur le premier opérateur sont en fait améliorées par l'étude du modèle scalaire

$$\begin{aligned} -\nu\Delta u + k\frac{\partial u}{\partial x_1} &= f \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ u &= u_* \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Les estimations sur les deux opérateurs ont été étendues aux espaces $L^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$ dans [36] (voir aussi [51]) avec $1 < p < \infty$. Dans [22] et [23], le problème d'Oseen posé dans tout l'espace $\mathbb{R}^n$ est étudié dans les espaces $L^p_{\alpha,0}(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire $\beta = 0$.

Le plan de notre travail est le suivant :
Dans le chapitre 2, nous présentons les espaces de Sobolev avec poids isotropes (c'est-à-dire $\beta = 0$) et anisotropes que nous utiliserons. Dans un premier temps, on montre des résultats de densité. Dans un deuxième temps, on établit des inégalités de Hardy avec poids anisotropes qui sont les principaux résultats du chapitre. Elles jouent un rôle fondamental dans la recherche de solutions pour des forces $\boldsymbol{f}$ appartenant à des espaces du type $\boldsymbol{W}^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ avec poids anisotropes. Elles permettent aussi de démontrer des résultats d'isomorphisme des opérateurs gradient, divergence et laplacien.
Dans le chapitre 3, nous commençons l'étude des équations d'Oseen par le problème suivant :

$$-\Delta \boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} + \nabla\pi = \boldsymbol{f}, \quad \text{div } \boldsymbol{u} = g \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3. \tag{1.8}$$

Le fait de travailler d'abord sur $\mathbb{R}^3$ nous permet de nous concentrer uniquement sur le comportement à l'infini. Nous verrons que le trait essentiel de notre analyse est la résolution, dans une première partie, du modèle scalaire :

$$-\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x_1} = f \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3. \tag{1.9}$$

L'équation (1.9) peut être considérée comme le problème de base à étudier pour traiter les équations d'Oseen.
Dans le chapitre 4, qui constitue un travail fait en collaboration avec T. Z. Boulmezaoud, nous résolvons à nouveau les équations (1.8) posées dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Le cadre fonctionnel choisi se limite aux espaces avec poids isotropes. Le but de l'étude est

d'étendre, dans ce cadre, les résultats d'existence et d'unicité du chapitre précédent. Dans une première partie nous analysons les relations qui lient le modèle scalaire (1.9) et le problème (1.8).
Enfin dans le dernier chapitre, nous étudions le problème d'Oseen général

$$\begin{aligned} -\Delta \boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi = \boldsymbol{f}, \quad \text{dans } \Omega, \\ \text{div } \boldsymbol{u} = g \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_* \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.10}$$

où Ω est un ouvert extérieur de $\mathbb{R}^3$ que l'on supposera au moins lipschitzien. On résout (1.10) en associant les résultats établis dans $\mathbb{R}^3$ avec ceux obtenus dans un domaine borné. Cette idée a été développée par Giroire dans [32]. Nous commencerons d'abord par démontrer l'existence et l'unicité d'une solution dans le cas hilbertien avant de terminer l'étude avec le cas général.

Chapitre 2

Cadre fonctionnel et propriétés

2.1 Introduction et notations générales

Dans ce chapitre, nous introduisons le cadre fonctionnel qui permet la résolution du problème d'Oseen dans des domaines non bornés. Dans de tels domaines, il est nécessaire de décrire le comportement à l'infini des fonctions. Nous introduisons pour cela les espaces de Sobolev avec poids qui sont un bon cadre pour les problèmes posés dans des domaines extérieurs. Sans être exhaustif, nous citons [34], [32], [6], [7], [16] et [54] pour le problème de Laplace, [31], [29], [30], [2], [3], [15], [56], [57] et [58] pour le problème de Stokes, enfin, [21], [20], [22], [23], [36] et [51] pour le problème d'Oseen. Nous citons aussi d'autres travaux tels que [37]. L'écoulement d'un fluide autour d'un obstacle présentant une direction privilégiée, nous introduisons aussi des espaces de Sobolev avec poids anisotropes. Nous présentons des propriétés de ces espaces, en particulier les inégalités de Hardy qui sont les principaux résultats de ce chapitre.

Nous commençons par donner les premières notations et définitions. Dans ce mémoire, le réel p apppartiendra toujours à l'intervalle $]1, +\infty[$. Nous notons p' le conjugué de p, c'est-à-dire $p' = \frac{p}{p-1}$. La dimension de l'espace sera notée n. Pour tout espace B, nous désignons en caractère gras $\mathbf{B}$, l'espace $B^n = (B_1, ..., B_n)$ ou l'espace $B^{n^2} = (B_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Nous notons par $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ un point de $\mathbb{R}^n$ et sa distance à l'origine par

$$r = |\boldsymbol{x}| = (x_1 + x_2 + ... + x_n)^{1/2}.$$

Nous notons $[k]$ la partie entière de k. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}_{\mathrm{j}}$ désigne l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à j. L'espace $\mathbb{P}_{\mathrm{j}}^{\Delta}$ est constitué de polynômes de $\mathbb{P}_{\mathrm{j}}$ qui sont harmoniques. Nous notons par B_R la boule ouverte centrée à l'origine et de rayon R. Si Ω est un ouvert, Ω_R désigne $\Omega \cap B_R$. Nous rappelons que $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions dans Ω et que $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions tempérées dans $\mathbb{R}^n$. Pour un espace de Banach B donné et X un sous-espace fermé de B, nous notons par $B' \perp X$ l'orthogonal de X dans le dual B' de B, c'est-à-dire

$$B' \perp X = X^{\perp} = \{f \in B', \forall v \in X, \langle f, v \rangle = 0\} = (B/X)'.$$

Enfin C désigne une constante générique strictement positive.

2.2 Rappels sur les espaces $W_{\alpha}^{m,p}$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$, posons

$$k = k(m,n,p,\alpha) = \begin{cases} -1 & \text{si } \dfrac{n}{p} + \alpha \notin \{1, ..., m\} \\ m - \dfrac{n}{p} - \alpha & \text{si } \dfrac{n}{p} + \alpha \in \{1, ..., m\}. \end{cases}$$

On définit la famille d'espaces avec poids $W_{\alpha}^{m,p}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} W_{\alpha}^{m,p}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega); \forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^n,& \\ & 0 \leq |\boldsymbol{\lambda}| \leq k, \;\; \rho^{\alpha-m+|\boldsymbol{\lambda}|}(\ln(1+\rho))^{-1}\partial^{\boldsymbol{\lambda}} u \in L^p(\Omega), \\ & k+1 \leq |\boldsymbol{\lambda}| \leq m, \;\; \rho^{\alpha-m+|\boldsymbol{\lambda}|}\partial^{\boldsymbol{\lambda}} u \in L^p(\Omega)\} \end{aligned}$$

et on note

$$\|u\|_{W_{\alpha}^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\boldsymbol{\lambda}| \leq k} \|\rho^{\alpha-m+|\boldsymbol{\lambda}|}(\ln(1+\rho))^{-1}\partial^{\boldsymbol{\lambda}} u\|_{L^p(\Omega)}^p \right. \\ \left. + \sum_{k+1 \leq |\boldsymbol{\lambda}| \leq m} \|\rho^{\alpha-m+|\boldsymbol{\lambda}|}\partial^{\boldsymbol{\lambda}} u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

la norme de $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ qui le munit d'une structure d'espace de Banach réflexif. Nous définissons aussi la semi-norme

$$|u|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\boldsymbol{\lambda}|=m} \|\rho^\alpha \partial^{\boldsymbol{\lambda}} u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}.$$

Donnons un exemple d'un tel espace. Si $m = 1$ et $\alpha = 0$, alors l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega), \rho^{-1}u \in L^p(\Omega), \nabla u \in \boldsymbol{L}^p(\Omega)\}, \text{ si } p \neq n,$$
$$W_0^{1,n}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega), (\ln(1+\rho))^{-1}\rho^{-1}u \in L^n(\Omega), \nabla u \in \boldsymbol{L}^n(\Omega)\}.$$

Nous considérons le cas où l'ouvert Ω est l'espace entier $\mathbb{R}^n$ ou le cas d'un domaine extérieur. Les poids contrôlent le comportement à l'infini des fonctions appartenant à $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$. Ils ont été choisis afin d'obtenir des inégalités de types Hardy que nous allons rappeler dans la suite. Nous pouvons remarquer que le poids logarithmique n'apparaît que pour les valeurs de m, n, p, α telles que

$$\frac{n}{p} + \alpha \in \{1, ..., m\}. \tag{2.1}$$

Les valeurs de m, n, p et α qui vérifient la condition (2.1) seront appelées valeurs critiques. Nous rappelons maintenant quelques propriétés de ces espaces. Les espaces $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ coïncident localement avec les espaces de Sobolev classiques. Ainsi les traces de ces fonctions sur $\partial\Omega$ vérifient les théorèmes de traces classiques (voir [1], [17] ou [44]). Nous pouvons alors définir l'espace

$$\overset{o}{W}{}_\alpha^{m,p}(\Omega) = \{u \in W_\alpha^{m,p}(\Omega),\ \gamma_0 u = 0, \gamma_1 u = 0, ..., \gamma_{m-1} u = 0\}.$$

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, nous avons l'égalité $\overset{o}{W}{}_\alpha^{m,p}(\Omega) = W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Lorsque $p = 2$, les espaces $W_\alpha^{m,2}(\Omega)$ ont été utilisés par Giroire [32] pour résoudre le problème du laplacien. le cas général étant utilisé par Amrouche, Girault et Giroire [6, 7]. Pour le cas non critique et lorsque $\Omega = \mathbb{R}^2$ ou $\Omega = \mathbb{R}^2_+$, ces espaces ont été employés par Hanouzet [34]. Pour $\Omega = \mathbb{R}^n$, nous citons aussi les travaux de Cantor [18], de Kufner [38] ou d'Opic et Kufner [46]. L'espace $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\overset{o}{W}{}_\alpha^{m,p}(\Omega)$. Ces propriétés sont démontrées dans [6] pour le cas $\Omega = \mathbb{R}^n$ et elles sont étendues à un domaine extérieur par une partition de l'unité (voir aussi [7]). L'espace dual de $\overset{o}{W}{}_\alpha^{m,p}(\Omega)$ est noté $W_{-\alpha}^{-m,p'}(\Omega)$ et c'est un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Lorsque $n/p+\alpha \notin \{1, ..., m\}$, nous avons les injections continues et denses suivantes

$$W_\alpha^{m,p}(\Omega) \subset W_{\alpha-1}^{m-1,p}(\Omega) \subset ... \subset W_{\alpha-m}^{0,p}(\Omega). \tag{2.2}$$

Par ailleurs, pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^n$, l'application

$$u \in W_\alpha^{m,p}(\Omega) \longrightarrow \partial^{\boldsymbol{\lambda}} u \in W_\alpha^{m-|\boldsymbol{\lambda}|,p}(\Omega) \tag{2.3}$$

est continue. Pour tout réel γ, on a

$$|\partial^{\boldsymbol{\lambda}}(\rho^\gamma)| \leq C\rho^{\gamma-|\boldsymbol{\lambda}|}. \tag{2.4}$$

Dans le cas $n/p + \alpha \notin \{1, .., m\}$ et $n/p + \alpha - \gamma \notin \{1, .., m\}$, (2.4) implique que l'application

$$u \in W_\alpha^{m,p}(\Omega) \longrightarrow \rho^\gamma u \in W_{\alpha-\gamma}^{m,p}(\Omega) \tag{2.5}$$

est un isomorphisme. Remarquons que si nous supposons uniquement $n/p + \alpha \notin \{1, .., m\}$, alors l'application (2.5) est continue. Si $j \in \mathbb{N}$, alors l'espace des polynômes de degré inférieur ou égale à j, noté $\mathbb{P}_{\mathrm{j}}$, est inclus dans $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ avec

$$\begin{aligned} j &= \left[m - \frac{n}{p} - \alpha\right], &\qquad \text{si } n/p + \alpha \notin \mathbb{Z}^- \\ j &= m - 1 - \frac{n}{p} - \alpha, &\qquad \text{sinon.} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Nous donnons à présent une propriété fondamentale des espaces $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$.

Théorème 2.1 *Soit Ω un ouvert extérieur lipschitzien. Soient $m \geq 1$ un entier et α un réel, alors il existe une constante positive $C = C(n, p, \alpha)$ telle que*
1)

$$\forall u \in W_\alpha^{m,p}(\Omega), \quad \inf_{\lambda \in \mathbb{P}_{\mathrm{j}'}} \|u + \lambda\|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)} \leq C|u|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)}, \tag{2.7}$$

où $j' = \min(j, 0)$ et j est le plus haut degré des polynômes appartenant à $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$.

2)
$$\forall u \in \overset{o}{W}{}_\alpha^{m,p}(\Omega), \quad \|u\|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)} \leq C|u|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)}. \tag{2.8}$$

Ce sont les inégalités (2.7) et (2.8) qui justifient le choix des poids et, en particulier, l'introduction du poids logarithmique dans la définition de $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ pour les valeurs critiques (2.1). On peut trouver une preuve de ce théorème dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^n$ dans [6] et l'extension à un domaine extérieur Ω se fait par partition de l'unité (voir [7]). Définissons maintenant l'espace

$$\mathbf{H}_p = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^n), \ \text{div } \boldsymbol{v} = 0\}.$$

Le théorème 2.1 permet de montrer que les opérateur gradient et divergence suivants sont des isomorphismes (voir [6]) :

$$\nabla : \ W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{P}_{[1-\mathrm{n/p}]} \to \mathrm{L^p(\mathbb{R}^n)} \perp \mathbf{H}_{\mathrm{p'}}, \tag{2.9}$$

$$\text{div} \ : \ \boldsymbol{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)/\mathbf{H}_{p'} \to W_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}_{[1-\mathrm{n/p}]}. \tag{2.10}$$

Le prochain résultat découle du théorème 2.1 (voir la preuve dans [6]) :

Proposition 2.2 *Soit un entier $m \geq 1$ et une distribution u tel que*

$$\forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^n \ : \ |\boldsymbol{\lambda}| = m, \ \partial^{\boldsymbol{\lambda}} u \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

(i) *Si $1 < p < n$, alors il existe un polynôme $K(u) \in \mathbb{P}_{\mathrm{m}-1}$ tel que $u + K(u) \in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ et*

$$\inf_{\mu \in \mathbb{P}_{[\mathrm{m-n/p}]}} \|u + K(u) + \mu\|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C|u|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.11}$$

(ii) Si $p \geq n$, alors $u \in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ et nous avons

$$\inf_{\mu \in \mathbb{P}_{\mathrm{m}-1}} \|u + \mu\|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C|u|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.12}$$

Remarquons que lorsque $m = 1$, la constante $K(u)$ donnée par la proposition 2.2 i) est unique. Par les injections de Sobolev et le théorème 2.1, nous avons l'injection continue et dense suivante :

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega), \text{ si } 1 < p < n. \tag{2.13}$$

De sorte que nous avons alors la caractérisation de l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ suivante :

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{v \in L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega),\ \nabla v \in \boldsymbol{L}^p(\Omega)\}, \quad \text{avec } 1 < p < n. \tag{2.14}$$

En utilisant le théorème II.5.1 de [26], nous pouvons remarquer que si $1 < p < n$ et Ω est un ouvert lipschitzien, l'espace de Sobolev avec poids $W_\alpha^{1,p}(\Omega)$ et l'espace de Sobolev homogène $D^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega),\ \nabla u \in \boldsymbol{L}^p(\Omega)\}$ coïncident algébriquement et topologiquement. Par dualité de l'injection (2.13) pour $\Omega = \mathbb{R}^n$, nous obtenons aussi l'injection suivante :

$$L^{\frac{np'}{n+p'}}(\mathbb{R}^n) \subset W_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n), \text{ avec } \frac{n}{n-1} < p' < \infty. \tag{2.15}$$

Enfin, si $1 < p < n/2$, nous avons aussi l'égalité topologique et algébrique suivante

$$W_0^{2,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{v \in L^{\frac{np}{n-2p}}(\mathbb{R}^n),\ \nabla v \in \boldsymbol{L}^{\frac{np}{n-p}}(\mathbb{R}^n),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^n),\ i,j = 1,2,...,n\right\}. \tag{2.16}$$

2.3 Les espaces avec poids $\widetilde{W}_0^{1,p}$ et $\mathcal{M}_0^{1,p}$

Nous allons à présent introduire une nouvelle famille d'espaces avec poids.

Définition 2.3 Nous définissons les espaces suivants

$$\widetilde{W}_0^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in W_0^{1,p}(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_1} \in W_0^{-1,p}(\Omega)\right\},$$

et pour tout $\sigma > 0$ que l'on fixera suffisamment petit

$$\mathcal{M}_0^{1,p}(\Omega) = \widetilde{W}_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{0,p}_{-\frac{1}{2}-\sigma}(\Omega).$$

Les espaces $\widetilde{W}_0^{1,p}(\Omega)$ et $\mathcal{M}_0^{1,p}(\Omega)$ sont des espaces de Banach pour les normes suivantes

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\widetilde{W}_0^{1,p}(\Omega)} &= \|u\|_{W_{-1}^{0,p}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-1,p}(\Omega)}, \quad \text{si } p \neq n, \\
\|u\|_{\widetilde{W}_0^{1,n}(\Omega)} &= \|(\ln(1+\rho))^{-1} u\|_{W_{-1}^{0,n}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^n(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-1,n}(\Omega)},
\end{aligned} \tag{2.17}$$

et

$$\|u\|_{\mathcal{M}_0^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{W^{0,p}_{-\frac{1}{2}-\sigma}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-1,p}(\Omega)}. \tag{2.18}$$

Les normes (2.17) et (2.18) sont équivalentes aux normes naturelles. L'objet de la fin de cette section est de montrer des résultats de densités. Nous allons commencer par le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$. La première étape consiste à caractériser les espaces duaux de $\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{M}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ respectivement notés $\widetilde{W}_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{M}_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n)$.

Lemme 2.4 *Soit $f \in \widetilde{W}_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n)$. Alors*
i) *Si $p \neq n$, il existe $f_0 \in W_1^{0,p'}(\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{F} \in \boldsymbol{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)$, $h \in W_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n)$ tels que pour tout $v \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$,*

$$\begin{aligned}
\langle f, v\rangle_{\widetilde{W}_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n)\times \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)} &= \langle f_0, v\rangle_{W_1^{0,p'}(\mathbb{R}^n)\times W_{-1}^{0,p}(\mathbb{R}^n)} + \langle \mathbf{F}, \nabla v\rangle_{\boldsymbol{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)\times \boldsymbol{L}^{p}(\mathbb{R}^n)} \\
&\quad + \langle h, \frac{\partial v}{\partial x_1}\rangle_{W_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n)\times W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

et

$$\|f\|_{\widetilde{W}_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n)} = \max\left(\|f_0\|_{W_1^{0,p'}(\mathbb{R}^n)}, \|\mathbf{F}\|_{\boldsymbol{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)}, \|h\|_{W_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n)} \right).$$

De plus, lorsque $p < n$, on peut prendre $f_0 = 0$.
ii) *Si $p = n$, le résultat de i) reste valable en remplaçant le poids ρ dans la définition des espaces $W_1^{0,p'}(\mathbb{R}^n)$ et $W_{-1}^{0,p}(\mathbb{R}^n)$ par le poids $\rho \ln(1+\rho)$.*

Preuve : i) Le cas $p \neq n$. Notons $\mathbf{E}$ l'espace $\mathbf{E} = W_{-1}^{0,p}(\mathbb{R}^n) \times \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^n) \times W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)$ muni de la norme

$$\|\boldsymbol{\psi}\|_{\mathbf{E}} = \|\psi_0\|_{W_{-1}^{0,p}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{i=1}^{i=n} \|\psi_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\psi_{n+1}\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

où $\boldsymbol{\psi} = (\psi_0, ..., \psi_{n+1})$. L'application $T : v \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) \to (v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial v}{\partial x_n}, \frac{\partial v}{\partial x_1}) \in \mathbf{E}$ est une isométrie. Posons à présent $\mathbf{G} = T(\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n))$ que l'on munit de la norme induite par celle de $\mathbf{E}$ et $S = T^{-1} : \mathbf{G} \to \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. L'application L : $\boldsymbol{h} \in \ \mathbf{G} \to \langle f, S\boldsymbol{h}\rangle$ est linéaire continue sur $\mathbf{G}$. Ainsi, d'après le théorème de Hahn-Banach, on peut la prolonger en une application linéaire et continue sur $\mathbf{E}$ notée $\tilde{L}$, avec $\|\tilde{L}\|_{\mathbf{E}'} = \|f\|$. Grâce au théorème de représentation de Riesz, il existe $f_0 \in W_1^{0,p'}(\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{F} \in \boldsymbol{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)$ et $h \in W_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n)$ tels que

$$\begin{aligned}\forall v \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n), \quad \langle \tilde{L}, v\rangle \;&=\; \langle f_0, v\rangle_{W_1^{0,p'}(\mathbb{R}^n)\times W_{-1}^{0,p}(\mathbb{R}^n)} + \langle \mathbf{F}, \nabla v\rangle_{\boldsymbol{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)\times \boldsymbol{L}^{p}(\mathbb{R}^n)} \\ &+ \langle h, \frac{\partial v}{\partial x_1}\rangle_{W_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n)\times W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

et

$$\|\tilde{L}\|_{E'} = \max\left(\|f_0\|_{W_1^{0,p'}(\mathbb{R}^n)}, \|\mathbf{F}\|_{\boldsymbol{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)}, \|h\|_{W_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n)}\right).$$

Lorsque $p < n$, d'après le théorème 2.1, on a

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n), \quad \|u\|_{W_{-1}^{0,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla u\|_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

On peut procéder de la même manière que précédemment avec $\mathbf{E} = \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^n) \times W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)$ et $T : v \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) \to (\frac{\partial v}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial v}{\partial x_n}, \frac{\partial v}{\partial x_1}) \in \mathbf{E}$.
ii) Le cas $p = n$ se traite de la même manière que le cas $p \neq n$ mais en remplaçant le poids ρ dans la définition des espaces $W_1^{0,p'}(\mathbb{R}^n)$ et $W_{-1}^{0,p}(\mathbb{R}^n)$ par le poids $\rho \ln(1+\rho)$. Ceci achève la démonstration du lemme. ■

Nous pouvons maintenant montrer le résultat suivant

Proposition 2.5

L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve : i) Le cas $p \neq n$. Soit $f \in \widetilde{W}_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n)$ tels que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \langle f, \varphi\rangle_{\widetilde{W}_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n)\times \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Puisque $p \neq n$, d'après (2.2), on a l'injection continue et dense $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset W_{-1}^{0,p}(\mathbb{R}^n)$. Par dualité, nous avons donc l'inclusion

$$W_1^{0,p'}(\mathbb{R}^n) \subset W_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n).$$

Ainsi, à l'aide du lemme 2.4, on a

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} = f_0 - \operatorname{div} \mathbf{F} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n) \cap W_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n).$$

Pour tout $v \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, on obtient alors

$$\begin{aligned}
&< f, v >_{\widetilde{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \times \widetilde{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n)} \\
&=< f_0, v >_{W_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n) \times W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)} - < \operatorname{div} \mathbf{F}, v >_{W_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n) \times W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \\
&- < \frac{\partial h}{\partial x_1}, v >_{W_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n) \times W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \\
&= 0. \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve du cas $p \neq n$.
ii) Si $p = n$, il suffit de prendre $\rho \ln(1+\rho) f_0 \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ et on obtient $f_0 \subset W_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n)$, ce qui permet d'établir le résultat en procédant de la même manière que pour le cas $p \neq n$. ■

La proposition ci-dessous se démontre comme précédemment.

Proposition 2.6

L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{M}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Comme conséquences des propositions 2.5 et 2.6, les espaces duaux $\widetilde{W}_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{M}_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n)$ sont des espaces de distributions qu'on peut caractériser de la manière suivante :

Corollaire 2.7 *Nous avons les identités algébriques et topologiques suivantes :*

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), f = f_0 + \operatorname{div} \mathbf{F} + \frac{\partial h}{\partial x_1},\\ f_0 \in W_1^{0,p'}(\mathbb{R}^n), \mathbf{F} \in \boldsymbol{L}^{p'}(\mathbb{R}^n), h \in W_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n)\},\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), f = f_0 + \operatorname{div} \mathbf{F} + \frac{\partial h}{\partial x_1},\\ f_0 \in W_{\frac{1}{2}+\sigma}^{0,p'}(\mathbb{R}^n), \mathbf{F} \in \boldsymbol{L}^{p'}(\mathbb{R}^n), h \in W_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n)\}.\end{aligned} \tag{2.22}$$

Pour un domaine extérieur Ω, nous introduisons maintenant l'espace suivant :

$$\overset{\circ}{\widetilde{W}}{}_0^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in \overset{\circ}{W}{}_0^{1,p}(\Omega),\ \ \frac{\partial u}{\partial x_1} \in W_0^{-1,p}(\Omega) \right\}. \tag{2.23}$$

Nous notons $\widetilde{W}_0^{-1,p'}(\Omega)$ son espace dual. En procédant de la même manière que dans la proposition 2.4, on peut montrer que, si $f \in \widetilde{W}_0^{-1,p'}(\Omega)$, alors :
1) si $p \neq n$, il existe $f_0 \in W_1^{0,p'}(\Omega)$, $\mathbf{F} \in \boldsymbol{L}^{p'}(\Omega)$, $h \in \overset{\circ}{W}{}_0^{1,p'}(\Omega)$ tels que pour tout $v \in \overset{\circ}{\widetilde{W}}{}_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\langle f, v\rangle_{\widetilde{W}_0^{-1,p'}(\Omega) \times \overset{\circ}{\widetilde{W}}{}_0^{1,p}(\Omega)} &= \langle f_0, v\rangle_{W_1^{0,p'}(\Omega)\times W_{-1}^{0,p}(\Omega)} + \langle \mathbf{F}, \nabla v\rangle_{\boldsymbol{L}^{p'}(\Omega)\times \boldsymbol{L}^{p}(\Omega)}\\ &+ \langle h, \frac{\partial v}{\partial x_1}\rangle_{\overset{\circ}{W}{}_0^{1,p'}(\Omega)\times W_0^{-1,p}(\Omega)}\end{aligned} \tag{2.24}$$

et

$$\|f\|_{\widetilde{W}_0^{-1,p'}(\Omega)} = \max\left(\|f_0\|_{W_1^{0,p'}(\Omega)}, \|\mathbf{F}\|_{\boldsymbol{L}^{p'}(\Omega)}, \|h\|_{W_0^{1,p'}(\Omega)}\right).$$

2) Si $p = n$, la caractérisation (2.24) reste valable en remplaçant le poids ρ dans la définition des espaces $W_1^{0,p'}(\Omega)$ et $W_{-1}^{0,p}(\Omega)$ par le poids $\rho \ln(1+\rho)$.
On peut ensuite montrer la

Proposition 2.8

L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\overset{\circ}{\widetilde{W}}{}_0^{1,p}(\Omega)$.

Preuve : La démonstration est similaire à celle de la proposition 2.5. ■

2.4 Espaces avec poids anisotropes

Ce paragraphe est consacré aux espaces de Sobolev avec poids anisotropes et à leur principale propriété, les inégalités de Hardy.

2.4.1 Définitions et premières propriétés

Définition 2.9 Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Nous posons

$$s = r - x_1,$$

et nous introduisons le poids anisotrope

$$\eta_\beta^\alpha = (1+r)^\alpha (1+s)^\beta.$$

Remarque 2.10 i) Nous avons l'identité $\eta_0^\alpha = \rho^\alpha$.
ii) Un calcul rapide montre que

$$\frac{\partial s}{\partial x_1} = -\frac{s}{r} \leq 0, \quad |\nabla s|^2 = \frac{2s}{r},$$

ce qui permet d'obtenir les inégalités suivantes sur le poids η_β^α :

$$|\nabla \eta_\beta^\alpha| \leq C \eta_{\beta-\frac{1}{2}}^{\alpha-\frac{1}{2}}, \quad \left| \frac{\partial \eta_\beta^\alpha}{\partial x_1} \right| \leq C \eta_\beta^{\alpha-1}, \qquad \text{pour } r \neq 0 \tag{2.25}$$

et

$$\left| \frac{\partial^2 \eta_\beta^\alpha}{\partial x_i \partial x_j} \right| \leq C \eta_{\beta-1}^{\alpha-1}, \qquad \text{pour} \quad r > 1. \tag{2.26}$$

Nous allons à présent introduire une nouvelle famille d'espaces avec poids.

Définition 2.11 Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, nous définissons

$$\begin{aligned}
L^p_{\alpha,\beta}(\Omega) &= \{u \in \mathcal{D}'(\Omega), \eta_\beta^\alpha u \in L^p(\Omega)\}, \\
X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\Omega) &= \{u \in L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(\Omega),\ \nabla u \in \boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\Omega)\}, \\
Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\Omega) &= \{u \in L^p_{\alpha-1,\beta}(\Omega),\ \nabla u \in \boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\Omega)\}.
\end{aligned}$$

Ce sont des espaces de Banach pour les normes respectives

$$\|u\|_{L^p_{\alpha,\beta}(\Omega)} = \|\eta^\alpha_\beta u\|_{L^p(\Omega)},$$
$$\|u\|_{X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\Omega)}\right)^{1/p},$$
$$\|u\|_{Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L^p_{\alpha-1,\beta}(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\Omega)}\right)^{1/p}.$$

Comme pour les espaces $W^{1,p}_\alpha(\Omega)$, les espaces $L^p_{\alpha,\beta}(\Omega)$, $X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ et $Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ coïncident localement avec les espaces de Sobolev classiques. De plus, nous avons l'inclusion suivante

$$X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\Omega) \subset Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\Omega).$$

Dans la suite, nous montrerons que, sous certaines conditions sur α et β, nous pouvons même avoir l'égalité. Lorsque $n/p + \alpha \neq 1$, nous avons l'identité

$$Y^{1,p}_{\alpha,0}(\Omega) = W^{1,p}_\alpha(\Omega).$$

Remarque 2.12 L'application

$$u \in L^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3) \to \eta^a_b u \in L^p_{\alpha-a,\beta-b}(\mathbb{R}^3)$$

est un isomorphisme.

Nous allons à présent nous intéresser aux polynômes qui appartiennent à ces espaces. Nous avons tout d'abord besoin du résultat suivant :

Lemme 2.13 *On suppose $n \geq 2$. Soient α et β deux réels. Alors on a*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta^\alpha_\beta d\boldsymbol{x} < \infty \Leftrightarrow -\alpha + \min\left(\frac{n-1}{2}, -\beta\right) > n. \tag{2.27}$$

Preuve : Soit $R > 1$ un réel fixé. Pour montrer (2.27), il suffit d'étudier l'intégrale sur B'_R. Nous allons nous contenter du cas $n \geq 3$, la démonstration étant similaire si $n = 2$. Posons $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{n-1}) \in]0,\pi[^{n-2} \times]0, 2\pi[$ et

$$D = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times]0,\pi[^{n-2} \times]0, 2\pi[,\ r > R\}.$$

Introduisons les coordonnées sphériques généralisées

$$\begin{aligned} &x_1 = r\cos\theta_1,\ \ x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2, ...,\ \ x_{n-1} = r\sin\theta_1 ... \sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}, \\ &x_n = r\sin\theta_1 ... \sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Notons I l'intégrale de (2.27) dans B'_R, on obtient donc

$$I = \int_D (1+r)^\alpha (1+r-r\cos\theta_1)^\beta r^{n-1} (\sin\theta_1)^{n-2} dr d\theta.$$

Intéressons nous à l'intégrale suivante

$$J = (1+r)^\alpha r^{n-2} \int_0^\pi (1+r-r\cos\theta_1)^\beta r (\sin\theta_1)^{n-2} d\theta_1.$$

En effectuant le changement de variables $t = r - r\cos\theta_1$, on peut écrire

$$\begin{aligned} J &= (1+r)^\alpha r^{n-2} \int_0^{2r} (1+t)^\beta (2tr - t^2)^{(n-3)/2} r^{-(n-3)} dt \\ &= (1+r)^\alpha r \int_0^{2r} (1+t)^\beta (2tr - t^2)^{(n-3)/2} dt \end{aligned}$$

En découpant cette dernière intégrale en trois, on arrive à

$$\begin{aligned} J \le C r^{\alpha+1} \Bigg[&\int_0^1 (1+t)^\beta (2tr-t^2)^{(n-3)/2} dt + \int_1^r (1+t)^\beta (2tr-t^2)^{(n-3)/2} dt \\ &+ \int_r^{2r} (1+t)^\beta (2tr-t^2)^{(n-3)/2} dt \Bigg]. \end{aligned}$$

Pour la première intégrale, on obtient

$$\int_0^1 (1+t)^\beta (2tr-t^2)^{(n-3)/2} dt \le C r^{(n-3)/2} \int_0^1 t^{(n-3)/2} dt \le C r^{(n-3)/2}.$$

Pour la deuxième, on a

$$\begin{aligned} \int_1^r (1+t)^\beta (2tr-t^2)^{(n-3)/2} dt &= 2^{(n-3)/2} r^{(n-3)/2} \int_1^r (1+t)^\beta t^{(n-3)/2} \left(1 - \frac{t}{2r}\right)^{(n-3)/2} dt \\ &\le C r^{(n-3)/2} \int_1^r t^{\beta + (n-3)/2} dt. \end{aligned}$$

Maintenant, dans le cas où $\beta + \frac{n-1}{2} \neq 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_1^r t^{\beta+(n-1)/2}dt &\leq C(r^{\beta+\frac{n-1}{2}} - 1)\\ &\leq Cr^{(n-1)/2-\min\left(-\beta,\frac{n-1}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Il vient donc

$$\int_1^r (1+t)^\beta(2tr-t^2)^{(n-3)/2}dt \leq Cr^{n-2-\min\left(-\beta,\frac{n-1}{2}\right)}.$$

Si $\beta + \frac{n-1}{2} = 0$, on a

$$\int_1^r (1+t)^\beta(2tr-t^2)^{(n-3)/2}dt \leq Cr^{(n-3)/2}\ln r.$$

Enfin on a facilement

$$\int_r^{2r} (1+t)^\beta(2tr-t^2)^{(n-3)/2}dt \leq Cr^{\beta+n-2}.$$

Grâce à ces estimations, on aboutit à

$$I < \infty \Leftrightarrow -\alpha + \min((n-1)/2, -\beta) > n,$$

ce qui achève la preuve. ■

Grâce à ce lemme, nous en déduisons les propriétés suivantes:

Propriété 2.14 *Soit $j \in \mathbb{Z}$, alors*

$$\mathbb{P}_\mathrm{j} \subset \mathrm{L}^\mathrm{p}_{\alpha,\beta}(\Omega) \ \textit{ssi}\ \mathrm{j} < -\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{p}} - \alpha + \frac{1}{\mathrm{p}}\min\left(\frac{(\mathrm{n}-1)}{2}, -\beta\mathrm{p}\right), \tag{2.29}$$

$$\mathbb{P}_\mathrm{j} \subset \mathrm{X}^{1,\mathrm{p}}_{\alpha,\beta}(\Omega) \ \textit{ssi}\ \mathrm{j} < \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{p}} - \alpha + \frac{1}{\mathrm{p}}\min\left(\frac{(\mathrm{n}-1)}{2}, -\mathrm{p}\beta + \mathrm{p}/2\right), \tag{2.30}$$

$$\mathbb{P}_\mathrm{j} \subset \mathrm{Y}^{1,\mathrm{p}}_{\alpha,\beta}(\Omega) \ \textit{ssi}\ \mathrm{j} < 1 - \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{p}} - \alpha + \frac{1}{\mathrm{p}}\min\left(\frac{(\mathrm{n}-1)}{2}, -\mathrm{p}\beta\right). \tag{2.31}$$

Nous allons à présent établir des résultats de densité.

Proposition 2.15

L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p_{\alpha,\beta}(\Omega)$.

Preuve : D'après la définition de $L^p_{\alpha,\beta}(\Omega)$, étant donné un élément $u \in L^p_{\alpha,\beta}(\Omega)$, nous avons $\eta^\alpha_\beta u \in L^p(\Omega)$. Il existe donc une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}(\Omega)$ qui tend vers $\eta^\alpha_\beta u$ dans $L^p(\Omega)$. Posons $\psi_k = \eta^{-\alpha}_{-\beta}\varphi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$, il est alors facile de voir que ψ_k tend vers u dans $L^p_{\alpha,\beta}(\Omega)$. ■

Pour les espaces $X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ et $Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)$, nous allons commencer par montrer la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^n$. Nous l'étendrons ensuite à un domaine extérieur.

Proposition 2.16

L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ et dans $Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve : La preuve étant identique pour les deux espaces, nous allons la faire pour $X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$. Soit alors $u \in X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{x}) &= 1 \text{ si } |\boldsymbol{x}| < 1,\\ 0 \le \varphi(\boldsymbol{x}) &\le 1 \text{ si } 1 \le |\boldsymbol{x}| \le 2,\\ \varphi(\boldsymbol{x}) &= 0 \text{ si } |\boldsymbol{x}| \ge 2.\end{aligned}$$

Posons à présent $\varphi_k(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}/k)$ et $u_k = u\varphi_k$. On a

$$\begin{aligned}\|u_k - u\|^p_{X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} &= \|u_k - u\|^p_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla(u_k - u)\|^p_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)}\\ &\le \|(\varphi_k - 1)u\|^p_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)} + C\|(\varphi_k - 1)\nabla u\|^p_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} \qquad (2.32)\\ &+ C\|u\nabla\varphi_k\|^p_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Puisque $u \in X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$, les deux premiers termes de (2.32) tendent vers 0. Le troisième terme s'écrit

$$\|u\nabla\varphi_k\|^p_{L^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} = \int_{\{k\le r\le 2k\}} \eta^{\alpha p}_{\beta p}|u\nabla\varphi_k|^p d\boldsymbol{x}.$$

Par ailleurs, on sait que
$$|\nabla \varphi_k(\boldsymbol{x})| \leq \frac{1}{k} |\nabla \varphi(\boldsymbol{x}/k)|.$$
En utilisant cette estimation, on obtient

$$\begin{aligned}
\|u \nabla \varphi_k\|^p_{L^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} &\leq C \int_{\{k \leq r \leq 2k\}} \eta_{\beta p}^{(\alpha-1)p} |u|^p d\boldsymbol{x} \\
&\leq C \int_{\{k \leq r \leq 2k\}} \eta_{(\beta-\frac{1}{2})p}^{(\alpha-\frac{1}{2})p} |u|^p d\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

Puisque $u \in X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$, ce dernier terme tend vers 0. Nous avons donc montré que pour tout $u \in X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u_k \in X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ à support compact tel que
$$\|u - u_k\|_{X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon/2. \tag{2.33}$$
De plus, puisque chaque u_k a un support compact et que les topologies de $X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ et $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ coïncident sur ce support, il existe $v_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\|u_k - v_k\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \equiv \|u_k - v_k\|_{X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon/2. \tag{2.34}$$

Les estimations (2.33) et (2.34) nous permettent alors de conclure. ∎

En utilisant la même fonction de troncature φ_k et en utilisant la densité de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, on peut généraliser le résultat précédent à tout ouvert extérieur Ω de $\mathbb{R}^n$. Plus précisément, nous avons la

Proposition 2.17

L'espace $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ et dans $Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)$.

Nous introduisons à présent les espaces $\overset{\circ}{X}{}^{1,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ et $\overset{\circ}{Y}{}^{1,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ qui désignent respectivement l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ et dans $Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)$. On peut montrer que

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{X}{}^{1,p}_{\alpha,\beta}(\Omega) &= \{u \in X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\Omega),\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}, \\
\overset{\circ}{Y}{}^{1,p}_{\alpha,\beta}(\Omega) &= \{u \in Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\Omega),\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.
\end{aligned}$$

Nous noterons $X^{-1,p'}_{-\alpha,-\beta}(\Omega)$ et $Y^{-1,p'}_{-\alpha,-\beta}(\Omega)$ leurs duaux respectifs. Comme pour le corollaire 2.7, on peut caractériser ces espaces duaux, en particulier nous avons l'identité suivante

$$Y^{-1,p'}_{-\alpha,-\beta}(\Omega) = \{f \in \mathcal{D}'(\Omega),\ f = f_0 + \operatorname{div} \mathbf{F},\ \ f_0 \in L^{p'}_{-\alpha+1,-\beta}(\Omega), \mathbf{F} \in \boldsymbol{L}^{p'}_{-\alpha,-\beta}(\Omega)\}. \tag{2.35}$$

2.4.2 Inégalités de Hardy

L'objet de ce paragraphe est d'établir des inégalités de Hardy avec poids anisotropes. Rappelons que lorsque $\beta = 0$, nous disposons déjà des inégalités (2.7) et (2.8). Dans [21], Farwig montre que si $\beta > 0$ et $\alpha + \beta + \frac{1}{2} > 0$, alors il existe une contante $C > 0$ telle que

$$\forall u \in \overset{\circ}{X}{}^{1,2}_{\alpha,\beta}(\Omega), \quad \|u\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\Omega)}. \tag{2.36}$$

Nous avons ici deux objectifs :

1) Généraliser l'inégalité (2.36) à tout réel p tel que $1 < p < \infty$ tout en affaiblissant les hypothèses sur α et β.

2) Prouver une inégalité de type (2.36) pour le cas $\beta \leq 0$.

Les principaux résultats de ce paragraphe sont annoncés dans [11] et font aussi l'objet d'un travail soumis [8] (voir aussi [12]).

Le cas $\beta > 0$

Soient deux réels R et λ tels que $R > 0$ soit suffisamment grand et $0 < \lambda < 1$. Introduisons le cône de révolution infini

$$S = S_{R,\lambda} = \{x \in \mathbb{R}^n,\ r > R,\ 0 < s < \lambda r\}. \tag{2.37}$$

Nous pouvons remarquer que dans $\mathbb{R}^n \setminus S$, s est équivalent à r, les poids η^α_β et $\rho^{\alpha+\beta}$ sont équivalents. Ainsi, nous commencerons d'abord par établir des inégalités de Hardy dans le secteur S. Ensuite, par le biais d'une partition de l'unité, nous établissons des inégalités dans B'_R l'extérieur de la boule B_R. Enfin, en utilisant une autre partition de l'unité, nous étendrons le résultat dans tout l'espace $\mathbb{R}^n$. Nous avons besoin tout d'abord d'établir des inégalités unidimensionelles.

Lemme 2.18 *Soient* $\gamma \in \mathbb{R}$ *satisfaisant* $\gamma + \frac{n-1}{2} > 0$ *et* $\theta^* \in]0, \frac{\pi}{2}[$. *Alors, pour toute fonction positive* f *définie et mesurable sur* $]0, \theta^*[$, *telle que*

$$\int_0^{\theta^*} (1-\cos\theta)^{\gamma+\frac{p}{2}} (\sin\theta)^{n-2} [f(\theta)]^p d\theta < +\infty,$$

nous avons

$$\int_0^{\theta^*} (1-\cos\theta)^{\gamma} (\sin\theta)^{n-2} [F(\theta)]^p d\theta \leq C \int_0^{\theta^*} (1-\cos\theta)^{\gamma+\frac{p}{2}} (\sin\theta)^{n-2} [f(\theta)]^p d\theta, \quad (2.38)$$

où

$$F(\theta) = \int_\theta^{\theta^*} f(t)dt. \quad (2.39)$$

Preuve : Remarquons tout d'abord que sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a l'encadrement suivant

$$\frac{1}{2}\sin^2\theta \leq 1-\cos\theta \leq \sin^2\theta. \quad (2.40)$$

En effet, sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a

$$\cos\theta \geq \cos^2\theta.$$

Il est alors facile de voir que

$$1-\cos\theta \leq \sin^2\theta.$$

Par ailleurs, on peut écrire

$$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = (1+\cos\theta)(1-\cos\theta) \leq 2(1-\cos\theta).$$

Posons à présent

$$J = \int_0^{\theta^*} (1-\cos\theta)^{\gamma} (\sin\theta)^{n-2} (F(\theta))^p d\theta.$$

Grâce à (2.40), on peut écrire

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\theta^*} (1-\cos\theta)^{\gamma} (\sin\theta)^{n-3} \sin\theta (F(\theta))^p d\theta \\ &\leq 2^{(n-3)/2} \int_0^{\theta^*} (1-\cos\theta)^{\gamma+\frac{n-3}{2}} \sin\theta (F(\theta))^p d\theta. \end{aligned}$$

D'après la définition (2.39) de $F(\theta)$ et comme $\gamma + \frac{n-1}{2} > 0$, une intégration par parties nous donne

$$J \leq C \int_0^{\theta^*} (1-\cos\theta)^{\gamma+\frac{n-1}{2}} f(\theta)(F(\theta))^{p-1} d\theta.$$

En utilisant à présent une inégalité de Hölder, on obtient

$$J \leq C \int_0^{\theta^*} (1-\cos\theta)^{\gamma+\frac{n-1}{2}p} (\sin\theta)^{-(n-2)(p-1)} (f(\theta))^p d\theta.$$

On peut reécrire cette dernière inégalité de la manière suivante

$$J \leq C \int_0^{\theta^*} (1-\cos\theta)^{\gamma+\frac{p}{2}} (\sin\theta)^{(n-2)} (1-\cos\theta)^{\frac{n-2}{2}p} (\sin\theta)^{-(n-2)p} (f(\theta))^p d\theta.$$

Grâce à (2.40), le terme $(1-\cos\theta)^{\frac{n-2}{2}p}(\sin\theta)^{-(n-2)p}$ est borné et l'inégalité (2.38) est donc prouvée. ■

Remarque 2.19 De la même manière, nous pouvons prouver que si $\gamma \in \mathbb{R}$ satisfait $\gamma + \frac{1}{2} > 0$ et si $\theta^* \in]0, \frac{\pi}{2}[$, alors, pour toute fonction positive f définie et mesurable sur $]-\theta^*, 0[$, telle que

$$\int_{-\theta^*}^0 (1-\cos\theta)^{\gamma+\frac{p}{2}} [f(\theta)]^p d\theta < +\infty,$$

on a

$$\int_{-\theta^*}^0 (1-\cos\theta)^{\gamma} [F(\theta)]^p d\theta \leq C \int_{-\theta^*}^0 (1-\cos\theta)^{\gamma+\frac{p}{2}} [f(\theta)]^p d\theta, \tag{2.41}$$

avec

$$F(\theta) = \int_{-\theta^*}^{\theta} f(t) dt.$$

Nous allons à présent donner des conséquences immédiates du lemme 2.18 et de la remarque 2.19.

Corollaire 2.20 (i) *Pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\gamma + \frac{1}{2} > 0$ et pour toute fonction $w \in \mathcal{D}(]-\theta^*, \theta^*[)$, on a*

$$\int_{-\theta^*}^{\theta^*} (1-\cos\theta)^{\gamma} |w(\theta)|^p d\theta \leq C \int_{-\theta^*}^{\theta^*} (1-\cos\theta)^{\gamma+\frac{p}{2}} |w'(\theta)|^p d\theta. \tag{2.42}$$

(ii) *Pour tout* $\gamma \in \mathbb{R}$ *tel que* $\gamma + \frac{n-1}{2} > 0$ *et pour toute fonction* $w \in \mathcal{D}(]0, \theta^*[)$*, on a*

$$\int_0^{\theta^*} (1-\cos\theta)^\gamma (\sin\theta)^{n-2} |w(\theta)|^p d\theta \leq C \int_0^{\theta^*} (1-\cos\theta)^{\gamma+\frac{p}{2}} (\sin\theta)^{n-2} |w'(\theta)|^p d\theta. \quad (2.43)$$

Preuve : (i) Posons

$$J = \int_{-\theta^*}^{\theta^*} (1-\cos\theta)^\gamma |w(\theta)|^p d\theta.$$

Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\theta^*}^{0} (1-\cos\theta)^\gamma |w(\theta)|^p d\theta + \int_0^{\theta^*} (1-\cos\theta)^\gamma |w(\theta)|^p d\theta \\ &= J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Pour J_1, on pose $f(\theta) = |w'(\theta)|$ et

$$|w(\theta)| = \left| \int_{-\theta^*}^{\theta} w'(\theta) d\theta \right| \leq \int_{-\theta^*}^{\theta} |w'(\theta)| d\theta = F(\theta).$$

On applique ensuite l'inégalité (2.41) pour obtenir

$$J_1 \leq C \int_{-\theta^*}^{0} (1-\cos\theta)^{\gamma+\frac{p}{2}} |w'(\theta)|^p d\theta. \quad (2.44)$$

Pour J_2, il suffit de poser $f(\theta) = |w'(\theta)|$,

$$|w(\theta)| = \left| \int_{\theta}^{\theta^*} w'(\theta) d\theta \right| \leq \int_{\theta}^{\theta^*} |w'(\theta)| d\theta = F(\theta)$$

et d'appliquer l'inégalité (2.38) pour $n = 2$ afin d'obtenir

$$J_2 \leq C \int_0^{\theta^*} (1-\cos\theta)^{\gamma+\frac{p}{2}} |w'(\theta)|^p d\theta. \quad (2.45)$$

En rassemblant les inégalités (2.44) et (2.45), on obtient (2.42).
(ii) La preuve de (2.43) est similaire à celle de (i). ■

Nous allons à présent prouver une inégalité de Hardy dans le secteur S définie par (2.37).

Lemme 2.21 *Soient α et β deux réels tels que $\beta > \max(0, (1-n+p)/2p)$. Alors, on a*

$$\forall u \in \mathcal{D}(S), \quad \|u\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(S)} \leq C\|\nabla u\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(S)}. \tag{2.46}$$

Preuve : Soit une fonction $u \in \mathcal{D}(S)$ donnée. Puisque $\beta > 0$, pour montrer (2.46), il suffit de montrer l'inégalité suivante

$$I = \int_S (1+r)^{(\alpha-\frac{1}{2})p} s^{(\beta-\frac{1}{2})p} |u|^p d\boldsymbol{x} \leq C \int_S (1+r)^{\alpha p} s^{\beta p} |\nabla u|^p d\boldsymbol{x}. \tag{2.47}$$

En effet, supposons pour le moment (2.47) verifiée. Alors, si $0 < \beta < \frac{1}{2}$, on a

$$\begin{aligned} \int_S (1+r)^{(\alpha-\frac{1}{2})p}(1+s)^{(\beta-\frac{1}{2})p}|u|^p d\boldsymbol{x} &\leq \int_S (1+r)^{(\alpha-\frac{1}{2})p} s^{(\beta-\frac{1}{2})p}|u|^p d\boldsymbol{x} \\ &\leq C \int_S (1+r)^{\alpha p} s^{\beta p}|\nabla u|^p d\boldsymbol{x} \\ &\leq C \int_S (1+r)^{\alpha p}(1+s)^{\beta p}|\nabla u|^p d\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

Maintenant si $\beta \geq \frac{1}{2}$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_S (1+r)^{(\alpha-\frac{1}{2})p}(1+s)^{(\beta-\frac{1}{2})p}|u|^p d\boldsymbol{x} &\leq C \int_S (1+r)^{(\alpha-\frac{1}{2})p}(1+s^{(\beta-\frac{1}{2})p})|u|^p d\boldsymbol{x} \\ &\leq C \int_S (1+r)^{\alpha p}(s^{p/2}+s^{\beta p})|\nabla u|^p d\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

On peut remarquer que l'inégalité (2.47) a été utilisée deux fois dont une fois avec $\beta = \frac{1}{2}$. Il est ensuite facile de voir qu'on a

$$\int_S (1+r)^{\alpha p}(s^{p/2}+s^{\beta p})|\nabla u|^p d\boldsymbol{x} \leq \int_S (1+r)^{\alpha p}(1+s)^{\beta p}|\nabla u|^p d\boldsymbol{x},$$

ce qui établit le résultat. Nous allons maintenant montrer (2.47) et nous distinguons deux cas.

1) Le cas $n \geq 3$.

Soient $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n-1}) \in \,]0, \pi[^{n-2} \times]0, 2\pi[,\ R > 0,\ \theta^* \in \,]0, \frac{\pi}{2}[$ et posons

$$\Delta = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \,]0, \pi[^{n-2} \times \,]0, 2\pi[,\ r > R,\ \theta_1 \in \,]0, \theta^*[\}.$$

Nous introduisons les coordonées sphériques généralisées définies par (2.28). En posant à présent $u(\boldsymbol{x}) = v(r, \theta)$ et en remarquant que

$$\left|\frac{\partial v}{\partial \theta_1}\right| \leq r|\nabla u|,$$

il suffit de montrer l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} I &= \int_\Delta (1+r)^{(\alpha - \frac{1}{2})p}(r - r\cos\theta_1)^{(\beta - \frac{1}{2})p} r^{n-1}(\sin\theta_1)^{n-2}|v|^p dr d\theta \\ &\leq C \int_\Delta (1+r)^{\alpha p}(r - r\cos\theta_1)^{\beta p} r^{n-1}(\sin\theta_1)^{n-2} r^{-p}\left|\frac{\partial v}{\partial \theta_1}\right|^p dr d\theta. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Il est clair que

$$I \leq \int_\Delta (1+r)^{\alpha p} r^{\beta p}(1 - \cos\theta_1)^{(\beta - \frac{1}{2})p} r^{n-1}(\sin\theta_1)^{n-2} r^{-p}|v|^p dr d\theta. \tag{2.49}$$

Posons

$$J = \int_0^{\theta^*} (1 - \cos\theta_1)^{(\beta - \frac{1}{2})p}(\sin\theta_1)^{n-2}|v|^p d\theta_1.$$

Comme $\beta > (1 - n + p)/2p$, on a $(\beta - \frac{1}{2})p + \frac{n-1}{2} > 0$. De plus, u appartenant à $\mathcal{D}(S)$ entraîne que, pour $(r, \theta) \in \Delta$, la fonction $\theta_1 \to v(r, \theta)$ appartient à $\mathcal{D}([0, \theta^*[)$. Ainsi, grâce à l'inégalité (2.43), il vient

$$J \leq C \int_0^{\theta^*} (1 - \cos\theta_1)^{\beta p}(\sin\theta_1)^{n-2}\left|\frac{\partial v}{\partial \theta_1}\right|^p d\theta_1. \tag{2.50}$$

Il est alors facile de voir que (2.49) et (2.50) entraînent (2.48). Ceci termine la preuve pour le cas $n \geq 3$.
2) Le cas $n = 2$.
On définit à présent

$$\Delta = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \,] - \pi, \pi[,\ \ r > R,\ \ \theta \in \,] - \theta^*, \theta^*[\}$$

et on introduit les coordonnées polaires. En posant $u(\boldsymbol{x}) = v(r,\theta)$, il est alors suffisant de prouver l'inégalité

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\theta^*}^{\theta^*}\int_R^\infty (1+r)^{(\alpha-\frac{1}{2})p}(r - r\cos\theta)^{(\beta-\frac{1}{2})p} r^2 |v|^p dr d\theta \\ &\leq C \int_{-\theta^*}^{\theta^*}\int_R^\infty (1+r)^{\alpha p}(r - r\cos\theta)^{\beta p} r^{2-p} \left|\frac{\partial v}{\partial \theta}\right|^p dr d\theta. \end{aligned}$$

On montre cette inégalité en procédant de la même manière que pour prouver (2.48), mais cette fois-ci avec l'aide de l'inégalité (2.42). ■

Nous allons à présent établir une inégalité de Hardy dans B'_R, l'extérieur de la boule B_R. Pour cela, nous aurons besoin de l'inégalité de Hardy suivante (*cf.* [35] ou [38])

$$\forall f \in \mathcal{D}(]R,\infty[), \quad \int_R^{+\infty} |f(r)|^p r^\gamma dr \leq C \int_R^{+\infty} |f'(r)|^p r^{\gamma+p} dr, \quad \text{avec } \gamma + 1 \neq 0. \tag{2.51}$$

Lemme 2.22 *Soient α et β deux réels tels que $\beta > \max(0, (1-n+p)/2p)$ et $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 \neq 0$. Alors, nous avons*

$$\forall u \in \mathcal{D}(B'_R), \quad \|u\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(B'_R)} \leq C \|\nabla u\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(B'_R)}. \tag{2.52}$$

Preuve : Soit $\lambda > 0$, nous introduisons l'ouvert

$$D_{R,\lambda} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,;\; r > R, \lambda r < s\},$$

ainsi que la partition de l'unité suivante

$$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^\infty(B'_R), \;\; 0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq 1, \;\; \varphi_1 + \varphi_2 = 1 \text{ dans } B'_R,$$

vérifiant

$$\begin{gathered} \varphi_1 = 1 \text{ dans } S_{R,\lambda/2}, \;\; \operatorname{supp} \varphi_1 \subset S_{R,\lambda} \\ \text{et } |\nabla \varphi_1(\boldsymbol{x})| \leq \frac{C}{|\boldsymbol{x}|}, \; \boldsymbol{x} \in S_{R,\lambda} \cap D_{R,\lambda/2}. \end{gathered} \tag{2.53}$$

Il est clair que

$$\|u\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(B'_R)} \leq \|u\varphi_1\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(B'_R)} + \|u\varphi_2\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(B'_R)}.$$

Montrons que

$$\|u\varphi_1\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(B'_R)} \leq C\|\nabla u\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(B'_R)}. \tag{2.54}$$

Comme $u\varphi_1 \in \mathcal{D}(S_{R,\lambda})$ et $\beta > \max(0, (1-n+p)/2p)$, grâce au lemme 2.21, il vient

$$\|u\varphi_1\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(S_{R,\lambda})} \leq C\|\nabla(u\varphi_1)\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(S_{R,\lambda})}. \tag{2.55}$$

De plus, comme $0 \leq \varphi_1 \leq 1$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\|\nabla(u\varphi_1)\|^p_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(S_{R,\lambda})} &= \int_{S_{R,\lambda}} (1+r)^{\alpha p}(1+s)^{\beta p}|\nabla(u\varphi_1)|^p d\boldsymbol{x} \\
&\leq C\int_{S_{R,\lambda}} (1+r)^{\alpha p}(1+s)^{\beta p}|\nabla u|^p d\boldsymbol{x} \\
&+ C\int_{S_{R,\lambda}\cap D_{R,\lambda/2}} (1+r)^{\alpha p}(1+s)^{\beta p}|u\nabla\varphi_1|^p d\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

Par suite, il est clair que

$$\|\nabla(u\varphi_1)\|^p_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(S_{R,\lambda})} \leq C\|\nabla u\|^p_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(B'_R)} + C\int_{S_{R,\lambda}\cap D_{R,\lambda/2}} (1+r)^{\alpha p}(1+s)^{\beta p}|u\nabla\varphi_1|^p d\boldsymbol{x}. \tag{2.56}$$

Il reste à estimer le dernier terme de (2.56). En remarquant que r et s sont équivalents dans $S_{R,\lambda}\cap D_{R,\lambda/2}$ et grâce à (2.53), il vient

$$\begin{aligned}
\int_{S_{R,\lambda}\cap D_{R,\lambda/2}} (1+r)^{\alpha p}(1+s)^{\beta p}|u\nabla\varphi_1|^p d\boldsymbol{x} &\leq C\int_{S_{R,\lambda}\cap D_{R,\lambda/2}} (1+r)^{(\alpha+\beta-1)p}|u|^p d\boldsymbol{x} \\
&\leq C\int_{S_{R,\lambda}\cap D_{R,\lambda/2}} r^{(\alpha+\beta-1)p}|u|^p d\boldsymbol{x}.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

On passe maintenant aux coordonées sphériques généralisées (2.28) pour le cas $n \geq 3$ ou aux coordonées polaires pour le cas $n = 2$. On pose $u(\boldsymbol{x}) = v(r, \theta)$ et, puisque

$\alpha+\beta+\frac{n}{p}-1\neq 0$, on applique (2.51) à la fonction $r\to v(r,\theta)$. On obtient donc

$$\int_R^{+\infty}|v|^p r^{(\alpha+\beta-1)p+n-1}dr\leq C\int_R^{+\infty}\left|\frac{\partial v}{\partial r}\right|^p r^{(\alpha+\beta)p+n-1}dr.$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}\int_{S_{R,\lambda}\cap D_{R,\lambda/2}} r^{(\alpha+\beta-1)p}|u|^p d\boldsymbol{x} &\leq C\int_{S_{R,\lambda}\cap D_{R,\lambda/2}} r^{(\alpha+\beta)p}|\nabla u|^p d\boldsymbol{x}\\ &\leq C\int_{S_{R,\lambda}\cap D_{R,\lambda/2}}(1+r)^{\alpha p}(1+s)^{\beta p}|\nabla u|^p d\boldsymbol{x} \qquad (2.58)\\ &\leq C\|\nabla u\|^p_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(B'_R)}.\end{aligned}$$

Alors, (2.55), (2.56), (2.57) et (2.58) entraînent (2.54). Nous allons maintenant montrer que

$$\|u\varphi_2\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(B'_R)}\leq C\|\nabla u\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(B'_R)}. \qquad (2.59)$$

Le support de φ_2 étant inclus dans $D_{R,\lambda/2}$ et puisque $0\leq\varphi_2\leq 1$, il vient

$$\begin{aligned}\|u\varphi_2\|^p_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(B'_R)} &= \int_{D_{R,\lambda/2}}(1+r)^{(\alpha-\frac{1}{2})p}(1+s)^{(\beta-\frac{1}{2})p}|u\varphi_2|^p d\boldsymbol{x}\\ &\leq\int_{D_{R,\lambda/2}}(1+r)^{(\alpha-\frac{1}{2})p}(1+s)^{(\beta-\frac{1}{2})p}|u|^p d\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

Rappelons que r et s sont équivalents dans $D_{R,\lambda/2}$. Ainsi, on peut écrire

$$\int_{D_{R,\lambda/2}}(1+r)^{(\alpha-\frac{1}{2})p}(1+s)^{(\beta-\frac{1}{2})p}|u|^p d\boldsymbol{x}\leq C\int_{D_{R,\lambda/2}} r^{(\alpha+\beta-1)p}|u|^p d\boldsymbol{x}.$$

Comme $\alpha+\beta+\frac{n}{p}-1\neq 0$, par passage aux coordonnées sphériques, pour le cas $n\geq 3$, ou aux coordonnées polaires pour $n=2$, avec $u(\boldsymbol{x})=v(r,\theta)$, et par application de (2.51), on montre que

$$\int_R^{+\infty} r^{(\alpha+\beta-1)p+n-1}|v|^p dr\leq C\int_R^{+\infty} r^{(\alpha+\beta)p+n-1}\left|\frac{\partial v}{\partial r}\right|^p dr.$$

De cette dernière inégalité, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{D_{R,\lambda/2}} r^{(\alpha+\beta-1)p}|u|^p d\boldsymbol{x} &\leq C\int_{D_{R,\lambda/2}} r^{(\alpha+\beta)p}|\nabla u|^p d\boldsymbol{x}\\ &\leq C\int_{D_{R,\lambda/2}} (1+r)^{\alpha p}(1+s)^{\beta p}|\nabla u|^p d\boldsymbol{x}\\ &\leq \ C\|\nabla u\|^p_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(B'_R)}.\end{aligned}$$

L'inégalité (2.59) est ainsi démontrée ce qui achève la preuve du lemme. ■

Remarque 2.23 L'inégalité (2.52) n'est pas vérifiée pour $\beta \leq 0$. Dans [21], Farwig donne un contre-exemple pour le cas $p = 2$ et $\alpha = \beta = 0$. Nous allons montrer l'invalidité de l'inégalité (2.52) pour le cas $p = 2$, $\beta < 0$ et $n = 3$ en prennant comme contre-exemple une fonction radiale u.

En utilisant les coordonnées sphériques définies par (2.28) pour $n = 3$ avec $u(\boldsymbol{x}) = v(r,\theta) = v(r)$, on peut écrire

$$\begin{aligned}I &= \int_{B'_R} (1+r)^{2(\alpha-\frac{1}{2})}(1+s)^{2(\beta-\frac{1}{2})}|u|^2 d\boldsymbol{x}\\ &= \int_0^{2\pi}\int_R^{+\infty}\int_0^{\pi} (1+r)^{2(\alpha-\frac{1}{2})}(1+r-r\cos\theta_1)^{2(\beta-\frac{1}{2})}|v|^2 r^2\sin\theta_1 d\theta_1 dr d\theta_2\\ &= \int_0^{2\pi}\int_R^{+\infty} (1+r)^{2(\alpha-\frac{1}{2})}r^2|v|^2\times\left(\int_0^{\pi}(1+r-r\cos\theta_1)^{2(\beta-\frac{1}{2})}\sin\theta_1 d\theta_1\right) dr d\theta_2.\end{aligned}$$

La dernière intégrale peut être calculée explicitement,

$$\int_0^{\pi}(1+r-r\cos\theta_1)^{2(\beta-\frac{1}{2})}\sin\theta_1 d\theta_1 = \frac{1}{2\beta r}[(1+2r)^{2\beta}-1] \sim -\frac{1}{2\beta r}.$$

Ainsi, on a

$$I \sim \int_0^{2\pi}\int_R^{+\infty} -\frac{1}{2\beta r}(1+r)^{2(\alpha-\frac{1}{2})}|v|^2 r^2 dr d\theta_2.$$

Ensuite, on peut écrire

$$J = \int_R^{+\infty} r^{2\alpha}|v|^2 dr \leq \frac{4}{(\alpha+1)^2}\int_R^{+\infty} r^{2(\alpha+1)}\left|\frac{\partial v}{\partial r}\right|^2 dr,$$

avec $\alpha + 1 \neq 0$. On obtient donc

$$\begin{aligned} I &\leq C \int_0^{2\pi} \int_R^{+\infty} -\frac{1}{2\beta r}(1+r)^{2(\alpha+\frac{1}{2})} r^2 \left|\frac{\partial v}{\partial r}\right|^2 dr \\ &\leq C \int_{B'_R} (1+s)^{2(\beta-\frac{1}{2})}(1+r)^{2(\alpha+\frac{1}{2})} |\nabla u|^2 d\boldsymbol{x}. \end{aligned} \tag{2.60}$$

L'inégalité obtenue est optimale pour une fonction radiale u et ne permet pas d'obtenir une inégalité de type (2.52). Dans la suite, nous étendrons l'inégalité (2.60) à toute fonction $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Grâce au lemme 2.22, nous pouvons à présent énoncer le premier théorème principal de ce paragraphe.

Théorème 2.24 *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\beta > \max(0, (1-n+p)/2p)$ et $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 \neq 0$. Soit $j' = \min(j, 0)$, où j est le plus haut degré des polynômes inclus dans $X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$. Alors, nous avons*

$$\forall u \in X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n), \quad \inf_{\lambda \in \mathbb{P}_{j'}} \|u + \lambda\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.61}$$

Autrement dit, la semi-norme $\|\nabla .\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)}$ définit sur $X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{P}_{j'}$ une norme équivalente à la norme induite par $X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve : Le principe est celui de la démonstration du théorème 8.3 p 598 de [6]. La preuve se fait en deux étapes . La première étape consiste à éliminer la norme quotient. Pour cela, on fixe un ouvert borné Ω' de $\mathbb{R}^n$. On choisit $q \in \mathbb{P}_{j'}$, tel que $U = u + q \in X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ satisfait

$$\forall \lambda \in \mathbb{P}_{j'}, \quad \int_{\Omega'} \mathrm{U}\lambda \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0. \tag{2.62}$$

On remarque que nous avons facilement

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{P}_{j'}} \|u + \lambda\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)} \leq \|U\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)}.$$

La deuxième étape consiste à montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $U \in X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ satisfaisant (2.62), on a

$$\|U\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla U\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)}.$$

Pour cela nous allons montrer par l'absurde l'inégalité suivante :

$$\|U\|_{X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla U\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.63}$$

Supposons qu'il existe une suite (U_k) satisfaisant (2.62) et vérifiant

$$\|U_k\|_{X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} = 1 \;\text{ et }\; \|\nabla U_k\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{k}.$$

La suite (U_k) étant bornée dans $X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$, espace réfléxif, on peut en extraire une sous-suite encore notée (U_k) qui converge faiblement vers un élément U_* de $X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ satisfaisant (2.62). De plus, on a

$$\|\nabla U_*\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} \leq \lim_{k\to\infty} \inf \|\nabla U_k\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)},$$

ce qui implique $\|\nabla U_*\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} = 0$. L'élément U_* est donc une constante satisfaisant (2.62), ce qui signifie que $U_* = 0$. On considère maintenant un réel $R > 0$ et la partition de l'unité suivante :

$$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n),\; 0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq 1,\; \varphi_1 + \varphi_2 = 1 \text{ dans } \mathbb{R}^n,$$

$$\operatorname{supp} \varphi_1 \subset \overline{B}_{R+1}, \quad \operatorname{supp} \varphi_2 \subset B'_R.$$

Comme les espaces $\boldsymbol{X}^{1,p}_{\alpha,\beta}(B_{R+1})$ et $W^{1,p}(B_{R+1})$ coïncident algébriquement et topologiquement, on en déduit que la sous-suite U_k converge faiblement vers 0 dans $W^{1,p}(B_{R+1})$. Par ailleurs, l'injection de $W^{1,p}(B_{R+1})$ dans $L^p(B_{R+1})$ étant compacte, il vient que

$$U_k \to 0 \text{ dans } L^p(B_{R+1}) \text{ fort.}$$

Comme on a aussi $\|\nabla U_k\|_{L^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)}$ qui tend vers 0, on en déduit que

$$U_k \to 0 \text{ dans } W^{1,p}(B_{R+1}) \text{ fort}$$

et donc

$$\varphi_1 U_k \to 0 \text{ dans } W^{1,p}(B_{R+1}) \text{ fort.}$$

Occupons nous à présent du terme $\varphi_2 U_k$. Grâce à la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$, pour tout k fixé, il existe une suite (ψ_j) qui tend vers $\varphi_2 U_k$ dans $X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$. Maintenant, comme $\varphi_2\psi_j$ appartient à $\mathcal{D}(B'_R)$, d'après le lemme 2.22, il vient

$$\|\varphi_2\psi_j\|_{X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla(\varphi_2\psi_j)\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(B'_R)}.$$

En faisant tendre j vers l'infini , on a

$$\begin{aligned}\|\varphi_2 U_k\|_{X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} &\leq C\|\nabla(\varphi_2 U_k)\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(B'_R)} \\ &\leq C\left(\|\nabla(\varphi_2 U_k)\|^p_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(B'_R\cap B_{R+1})} + \|\nabla U_k\|^p_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(B'_{R+1})}\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

L'ensemble $B'_R \cap B_{R+1}$ est borné et donc les espaces $X^{1,p}_{\alpha,\beta}(B'_R \cap B_{R+1})$ et $W^{1,p}(B'_R \cap B_{R+1})$ coïncident algébriquement et topologiquement. Ceci nous permet de dire que $\varphi_2 U_k$ tend fortement vers 0 dans $W^{1,p}(B'_R \cap B_{R+1})$. Ainsi,

$$\varphi_2 U_k \to 0 \text{ dans } X^{1,p}_{\alpha,\beta}(B'_R).$$

Comme $U_k = \varphi_1 U_k + \varphi_2 U_k$, on en déduit que

$$U_k \to 0 \text{ dans } X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n),$$

ce qui contredit l'hypothèse

$$\|U_k\|_{X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} = 1$$

et achève la preuve. ■

Ce résultat s'étend par partition de l'unité à un domaine extérieur Ω. Plus précisément, nous avons le

Théorème 2.25 *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\beta > \max(0, (1-n+p)/2p)$ et $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 \neq 0$. Soit $j' = \min(j, 0)$, où j est le plus haut degré des polynômes inclus dans*

$X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)$. *Alors, nous avons*

$$\forall u \in X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\Omega), \quad \inf_{\lambda \in \mathbb{P}_{j'}} \|u+\lambda\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\Omega)}. \tag{2.64}$$

Autrement dit, la semi-norme $\|\nabla .\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\Omega)}$ *définit sur* $X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)/\mathbb{P}_{j'}$ *une norme équivalente à la norme induite par* $X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)$.

Le cas $\beta \leq 0$

Comme nous l'avons annoncé précédemment, nous allons étendre (2.60) à toute fonction $u \in \mathcal{D}(B'_R)$.

Lemme 2.26 *Soient* $R > 0$ *un réel fixé,* α *et* β *deux réels tels que tels que* $\beta \leq 0$. *On suppose de plus que* $\alpha + \frac{n}{p} - 1 < 0$ *ou* $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 > 0$. *Alors, nous avons*

$$\forall u \in \mathcal{D}(B'_R), \quad \|u\|_{L^p_{\alpha-1,\beta}(B'_R)} \leq C\|\nabla u\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(B'_R)}. \tag{2.65}$$

Preuve : Soit une fonction $u \in \mathcal{D}(B'_R)$.
1) Le cas $n \geq 3$.
Soit $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{n-1})$, et considèrons le domaine suivant

$$D = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times \;]0,\pi[^{n-2} \times \;]0,2\pi[, \;\; r > R\}.$$

Utilisant les coordonnées sphériques généralisées (2.28) avec $u(\boldsymbol{x}) = v(r,\theta)$, il suffit de montrer que

$$\begin{aligned} I &= \int_D r^{(\alpha-1)p+n-1}(1+r-r\cos\theta_1)^{\beta p}(\sin\theta_1)^{n-2}|v|^p dr d\theta \\ &\leq C\int_D r^{\alpha p+n-1}(1+r-r\cos\theta_1)^{\beta p}(\sin\theta_1)^{n-2}\left|\frac{\partial v}{\partial r}\right|^p dr d\theta. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Nous allons à présent découper le domaine D en trois sous-domaines. Pour cela, on définit $\tilde{r}(\theta_1) = \frac{1}{1-\cos\theta_1}$ et le réel $\tilde{\theta} \in]0,\pi[$ tel que $R = \frac{1}{1-\cos\tilde{\theta}}$. On définit les trois sous-domaines suivants

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{(r,\theta) \in D,\ R < r < \tilde{r}(\theta_1),\ 0 < \theta_1 < \tilde{\theta}\},\\
D_2 &= \{(r,\theta) \in D,\ r > \tilde{r}(\theta_1),\ 0 < \theta_1 < \tilde{\theta}\},\\
D_3 &= \{(r,\theta) \in D,\ r > R,\ \tilde{\theta} < \theta_1 < \pi\}.
\end{aligned}$$

Sur D_1, on a $r(1-\cos\theta_1) \leq \tilde{r}(\theta_1)(1-\cos\theta_1) \leq 1$. Ainsi,

$$1 + r - r\cos\theta_1 \sim 1 \text{ sur } D_1.$$

Par un raisonnement analogue, on obtient

$$1 + r - r\cos\theta_1 \sim r - r\cos\theta_1 \text{ sur } D_2 \cup D_3.$$

D'où on en déduit

$$I \sim I_1 + I_2 + I_3,$$

avec

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{D_1} r^{(\alpha-1)p+n-1}(\sin\theta_1)^{n-2}|v|^p dr d\theta,\\
I_2 &= \int_{D_2} r^{(\alpha+\beta-1)p+n-1}(1-\cos\theta_1)^{\beta p}(\sin\theta_1)^{n-2}|v|^p dr d\theta,\\
I_3 &= \int_{D_3} r^{(\alpha+\beta-1)p+n-1}(1-\cos\theta_1)^{\beta p}(\sin\theta_1)^{n-2}|v|^p dr d\theta.
\end{aligned}$$

Il s'agit à présent d'estimer ces trois intégrales et nous commençons par I_1. Comme $\alpha + \frac{n}{p} - 1 \neq 0$, une intégration par parties et l'application de l'inégalité de Hölder nous donnent immédiatement

$$\begin{aligned}
&\int_R^{\tilde{r}(\theta_1)} r^{(\alpha-1)p+n-1}|v|^p dr \leq \frac{1}{(\alpha-1)p+n}(\tilde{r}(\theta_1))^{(\alpha-1)p+n}|v(\tilde{r}(\theta_1),\theta))|^p +\\
&+ \frac{p}{|(\alpha-1)p+n|}\left(\int_R^{\tilde{r}(\theta_1)} r^{(\alpha-1)p+n-1}|v|^p dr\right)^{1/p'}\left(\int_R^{\tilde{r}(\theta_1)} r^{\alpha p+n-1}\left|\frac{\partial v}{\partial r}\right|^p dr\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$
\begin{aligned}
I_1 \leq & \frac{1}{(\alpha-1)p+n} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} ... \int_0^{\pi}\int_0^{\tilde{\theta}} (\tilde{r}(\theta_1))^{(\alpha-1)p+n} (\sin\theta_1)^{n-2} |v(\tilde{r}(\theta_1),\theta)|^p d\theta_1 ... d\theta_{n-1} \\
& + C \int_{D_1} r^{\alpha p+n-1} (\sin\theta_1)^{n-2} \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^p dr d\theta.
\end{aligned} \tag{2.67}
$$

Puisque $\alpha+\beta+\frac{n}{p}-1 \neq 0$, de la même manière, on obtient

$$
I_2 \leq -\frac{1}{(\alpha+\beta-1)p+n} I_2' + C \int_{D_2} r^{(\alpha+\beta)p+n-1} (1-\cos\theta_1)^{\beta p} (\sin\theta_1)^{n-2} \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^p dr d\theta, \tag{2.68}
$$

où

$$
I_2' = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} ... \int_0^{\pi}\int_0^{\tilde{\theta}} (\tilde{r}(\theta_1))^{(\alpha+\beta-1)p+n} (1-\cos\theta_1)^{\beta p} (\sin\theta_1)^{n-2} |v(\tilde{r}(\theta_1),\theta)|^p d\theta_1 ... d\theta_{n-1}.
$$

On obtient aussi

$$
I_3 \leq C \int_{D_3} r^{(\alpha+\beta)p+n-1} (1-\cos\theta_1)^{\beta p} (\sin\theta_1)^{n-2} \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^p dr d\theta. \tag{2.69}
$$

D'après la définition de $\tilde{r}(\theta_1)$, nous pouvons remarquer que $(\tilde{r}(\theta_1)(1-\cos\theta_1))^{\beta p} = 1$. D'où on a

$$
I_2' = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} ... \int_0^{\pi}\int_0^{\tilde{\theta}} (\tilde{r}(\theta_1))^{(\alpha-1)p+n} (\sin\theta_1)^{n-2} |v(\tilde{r}(\theta_1),\theta)|^p d\theta_1 ... d\theta_{n-1}. \tag{2.70}
$$

Grâce à (2.67), (2.68), (2.69) et (2.70), on obtient

$$
\begin{aligned}
I \leq & C \int_D r^{\alpha p+n-1} (1+r-r\cos\theta_1)^{\beta p} (\sin\theta_1)^{n-2} \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^p dr d\theta \\
& + \left(\frac{1}{(\alpha-1)p+n} - \frac{1}{(\alpha+\beta-1)p+n} \right) I_2'.
\end{aligned}
$$

D'après les hypothèses, on a $\beta \leq 0$ et soit $\alpha + \frac{n}{p} - 1 < 0$, soit $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 > 0$. On en déduit donc que

$$\frac{1}{(\alpha - 1)p + n} - \frac{1}{(\alpha + \beta - 1)p + n} \leq 0,$$

ce qui nous permet d'obtenir (2.65).
2) Le cas $n = 2$.
Il se traite de la même manière que le cas précédent. On utilise les coordonnées polaires et on définit le domaine

$$D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times] - \pi, \pi[, r > R\}.$$

De plus on pose $\tilde{r}(\theta) = \dfrac{1}{1 - \cos\theta}$ et $\tilde{\theta}$ tel que $R = \dfrac{1}{1 - \cos\tilde{\theta}}$. Les trois sous-domaines de D se définissent de la manière suivante

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{(r, \theta) \in D,\ R < r < \tilde{r}(\theta),\ -\tilde{\theta} < \theta < \tilde{\theta}\} \\
D_2 &= \{(r, \theta) \in D,\ r > \tilde{r}(\theta),\ -\tilde{\theta} < \theta_1 < \tilde{\theta}\} \\
D_3 &= \{(r, \theta) \in D,\ r > R,\ \theta \in] - \pi, -\tilde{\theta}[\cup]\tilde{\theta}, \pi[\}.
\end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration. ■

Ce lemme nous permet d'obtenir le deuxième résultat principal de ce paragraphe dont la preuve est similaire à celle du théorème 2.24.

Théorème 2.27 *Soient deux réels α et β tels que $\beta \leq 0$. On suppose de plus que $\alpha + \frac{n}{p} - 1 < 0$ ou $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 > 0$. Soit $j' = \min(j, 0)$ où j est le degré le plus grand des polynômes appartenant à $Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$. Alors nous avons*

$$\forall u \in Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n), \quad \inf_{\lambda \in \mathbb{P}_{j'}} \|u + \lambda\|_{L^p_{\alpha-1,\beta}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.71}$$

Remarque 2.28 Si $\beta = 0$ et $\alpha + \frac{n}{p} - 1 \neq 0$, nous retrouvons les inégalités (2.7) et (2.8).

Remarque 2.29 Sous les hypothèses du théorème 2.27, on peut prendre $f_0 = 0$ dans la caractérisation (2.35) dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^n$. Plus précisément, si $f \in$

$Y^{-1,p'}_{-\alpha,-\beta}(\mathbb{R}^3)$, il existe $\mathbf{F} \in \boldsymbol{L}^{p'}_{-\alpha,-\beta}(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$f = \mathrm{div}\ \mathbf{F}.$$

Nous pouvons étendre le théorème 2.27 à un domaine extérieur Ω.

Théorème 2.30 *Soient deux réels α et β tels que $\beta \leq 0$. On suppose de plus que $\alpha + \frac{n}{p} - 1 < 0$ ou $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 > 0$. Soit $j' = \min(j, 0)$ où j est le degré le plus grand des polynômes appartenant à $Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)$. Alors nous avons*

$$\forall u \in Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\Omega), \quad \inf_{\lambda \in \mathbb{P}_{j'}} \|u + \lambda\|_{L^p_{\alpha-1,\beta}(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\Omega)}. \tag{2.72}$$

2.4.3 Inégalités avec des poids vérifiant la condition A_∞

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que des inégalités du type (2.61) et (2.71) peuvent être obtenues si les poids anisotropiques utilisés appartiennent à une certaine classe de fonctions. Nous avons d'abord besoin de quelques définitions (voir B. Muckenhoupt [41]).

Définition 2.31 1) On dit qu'une fonction w, définie sur $\mathbb{R}^n$ et localement intégrable, satisfait la condition A_q, avec $1 < q < \infty$, si elle est positive et si pour tout cube $\mathbf{Q}$, nous avons

$$\left(\int_{\mathbf{Q}} w(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}\right) \left(\int_{\mathbf{Q}} [w(\boldsymbol{x})]^{-1/(q-1)} d\boldsymbol{x}\right)^{q-1} \leq C |\mathbf{Q}|^q.$$

2) La fonction w satisfait la condition A_∞, si il existe deux réels $a, b \in\,]0, 1[$ tels que pour tout cube $\mathbf{Q}$ et pour tout ensemble $\mathbf{E} \subset \mathbf{Q}$ vérifiant $|\mathbf{E}| < a|\mathbf{Q}|$, nous avons

$$\int_{\mathbf{E}} w(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \leq b \int_{\mathbf{Q}} w(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}.$$

Pour se fixer les idées, dans la suite de ce paragraphe, nous allons supposer $p = 2$ et $n = 3$. Nous allons aussi rappeler quelques résultats que nous utiliserons.
(i) Une fonction satisfait la condition A_∞ si et seulement si il existe $q \in\,]1, \infty[$ tel que u satisfait la condition A_q (voir B. Muckenhoupt [42]).
(ii) Soit α et β deux réels telles que $-1 < \beta < q - 1$ et $-3 < \alpha + \beta < 3(q-1)$. Alors le poids η^α_β satisfait la condition A_q pour tout $1 < q < \infty$ (voir Kračmar Novotný

et Pokorný [36]).
(iii) Soit w un poids appartenant à A_∞. Alors nous avons (voir Perez [50])

$$\forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3), \quad \int_{\mathbb{R}^3} |f(\boldsymbol{x})|^2 w(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \leq C \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla f(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x}, \tag{2.73}$$

si et seulement si

$$\sup_{R>0} R^2 \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} w(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} < \infty.$$

(iv) Soient v et w deux poids tels que w et $\frac{1}{v}$ appartiennent à A_∞. Alors, nous avons (voir Sawyer et Wheeden [52]) :

$$\forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3), \quad \int_{\mathbb{R}^3} |f(\boldsymbol{x})|^2 w(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \leq C \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla f(\boldsymbol{x})|^2 v(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \tag{2.74}$$

si et seulement si

$$\sup_{R>0} |B_R|^{-2/3} \left(\int_{B_R} w(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \right)^{1/2} \left(\int_{B_R} \frac{1}{v(\boldsymbol{x})} d\boldsymbol{x} \right)^{1/2} < \infty.$$

Rappelons que l'inégalité (2.61) n'est pas vérifiée pour $\alpha = \beta = 0$. Mais, néanmoins nous avons le résultat suivant

Proposition 2.32 *Soit σ un réel strictement positif. Alors*

$$\forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3), \quad \int_{\mathbb{R}^3} \eta_{-1+\sigma}^{-1-\sigma} |u|^2 d\boldsymbol{x} \leq C \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 d\boldsymbol{x}. \tag{2.75}$$

Preuve : D'après (i) et (ii), le poids $\eta_{-1+\sigma}^{-1-\sigma}$ appartient à A_∞ pour tout $\sigma > 0$. Ainsi, en utilisant (iii), l'inégalité (2.75) est satisfaite si et seulement si

$$\sup_{R>0} R^2 \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} \eta_{-1+\sigma}^{-1-\sigma} d\boldsymbol{x} < \infty.$$

En utilisant les coordonnées sphériques (2.28), pour $n = 3$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \eta_{-1+\sigma}^{-1-\sigma} d\boldsymbol{x} &= 2\pi \int_0^R \int_0^\pi (1+r)^{-1-\sigma} (1 + r - r\cos\theta)^{-1+\sigma} r^2 \sin\theta \, d\theta dr \\ &= 2\pi \int_0^\pi r^2 (1+r)^{-1-\sigma} \left(\int_0^\pi (1 + r - r\cos\theta)^{-1+\sigma} \sin\theta \, d\theta \right) dr. \end{aligned}$$

D'où, il vient

$$\int_{B_R} \eta_{-1+\sigma}^{-1-\sigma} d\boldsymbol{x} = 2\pi \int_0^R (1+r)^{-1-\sigma} r[(1+2r)^\sigma - 1] dr.$$

Il est ensuite facile de voir que

$$R^2 \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} \eta_{-1+\sigma}^{-1-\sigma} d\boldsymbol{x} = O(1),$$

qui achève la preuve. ■

Remarque 2.33 D'après le théorème 2.1, nous avons

$$\forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3), \quad \int_{\mathbb{R}^3} (1+r)^{-2} |u|^2 d\boldsymbol{x} \leq C \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 d\boldsymbol{x}.$$

Ainsi, en remarquant que, pour $0 < \sigma < 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} (1+r)^{-2} |u|^2 d\boldsymbol{x} \leq \int_{\mathbb{R}^3} \eta_{-1+\sigma}^{-1-\sigma} |u|^2 d\boldsymbol{x},$$

nous pouvons facilement voir que l'inégalité (2.75) améliore celle donnée par le théorème 2.1.

Proposition 2.34 1) *Soient* α *et* β *deux réels tels que* $0 < \beta < \frac{1}{2}$ *et* $-\frac{1}{2} < \alpha + \beta < \frac{3}{2}$. *Alors nous avons*

$$\forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3), \quad \int_{\mathbb{R}^3} \eta_{2\beta-1}^{2\alpha-1} |u|^2 d\boldsymbol{x} \leq C \int_{\mathbb{R}^3} \eta_{2\beta}^{2\alpha} |\nabla u|^2 d\boldsymbol{x}. \tag{2.76}$$

2) *Si* α *et* β *satisfont* $-\frac{1}{2} < \beta \leq 0$ *et* $-\frac{1}{2} < \alpha + \beta < \frac{3}{2}$, *alors nous avons*

$$\forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3), \quad \int_{\mathbb{R}^3} \eta_{2\beta}^{2\alpha-2} |u|^2 d\boldsymbol{x} \leq C \int_{\mathbb{R}^3} \eta_{2\beta}^{2\alpha} |\nabla u|^2 d\boldsymbol{x}. \tag{2.77}$$

Preuve : 1) Les poids $\eta_{2\beta-1}^{2\alpha-1}$ et $\eta_{2\beta}^{2\alpha}$ appartiennent à A_∞ si et seulement si

$$0 < \beta < \frac{1}{2} \text{ et } -\frac{1}{2} < \alpha + \beta < \frac{3}{2}.$$

En procédant maintenant de la même manière que dans la preuve de la proposition 2.32 et en utilisant (iv), on obtient

$$|B_R|^{-2/3}\left(\int_{B_R}\eta_{2\beta-1}^{2\alpha-1}\right)^{1/2}\left(\int_{B_R}\eta_{-2\beta}^{-2\alpha}\right)^{1/2}=O(1),$$

qui entraîne (2.76).
2) la preuve de (2.77) est similaire à la précédente. ■

Remarque 2.35 Si α et β sont deux réels qui satisfont

$$\beta>0 \text{ et } \alpha+\beta+\frac{1}{2}>0,$$

alors les poids $\eta_{2\beta-1}^{2\alpha-1}$ et $\eta_{-2\beta}^{-2\alpha}$ n'appartiennent pas nécessairement à A_∞. Dans ce cas, le résultat (iv) ne peut être utilisé. Mais d'après le théorème 2.24, pour tout $u\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^3}\eta_{2\beta-1}^{2\alpha-1}|u|^2d\boldsymbol{x}\le C\int_{\mathbb{R}^3}\eta_{2\beta}^{2\alpha}|\nabla u|^2d\boldsymbol{x}.$$

Par ailleurs, si $\beta>0$ et $\alpha+\beta+\frac{1}{2}<0$, alors, toujours d'après le théorème 2.24, pour toute fonction $u\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, nous avons

$$\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3}\eta_{2\beta-1}^{2\alpha-1}|u+\lambda|^2d\boldsymbol{x}\le C\int_{\mathbb{R}^3}\eta_{2\beta}^{2\alpha}|\nabla u|^2d\boldsymbol{x}. \qquad (2.78)$$

Nous pouvons ainsi constater que l'application du résultat de Sawyer et Wheeden (iv) ne donne que des résultats partiels et ne permet pas d'obtenir des inégalités de type (2.78). Nous pouvons donc en déduire que le théorème 2.24 étend le résultat de la proposition 2.34 1). De même, le théorème 2.27 étend le résultat de la proposition 2.34 2).

2.4.4 Propriétés fonctionelles d'opérateurs

Dans ce paragraphe, nous montrons que les inégalités de Hardy obtenues et données dans les théorèmes 2.24 et 2.27 nous permettent d'étendre les propriétés d'isomorphismes des opérateurs gradient, divergence et laplacien dans les espaces avec poids anisotropes.

Grâce à ces résultats, nous pouvons aussi établir des résultats de décomposition de Helmholtz dans ces espaces. Introduisons l'espace

$$\mathbf{H}^p_{\alpha,\beta} = \{\boldsymbol{v} \in L^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3),\ \text{div}\ \boldsymbol{v} = 0\}.$$

Proposition 2.36 *Soient α et β deux réels satisfaisant $\beta > \max(0, \frac{1}{2} - \frac{1}{p})$ et $\alpha +$ $+\beta + \frac{3}{p} - 1 \neq 0$. Les opérateurs suivants sont des isomorphismes :*

$$\nabla \ : \ X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)/\mathbb{P}_{\mathrm{j}'} \to \boldsymbol{L}^{\mathrm{p}}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3) \perp \mathbf{H}^{\mathrm{p}'}_{-\alpha,-\beta} \tag{2.79}$$

$$\text{div} \ \ : \ \boldsymbol{L}^{p'}_{-\alpha,-\beta}(\mathbb{R}^3)/\mathbf{H}^{p'}_{-\alpha,-\beta} \to X^{-1,p'}_{-\alpha,-\beta}(\mathbb{R}^3) \perp \mathbb{P}_{\mathrm{j}'}, \tag{2.80}$$

avec $j' = \min(j, 0)$ et $j < \frac{1}{2} - \frac{3}{p} + \frac{1}{p}\min(1, -\beta p + p/2)$.

Preuve : L'opérateur gradient est clairement linéaire et continu. Il est aussi injectif car si $u \in X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$ vérifie $\nabla u = 0$, alors, u est au plus une constante de $X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$, c'est-à-dire, $u \in \mathbb{P}_{\mathrm{j}'}$ (voir (2.30)). Il nous reste à montrer la surjectivité. D'après le théorème 2.24, on a

$$\|u\|_{X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)/\mathbb{P}_{\mathrm{j}'}} \leq C\|\nabla u\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)}.$$

Ainsi, l'opérateur gradient est un isomorphisme de $X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)/\mathbb{P}_{\mathrm{j}'}$ sur son image R_g qui est un sous-espace fermé de $\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$. Nous pouvons donc écrire

$$R_g = (\ker(\text{div}\ ))^{\perp},$$

où l'opérateur divergence est défini par

$$\text{div} \ \ : \ \boldsymbol{L}^{p'}_{-\alpha,-\beta}(\mathbb{R}^3) \to X^{-1,p'}_{-\alpha,-\beta}(\mathbb{R}^3) \perp \mathbb{P}_{\mathrm{j}'}.$$

Nous en déduisons que

$$R_g = \boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3) \perp \mathbf{H}^{p'}_{-\alpha,-\beta}.$$

Par conséquent, l'opérateur (2.79) est bien un isomorphisme et, par dualité et transposition nous en déduisons aussi que l'opérateur (2.80) est un isomorphisme. ■

Nous allons maintenant montrer des résultats d'isomorphisme dans les espaces avec poids anisotropes pour l'opérateur laplacien. Rappelons tout d'abord que $(\boldsymbol{\mathcal{O}}, \boldsymbol{\mathcal{P}})$ désigne la solution fondamentale des équations d'Oseen où $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ est définie par

$$\mathcal{P}_i(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \mathcal{E}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}|}\right)$$

et $\mathcal{E}$ désigne la solution fondamentale du laplacien.

Proposition 2.37 *Soient α et β deux réels tels que $0 < \beta < 1 - \frac{1}{p}$ et $1 - \frac{3}{p} < \alpha + \beta < 2 - \frac{3}{p}$. Alors l'opérateur laplacien*

$$\Delta \;:\; Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3) \to Y^{-1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3) \tag{2.81}$$

est un isomorphisme.

Preuve : L'opérateur défini par (2.81) est clairement linéaire et continu. De plus, si $u \in Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$ vérifie $\Delta u = 0$, alors u est un polynôme de $\mathbb{P}_k$ avec $k < 1 - \frac{3}{p} - (\alpha+\beta) < 0$. D'après (2.31) et les hypothèses sur α et β, on a $k < 0$. On en déduit que $u = 0$ et l'opérateur est donc injectif. Il reste à montrer la surjection. Soit $f \in Y^{-1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$. Comme $\alpha + \beta < 2 - \frac{3}{p}$, on a $-\alpha - \beta + \frac{3}{p'} - 1 > 0$ et la remarque 2.29 nous permet d'écrire

$$f = \operatorname{div} \mathbf{F},$$

avec $\mathbf{F} \in \boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$. En utilisant les résultats sur la convolution par la solution fondamentale démontrés dans [36], sous les hypothèses sur α et β, il vient, pour tout $i = 1, 2, 3$, $\mathcal{P}_i * F_i \in Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$. Posons $\pi = \mathcal{P}_i * F_i$, on a

$$\Delta\pi = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(\mathcal{P}_i * F_i) = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_i} * F_i\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(\mathcal{E} * F_i) = \operatorname{div} \mathbf{F} = f.$$

Nous avons donc trouvé une fonction $\pi \in Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$ qui vérifie $\Delta\pi = f$, ce qui signifie que l'opérateur est surjectif. ■

Par dualité et transposition, nous avons le résultat suivant

Proposition 2.38 *Soient α et β deux réels tels que $-\frac{1}{p} < \beta < 0$ et $1-\frac{3}{p} < \alpha+\beta < 2-\frac{3}{p}$. Alors l'opérateur laplacien*

$$\Delta \ : \ Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3) \to Y^{-1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3) \tag{2.82}$$

est un isomorphisme.

Grâce à ces trois propositions, nous allons montrer que sous certaines conditions sur α et β, les espaces $X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$ et $Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$ coïncident. Nous allons tout d'abord montrer un résultat de densité. Introduisons l'espace

$$\boldsymbol{\mathcal{V}} = \{\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3),\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{\varphi} = 0\}.$$

Lemme 2.39 *Soient α et β deux réels tels que $0 < \beta < 1-\frac{1}{p}$ ou $-\frac{1}{p} < \beta < 0$. On suppose de plus que $1-\frac{3}{p} < \alpha+\beta < 2-\frac{3}{p}$. Alors*

l'espace $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ est dense dans $\mathbf{H}^p_{\alpha,\beta}$.

Preuve : Soit une fonction $\boldsymbol{v}$ appartenant à $\mathbf{H}^p_{\alpha,\beta}$. Alors $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{Y}^{-1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$ et d'après les propositions 2.37 et 2.38, il existe un unique vecteur $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{Y}^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$\Delta\boldsymbol{\psi} = \mathbf{rot}\ \boldsymbol{v}.$$

En prenant le rotationnel de cette dernière équation, on obtient

$$-\Delta\mathbf{rot}\ \boldsymbol{\psi} = \mathbf{rot}\ \mathbf{rot}\ \boldsymbol{v} = -\Delta\boldsymbol{v}.$$

Ainsi $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{v}$ est un vecteur dont chaque composante est un polynôme harmonique de $L^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$. Mais les hypothèses sur α et β et (2.29) entraînent que $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{v}$. Maintenant, la densité de $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^3)$ dans $\boldsymbol{Y}^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$ nous assure l'existence d'une suite $(\boldsymbol{\psi}_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^3)$ qui tend vers $\boldsymbol{\psi}$ dans $\boldsymbol{Y}^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$. Cela implique que la suite $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{\psi}_k$, qui appartient à $\boldsymbol{\mathcal{V}}$, tend vers $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{v}$ dans $\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$. ■

Ce lemme et la proposition 2.36 nous donne le résultat suivant.

Proposition 2.40 *Soient α et β deux réels tels que* $\max(0, \frac{1}{2} - \frac{1}{p}) < \beta < 1 - \frac{1}{p}$ *et* $1 - \frac{3}{p} < \alpha + \beta < 2 - \frac{3}{p}$*. Alors nous avons l'inclusion*

$$Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3) \subset L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3).$$

En d'autres termes les espaces $X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$ et $Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$ coïncident algébriquement et topologiquement.

Preuve : Soit $\pi \in Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$. Alors pour tout $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$, on a

$$< \nabla\pi, \boldsymbol{\varphi} >_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)\times \boldsymbol{L}^{p'}_{-\alpha,-\beta}(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

D'après les hypothèses sur α et β, $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ est dense dans $\mathbf{H}^{p'}_{-\alpha,-\beta}$. Nous avons donc $\nabla\pi \in \boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3) \perp \mathbf{H}^{p'}_{-\alpha,-\beta}$ et la proposition 2.36 nous assure l'existence d'une unique fonction $\psi \in X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3) \subset Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\nabla\psi = \nabla\pi$. On en déduit que $\psi - \pi$ est une constante de $Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$. Mais les hypothèses sur α et β montrent qu'il n'y a pas de constantes non nulles dans $Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$. Nous pouvons donc conclure que $\pi = \psi \in L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. ■

Cette proposition nous permet d'améliorer le résultat d'isomorphisme du laplacien défini par (2.81). Par dualité et transposition, nous améliorons aussi (2.82).

Théorème 2.41 *Soient α et β deux réels tels que* $1 - \frac{3}{p} < \alpha + \beta < 2 - \frac{3}{p}$.
(i) *Si* $\max(0, \frac{1}{2} - \frac{1}{p}) < \beta < 1 - \frac{1}{p}$*, alors l'opérateur*

$$\Delta \ : \ X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3) \to Y^{-1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3) \tag{2.83}$$

est un isomorphisme.
(ii) *Si* $-\frac{1}{p} < \beta < \max(0, \frac{1}{p} - \frac{1}{2})$*, alors l'opérateur*

$$\Delta \ : \ Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3) \to X^{-1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3) \tag{2.84}$$

est un isomorphisme.

Nous terminons ce paragraphe par des résultats sur les potentiels vecteurs et par des résultats qui étendent la décomposition de Helmholtz dans des espaces avec poids anisotropiques. Rappelons que le cas particulier $\beta = 0$ a été étudié par Girault [29]. Rappelons qu'un champs de vecteur $\boldsymbol{\psi}$ est appelé potentiel vecteur d'un champs de vecteur $\boldsymbol{u}$ donné si il satisfait

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{u}.$$

Théorème 2.42 *Soient α et β deux réels tels que $1 - \frac{3}{p} < \alpha + \beta < 2 - \frac{3}{p}$. Soit $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant*

$$\text{div}\ \boldsymbol{u} = 0.$$

(i) Si $\max(0, \frac{1}{2} - \frac{1}{p}) < \beta < 1 - \frac{1}{p}$, alors il existe un unique potentiel vecteur $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{X}^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$ tel que

$$\boldsymbol{u} = \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\psi},\ \text{div}\ \boldsymbol{\psi} = 0, \tag{2.85}$$

et

$$\|\boldsymbol{\psi}\|_{\boldsymbol{X}^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)}. \tag{2.86}$$

(ii) Si $-\frac{1}{p} < \beta < \max(0, \frac{1}{p} - \frac{1}{2})$, alors il existe un unique potentiel vecteur $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{Y}^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant (2.85) et tel que

$$\|\boldsymbol{\psi}\|_{\boldsymbol{Y}^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)}. \tag{2.87}$$

Preuve : La preuve de (i) et de (ii) sont analogues. Nous allons donc la faire uniquement pour (i). Comme $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$, on a $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{Y}^{-1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$ et d'après le théorème 2.41 (i), il existe un unique vecteur $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{X}^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$ solution de

$$-\Delta\boldsymbol{\psi} = \mathbf{rot}\ \boldsymbol{u}, \tag{2.88}$$

et satisfaisant l'estimation (2.86). Maintenant, comme div $\boldsymbol{u} = 0$, en prenant le rotationel de l'équation précédente, on obtient

$$-\Delta(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{u}) = 0.$$

Cela qui implique que $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{u}$ est un vecteur dont chaque composante est un polynôme harmonique de $L^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$. Les hypothèses sur α et β nous permettent de conclure que $\boldsymbol{u} = \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\psi}$. En prenant, à présent la divergence de (2.88), nous observons que $\Delta(\text{div}\ \boldsymbol{\psi}) = 0$. De la même manière que précédemment, nous en concluons que div $\boldsymbol{\psi} = 0$. ■

Le prochain et dernier résultat de ce paragraphe concerne la décomposition de Helmholtz.

Théorème 2.43 *Soient α et β deux réels satisfaisant $1 - \frac{3}{p} < \alpha + \beta < 2 - \frac{3}{p}$. Soit $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$.*
(i) Si $\max(0, \frac{1}{2} - \frac{1}{p}) < \beta < 1 - \frac{1}{p}$, alors $\boldsymbol{f}$ a la décomposition unique suivante

$$\boldsymbol{f} = \nabla\varphi + \textbf{rot}\ \boldsymbol{\psi}, \tag{2.89}$$

où $\varphi \in X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$ et $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{X}^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$. De plus, nous avons l'estimation

$$\|\varphi\|_{X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)} + \|\boldsymbol{\psi}\|_{\boldsymbol{X}^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\boldsymbol{f}\,\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)}. \tag{2.90}$$

(ii) Si $-\frac{1}{p} < \beta < \max(0, \frac{1}{p} - \frac{1}{2})$, alors $\boldsymbol{f}$ a la décomposition unique (2.89), où $\varphi \in Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$ et $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{Y}^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$. De plus, nous avons

$$\|\varphi\|_{Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)} + \|\boldsymbol{\psi}\|_{\boldsymbol{Y}^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\boldsymbol{f}\,\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)}. \tag{2.91}$$

Preuve : (i) Comme $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$, on a div $\boldsymbol{f} \in Y^{-1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$. Le théorème 2.41 (i) assure l'existence d'une unique fonction $\varphi \in X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$\Delta\varphi = \text{div}\ \boldsymbol{f},$$

satisfaisant aussi

$$\|\varphi\|_{X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\text{div}\ \boldsymbol{f}\,\|_{Y^{-1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\boldsymbol{f}\,\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)}. \tag{2.92}$$

Par ailleurs, comme $\boldsymbol{f} - \nabla\varphi \in \boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$ et div $(\boldsymbol{f} - \nabla\varphi) = 0$, le théorème 2.42 assure l'existence d'un unique vecteur potentiel $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{X}^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$ tel que

$$\boldsymbol{f} - \nabla\varphi = \textbf{rot}\ \boldsymbol{\psi},$$

satisfaisant aussi

$$\|\boldsymbol{\psi}\|_{\boldsymbol{X}^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\boldsymbol{f} - \nabla\varphi\|_{L^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\boldsymbol{f}\,\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)}. \tag{2.93}$$

Les estimations (2.92) et (2.93) nous donnent (2.90).
(ii) La preuve est analogue à la précédente. ■

2.4.5 Inégalités de Hardy avec poids logarithmiques

Comme nous avons pu le constater, l'inégalité (2.61) du théorème 2.24 n'est obtenue que pour les valeurs de α et β ne vérifiant pas la condition

$$\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 = 0. \tag{2.94}$$

De même, l'inégalité (2.71) du théorème n'est pas valable pour les valeurs de α et β satisfaisant

$$\alpha + \frac{n}{p} - 1 = 0 \text{ ou } \alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 = 0. \tag{2.95}$$

Les valeurs de α, β, p et n vérifiant (2.94) et (2.95) sont appelées valeurs critiques. L'objectif de ce paragraphe est de montrer qu'en introduisant des poids logarithmiques dans les définitions de $X^{1,p}_{\alpha,\beta}$ et $Y^{1,p}_{\alpha,\beta}$, nous pouvons obtenir des inégalités de Hardy vérifiées par les fonctions de ces espaces. Ces définitions sont inspirées de la définition générale de l'espace $W^{1,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$. On introduit les espaces :
Si $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 \neq 0$,

$$X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n),\;\; \nabla u \in L^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)\},$$

si $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 = 0$,

$$X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n) = \{(\ln(1+\rho))^{-1}u \in L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n),\;\; \nabla u \in L^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Si $\alpha + \frac{n}{p} - 1 \neq 0$ et $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 \neq 0$

$$Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^p_{\alpha-1,\beta}(\mathbb{R}^n),\;\; \nabla u \in \boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)\},$$

dans le cas contraire

$$Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n) = \{(\ln(1+\rho))^{-1}u \in L^p_{\alpha-1,\beta}(\mathbb{R}^n),\;\; \nabla u \in \boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)\}.$$

De la même manière que pour l'espace $W^{1,p}_0(\mathbb{R}^n)$, le poids logarithmique n'apparaît que pour les valeurs critiques (2.94) et (2.95). Nous allons montrer à présent montrer un résultat de densité.

Proposition 2.44

L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ et dans $Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve : Comme la preuve est similaire pour les deux espaces, nous allons uniquement la faire pour $X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$. Le cas non critique $\alpha+\beta+\frac{n}{p}-1 \neq 0$ a déjà été prouvé dans la proposition 2.16. Nous procédons de la même manière pour le cas critique $\alpha+\beta+\frac{n}{p}-1=0$. La différence est dans le choix de la fonction de troncature. Soit $\phi \in \mathcal{C}^\infty(]0,\infty[)$ telle que

$$\begin{aligned} \phi(t) &= 1 \text{ si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \leq \phi(t) &\leq 1 \text{ si } 1 \leq t \leq 2 \\ \phi(t) &= 1 \text{ si } t \geq 2. \end{aligned}$$

Nous introduisons la fonction ϕ_k telle que

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \phi_k(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \phi\left(\dfrac{k}{\ln r}\right), & r > 1, \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{x}) = 1 &\;\;\text{si}\;\; 0 \leq |\boldsymbol{x}| \leq e^{k/2} \\ 0 \leq \phi(\boldsymbol{x}) \leq 1 &\;\;\text{si}\;\; e^{k/2} \leq |\boldsymbol{x}| \leq e^k \\ \phi(\boldsymbol{x}) = 0 &\;\;\text{si}\;\; |\boldsymbol{x}| \geq e^k. \end{aligned}$$

Nous avons aussi l'inégalité (voir [6] ou [32])

$$|\nabla \phi_k(\boldsymbol{x})| \leq C r^{-1} (\lg r)^{-1}.$$

En posant maintenant $u_k = u\varphi_k$ et en procédant comme pour la preuve de la proposition 2.16, on montre facilement que $\|u - u_k\|_{X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)}$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini. ■

Nous allons donc maintenant établir des inégalités de Hardy incluant les valeurs critiques (2.94) et (2.95). Deux cas seront à distinguer. Les cas $\beta > 0$ et $\beta \leq 0$.

Le cas $\beta > 0$

La preuve du lemme suivant est analogue à celle du lemme 2.21.

Lemme 2.45 *Soient α et β deux réels satisfaisant $\beta > \max(0, (1 - n + p)/2p)$. Alors, si $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 = 0$, nous avons*

$$\forall u \in \mathcal{D}(S), \quad \|(\lg r)^{-1} u\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(S)} \leq C \|(\lg r)^{-1} \nabla u\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(S)}. \tag{2.96}$$

Nous allons à présent rappeler une inégalité de Hardy généralisée dont la preuve peut se trouver dans [14]. Soit une fonction $f \in \mathcal{D}(]R, +\infty[)$,
a) si $\sigma, \gamma \in \mathbb{R}$, avec $\sigma \neq 1$ et $R > \exp\left(\frac{2|\gamma|}{|\sigma+1|}\right)$, nous avons

$$\int_R^{+\infty} r^\sigma (\ln r)^\gamma |f(r)|^p dr \leq C \int_R^{+\infty} r^{\sigma+p} (\ln r)^\gamma |f'(r)|^p dr. \tag{2.97}$$

b) Si $\gamma \in \mathbb{R}$, avec $\gamma \neq -1$ et $R > 1$, nous avons

$$\int_R^{+\infty} r^{-1} (\ln r)^\gamma |f(r)|^p dr \leq C \int_R^{+\infty} r^{-1+p} (\ln r)^{\gamma+p} |f'(r)|^p dr. \tag{2.98}$$

Grâce à l'inégalité (2.98), nous pouvons prouver le lemme suivant :

Lemme 2.46 *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avec $\beta > \max(0, (1 - n + p)/2p)$. Alors, si $\alpha + \beta +$*

$+\frac{n}{p} - 1 = 0$, *nous avons*

$$\forall u \in \mathcal{D}(B'_R), \quad \|(\lg r)^{-1} u\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(B'_R)} \leq C \|\nabla u\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(B'_R)}. \tag{2.99}$$

Preuve : Les idées de la preuve sont les mêmes que celles de la preuve du lemme 2.22. Nous rappelons le domaine

$$D_{R,\lambda} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\ r > R,\ \lambda r < s\}$$

et nous introduisons la partition de l'unité définie par (2.53). Soit maintenant $u \in \mathcal{D}(B'_R)$ et commençons par prouver

$$\|(\lg r)^{-1} u \varphi_1\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(B'_R)} \leq C \|\nabla u\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(B'_R)}. \tag{2.100}$$

Par le lemme 2.45, nous avons

$$\begin{aligned} \|(\lg r)^{-1} u \varphi_1\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(B'_R)} &= \|(\lg r)^{-1} u \varphi_1\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(S_{R,\lambda})} \\ &\leq C \|(\lg r)^{-1} \nabla(u \varphi_1)\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(S_{R,\lambda})}. \end{aligned} \tag{2.101}$$

Nous pouvons ensuite écrire

$$\begin{aligned} \|(\lg r)^{-1} \nabla(u\varphi_1)\|^p_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(S_{R,\lambda})} \leq{}& C \int_{S_{R,\lambda}} (1+r)^{\alpha p} (1+s)^{\beta p}\, (\lg r)^{-p} |\nabla u|^p d\boldsymbol{x} \\ &+ C \int_{S_{R,\lambda} \cap D_{R,\lambda/2}} (1+r)^{\alpha p} (1+s)^{\beta p}\, (\lg r)^{-p} |u \nabla \varphi_1|^p d\boldsymbol{x}. \end{aligned} \tag{2.102}$$

Comme $0 \leq \varphi_2 \leq 1$, pour le second terme du membre de droite de (2.102), on a

$$\begin{aligned} &\int_{S_{R,\lambda} \cap D_{R,\lambda/2}} (1+r)^{\alpha p} (1+s)^{\beta p} (\lg r)^{-p} |u \nabla \varphi_1|^p d\boldsymbol{x} \\ &\leq C \int_{S_{R,\lambda} \cap D_{R,\lambda/2}} r^{(\alpha+\beta-1)p} (\ln r)^{-p} |u|^p d\boldsymbol{x}. \end{aligned} \tag{2.103}$$

Nous utilisons à présent les coordonnées sphériques généralisées (2.28) pour $n \geq 3$ et les coordonnées polaires pour $n = 2$, avec $u(\boldsymbol{x}) = v(r, \theta)$. Comme $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 = 0$, l'inégalité (2.98) nous donne

$$\int_R^{+\infty} r^{(\alpha+\beta-1)p+n-1}(\ln r)^{-p}|v|^p dr \leq C\int_R^{+\infty} r^{(\alpha+\beta)p+n-1}\left|\frac{\partial v}{\partial r}\right|^p dr.$$

D'où, en intégrant par rapport à θ, on montre que

$$\int_{S_{R,\lambda}\cap D_{R,\lambda/2}} r^{(\alpha+\beta-1)p}(\ln r)^{-p}|u|^p d\boldsymbol{x} \leq \int_{S_{R,\lambda}\cap D_{R,\lambda/2}} r^{(\alpha+\beta)p}|\nabla u|^p d\boldsymbol{x}. \tag{2.104}$$

Les estimations (2.102) (2.103) et (2.104) nous permettent d'obtenir (2.100). Montrons maintenant l'estimation suivante

$$\|(\lg r)^{-1}u\varphi_2\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(B'_R)} \leq C\|\nabla u\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(B'_R)}. \tag{2.105}$$

Il vient

$$\begin{aligned}
\|(\lg r)^{-1}u\varphi_2\|^p_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(B'_R)} &= \int_{D_{R,\lambda/2}} (\lg r)^{-p}(1+r)^{(\alpha-\frac{1}{2})p}(1+s)^{(\beta-\frac{1}{2})p}|u\varphi_2|^p d\boldsymbol{x}\\
&\leq \int_{D_{R,\lambda/2}} (\lg r)^{-p}(1+r)^{(\alpha-\frac{1}{2})p}(1+s)^{(\beta-\frac{1}{2})p}|u|^p d\boldsymbol{x}\\
&\leq C\int_{D_{R,\lambda/2}} (\ln r)^{-p}r^{(\alpha+\beta-1)p}|u|^p d\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

De même que précédemment, en utilisant (2.98), nous pouvons démontrer que

$$\int_{D_{R,\lambda/2}} (\ln r)^{-p}r^{(\alpha+\beta-1)p}|u|^p d\boldsymbol{x} \leq C\int_{D_{R,\lambda/2}} r^{(\alpha+\beta)p}|\nabla u|^p d\boldsymbol{x}. \tag{2.106}$$

L'inégalité (2.106) entraîne (2.105), ce qui conclut la preuve. ■

Ce lemme nous permet d'obtenir l'inégalité de Hardy pour le cas critique (2.94).

Théorème 2.47 *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avec $\beta > \max(0, (1-n+p)/2p)$ et $\alpha+\beta+\frac{n}{p}-1 = 0$. Soit $j' = \min(j, 0)$ où j est le plus haut degré des polynômes appartenant à $X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$. Alors, nous avons*

$$\forall u \in X^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n), \quad \inf_{\lambda\in\mathbb{P}_{j'}} \|(\lg r)^{-1}(u+\lambda)\|_{L^p_{\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla u\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)}.$$

Le cas $\beta \leq 0$

Le lemme suivant est l'équivalent du lemme 2.26 pour le cas critique (2.95).

Lemme 2.48 *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\beta \leq 0$. On suppose de plus $\alpha + \frac{n}{p} - 1 \leq 0$ ou $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 \geq 0$. Alors, pourvu que l'on ait pas simultanément*

$$\beta < 0 \text{ et } \alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 = 0,$$

nous avons

$$\forall u \in \mathcal{D}(B'_R), \quad \|(\lg r)^{-1} u\|_{L^p_{\alpha-1,\beta}(B'_R)} \leq C \|\nabla u\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(B'_R)}. \tag{2.107}$$

Preuve : Soit $u \in \mathcal{D}(B'_R)$ et posons

$$I = \int_{B'_R} (\ln r)^{-p} r^{(\alpha-1)p} (1+s)^{\beta p} |u|^p d\boldsymbol{x}.$$

Nous ne faisons la preuve que pour $n \geq 3$. Le cas $n = 2$ se traite d'une manière similaire. Rappelons le domaine défini par

$$D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times]0, \pi[^{n-2} \times]0, 2\pi[, r > R\}.$$

En utilisant les coordonnées sphériques généralisées définies par (2.28) avec $u(\boldsymbol{x}) = v(r, \theta)$, nous pouvons écrire

$$I = \int_D (\ln r)^{-p} r^{(\alpha-1)p+n-1} (1 + r - r\cos\theta_1)^{\beta p} (\sin\theta_1)^{n-2} |v|^p dr d\theta.$$

Nous reprenons à présent les mêmes notations ainsi que les mêmes sous-domaines que dans la preuve du lemme 2.26. Nous avons par conséquent

$$I_1 \sim I_1 + I_2 + I_3,$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{D_1} (\ln r)^{-p} r^{(\alpha-1)p+n-1} (\sin\theta_1)^{n-2} |v|^p drd\theta, \\ I_2 &= \int_{D_2} (\ln r)^{-p} r^{(\alpha+\beta-1)p+n-1} (1-\cos\theta_1)^{\beta p} (\sin\theta_1)^{n-2} |v|^p drd\theta, \\ I_3 &= \int_{D_3} (\ln r)^{-p} r^{(\alpha+\beta-1)p+n-1} (1-\cos\theta_1)^{\beta p} (\sin\theta_1)^{n-2} |v|^p drd\theta. \end{aligned}$$

Il nous reste maintenant à estimer ces trois intégrales. Il y a trois cas à considérer.

1) Le cas $\alpha + \frac{n}{p} - 1 < 0$ ou $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 > 0$.

Comme dans la démonstration du lemme 2.26, nous pouvons montrer que

$$I \leq C \int_D r^{\alpha p+n-1} (1 + r - r\cos\theta_1)^{\beta p} (\sin\theta_1)^{n-2} \left|\frac{\partial v}{\partial r}\right| drd\theta.$$

2) Le cas $\alpha + \frac{n}{p} - 1 = 0$ et $\beta \leq 0$.

Si $\beta = 0$, nous retrouvons les inégalités de Hardy présentées dans le théorème 2.1. Nous pouvons donc supposer $\beta < 0$. Dans ce cas, on en déduit que $\alpha+\beta+\frac{n}{p}-1 < 0$. Ainsi, une intégration par parties et l'inégalité de Hölder nous donnent

$$I_2 \leq -\frac{2}{\beta p} I_2' + C \int_{D_2} (\ln r)^{-p} r^{-1+p+\beta p} (1-\cos\theta_1)^{\beta p} (\sin\theta_1)^{n-2} \left|\frac{\partial v}{\partial r}\right|^p drd\theta, \quad (2.108)$$

avec

$$I_2' = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} ... \int_0^{\pi} \int_0^{\tilde{\theta}} (\ln \tilde{r}(\theta_1))^{-p} (\sin\theta_1)^{n-2} |v(\tilde{r}(\theta_1), \theta)|^p d\theta_1 ... d\theta_{n-1}.$$

Grâce à (2.98), on obtient

$$I_3 \leq C \int_{D_3} (\ln r)^{-p} r^{(\alpha+\beta)p+n-1} (1-\cos\theta_1)^{\beta p} (\sin\theta_1)^{n-2} \left|\frac{\partial v}{\partial r}\right|^p drd\theta. \quad (2.109)$$

Il nous reste à présent à estimer I_1. Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_R^{\tilde{r}(\theta_1)} (\ln r)^{-p} r^{(\alpha-1)p+n-1} |v|^p dr \\ &= \int_R^{\tilde{r}(\theta_1)} (\ln r)^{-p} r^{-1} |v|^p dr. \end{aligned}$$

En faisant une intégration par parties et en utilisant une inégalité de Hölder, il vient

$$J_1 \leq \frac{1}{1-p} |v(\tilde{r}(\theta_1), \theta)|^p (\ln \tilde{r}(\theta_1))^{1-p} + C \int_R^{\tilde{r}(\theta_1)} r^{-1+p} \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^p dr.$$

Ce qui donne

$$I_1 \leq \frac{\ln \tilde{r}(\theta_1)}{1-p} I_2' + C \int_{D_1} r^{-1+p} (\sin \theta_1)^{n-2} \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^p dr d\theta. \tag{2.110}$$

Maintenant par (2.108) (2.109) (2.110), on obtient

$$\begin{aligned} I \leq &\left(\frac{\ln \tilde{r}(\theta_1)}{1-p} - \frac{2}{\beta p} \right) I_2' \\ &+ \int \int_D r^{-1+p} (1 + r - r \cos \theta_1)^{\beta p} (\sin \theta_1)^{n-2} \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^p dr d\theta. \end{aligned} \tag{2.111}$$

Comme R est suffisamment grand et que $\tilde{r}(\theta_1) > R$ dans D_1, on en déduit que

$$\frac{\ln \tilde{r}(\theta_1)}{1-p} - \frac{2}{\beta p} \leq 0,$$

ce qui prouve (2.107).

3) Le cas $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 = 0$ et $\beta = 0$.

Si $\beta = 0$, l'inégalité (2.107) fait partie des inégalités données par le théorème 2.1 et démontrées dans [6]. ■

Remarque 2.49 La validité de l'inégalité (2.107) pour les réels α et β satisfaisant $\beta < 0$ et $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 = 0$ est une question ouverte.

Le lemme précédent nous permet d'avoir le résultat suivant

Théorème 2.50 *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\beta \leq 0$. On suppose de plus $\alpha + \frac{n}{p} - 1 \leq 0$ ou $\alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 \geq 0$ pourvu que l'on ait pas simultanément*

$$\beta < 0 \text{ et } \alpha + \beta + \frac{n}{p} - 1 = 0.$$

Soit $j' = \min(j, 0)$, où j est le plus haut degré des polynômes appartenant à $Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$. Alors nous avons

$$\forall u \in Y^{1,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n), \quad \inf_{\lambda \in \mathbb{P}_{j'}} \|(\lg r)^{-1}(u + \lambda)\|_{L^p_{\alpha-1,\beta}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla u\|_{\boldsymbol{L}^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)}.$$

Chapitre 3

Le problème stationnaire d'Oseen dans $\mathbb{R}^3$

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier le problème d'Oseen suivant. Étant donnés $\boldsymbol{f}$ et g, nous cherchons un couple $(\boldsymbol{u}, \pi)$ solution de

$$\begin{aligned} -\Delta \boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi = \boldsymbol{f} \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3, \\ \text{div } \boldsymbol{u} = g \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3. \end{aligned} \tag{3.1}$$

De plus nous ajoutons au système précédent la condition à l'infini

$$\lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_\infty, \tag{3.2}$$

où $\boldsymbol{u}_\infty$ est un vecteur constant donné de $\mathbb{R}^3$. Le cadre fonctionnel choisi est donc celui des espaces de Sobolev avec poids présentés dans le chapitre précédent. Rappelons les poids considérés est la fonction

$$\eta_\beta^\alpha = (1+r)^\alpha (1+s)^\beta.$$

Nous allons étudier le problème (3.1) dans deux cas distincts : le cas $\beta = 0$ et le cas $\beta \neq 0$ (en fait, on se limitera à $\beta = \frac{1}{2}$). Notre étude est basée sur la résolution du modèle scalaire suivant :

$$-\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x_1} = f \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3. \tag{3.3}$$

En effet, nous pouvons remarquer qu'en prenant la divergence de la première équation de (3.1), la pression π vérifie

$$\Delta \pi = \operatorname{div} \boldsymbol{f} + \Delta g - \frac{\partial g}{\partial x_1} \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3. \tag{3.4}$$

Ainsi, pour résoudre le problème (3.1), il suffit de résoudre le système découplé suivant :

$$\begin{aligned} \Delta \pi = \operatorname{div} \boldsymbol{f} + \Delta g - \frac{\partial g}{\partial x_1} \quad &\text{dans} \quad \mathbb{R}^3, \\ -\Delta \boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} = \boldsymbol{f} - \nabla \pi \quad &\text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = g \quad &\text{dans } \mathbb{R}^3. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Résoudre la deuxième équation de (3.5) revient à étudier (3.3). Cette approche présente deux avantages :

- Le modèle scalaire (3.3) est plus simple à étudier que le système (3.1).
- Nous disposons des résultats d'isomorphismes de l'opérateur de Laplace dans des espaces de Sobolev avec poids (le poids étant η_0^α) prouvés dans [6] qui nous permettent de résoudre l'équation (3.4).

Ainsi, cette approche est très bien adaptée pour la résolution de (3.1) dans le cas $\beta = 0$. Nous procéderons d'une autre manière pour le cas $\beta = \frac{1}{2}$. Les résultats d'isomorphismes de l'opérateur de Laplace dans les espaces avec poids anisotropes, obtenus dans le paragraphe 2.4.4 du premier chapitre, ne sont en effet pas suffisants pour résoudre l'équation (3.4) dans le cas $\beta = \frac{1}{2}$. Nous suivrons alors l'approche que Farwig a utilisé dans [20] et [21] : nous chercherons des solutions du problème (3.1) obtenues à l'aide de la solution fondamentale $(\boldsymbol{\mathcal{O}}, \boldsymbol{\mathcal{P}})$. Nous utiliserons pour cela les résultats prouvés dans [36] (voir aussi [51]). Grâce à l'étude de l'équation (3.3) certains de ces résultats peuvent être améliorés. Précisons que la vitesse fondamentale

$\boldsymbol{\mathcal{O}}$ et la solution fondamentale $\mathcal{O}$ de l'équation (3.1) qui s'écrit

$$\mathcal{O}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi r} e^{-s/2}, \tag{3.6}$$

ont le même comportement localement et à l'infini. Les résultats sur la convolution par $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ obtenus dans [36] peuvent ainsi être appliqués à $\mathcal{O}$. Dans le prochain chapitre, nous verrons d'autres liens qui lient les deux solutions fondamentales. Nous citons aussi [55] pour d'autres travaux sur ces deux solutions fondamentales. Les principaux résultats de ce chapitres font l'objets de deux articles soumis ([9], [10]).

3.2 Résultats préliminaires

Dans ce paragraphe, nous allons préciser le sens que nous donnons à la condition à l'infini

$$\lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} u(\boldsymbol{x}) = u_\infty.$$

Nous rappelons tout d'abord quelques propriétés du comportement à l'infini des fonctions de $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$. Ces résultats sont démonstrés dans [2]. On suppose $p \neq 3$ et soit $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$. Alors pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ tel que $|\boldsymbol{x}| > 1$, on a

$$|u(\boldsymbol{x})| \leq C|\boldsymbol{x}|^{1-3/p} \|u\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \text{ et } |\boldsymbol{x}|^{3/p-1}|u(\boldsymbol{x})| \overset{|\boldsymbol{x}|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ si } p > 3. \tag{3.7}$$

$$\|u(|\boldsymbol{x}|,.)\|_{L^p(S_2)} \leq C|\boldsymbol{x}|^{1-3/p} \|u\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \text{ et } |\boldsymbol{x}|^{3/p-1}\|u(|\boldsymbol{x}|,.)\|_{L^p(S_2)} \overset{|\boldsymbol{x}|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ si } p < 3, \tag{3.8}$$

où S_2 désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. Le lemme qui suit améliore, dans le cas $n = 3$, des résultats obtenus par Galdi dans [27] (lemme 5.2 p 60 et théorème 5.1 p 61). Il est partiellement inspiré de l'article de Payne et Weinberger [49].

Lemme 3.1 *On suppose que $1 < p < 3$ et $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ telle que $\nabla u \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$. Alors il existe une unique constante u_∞ definie par*

$$u_\infty = \lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} \frac{1}{w_3} \int_{S_2} u(\sigma|\boldsymbol{x}|)d\sigma, \tag{3.9}$$

telle que $u - u_\infty \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$. La notation w_3 désignant la surface de S_2. De plus, *nous avons les propriétés suivantes :*

$$u - u_\infty \in L^{\frac{3p}{3-p}}(\mathbb{R}^3), \tag{3.10}$$

avec l'estimation

$$\|u - u_\infty\|_{L^{\frac{3p}{3-p}}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\nabla u\|_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)}, \tag{3.11}$$

et

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} \int_{S_2} |u(\sigma|\boldsymbol{x}|) - u_\infty| d\sigma = \lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} \int_{S_2} |u(\sigma|\boldsymbol{x}|) - u_\infty|^p d\sigma = 0, \tag{3.12}$$

$$\int_{S_2} |u(r\sigma) - u_\infty|^p d\sigma \leq C\, r^{p-3} \int_{\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3,\, |\boldsymbol{x}|>r\}} |\nabla u|^p d\boldsymbol{x}. \tag{3.13}$$

Preuve : Comme $1 < p < 3$, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ et $\nabla u \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$, d'après la proposition 2.2 i), il existe une unique constante u_∞ telle que $u - u_\infty \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$. L'injection continue (2.13) nous permet d'obtenir (3.10) et (3.11). Grâce à (3.8), on a

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} |\boldsymbol{x}|^{3/p-1} \int_{S_2} |u(\sigma|\boldsymbol{x}|) - u_\infty|^p d\sigma = 0. \tag{3.14}$$

Maintenant, puisque $3/p - 1 > 0$, l'inégalité de Hölder nous donne (3.12). Il nous reste à montrer (3.9) et (3.13). On pose

$$D_R(r) = \int_{\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3,\, r<|\boldsymbol{x}|<R\}} |\nabla u|^p d\boldsymbol{x}.$$

En procédant de la manière que dans [49], nous avons

$$D_R(r) \geq \int_{S_2} \left(\int_r^R \left|\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|^p \rho^2 d\rho \right) d\sigma + \int_r^R \rho^{2-p} \left[\int_{S_2} |\nabla^* u|^p d\sigma \right]^p d\rho,$$

où $\nabla^* u$ désigne la projection du gradient de u sur la sphère unité S_2 :

$$|\nabla^* u|^2 = r^2 \left[|\nabla u|^2 - \left|\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|^2 \right].$$

L'inégalité de Hölder et celle de Wirtinger nous donnent

$$
\begin{aligned}
D_r(R) \geq \int_{S_2} & \left[\frac{\left| \int_r^R \dfrac{\partial u}{\partial \rho} d\rho \right|^p}{\left| \int_r^R \rho^{-2/(p-1)} d\rho \right|^{p-1}} \right] d\sigma \\
& + C \int_r^R \left(\int_{S_2} \left| u(|\boldsymbol{x}|\sigma) - \frac{1}{w_3} \int_{s_2} u(|\boldsymbol{x}|\sigma) d\sigma \right|^p d\sigma \right) \rho^{2-p} d\rho.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, on a

$$
\begin{aligned}
D_R(r) \geq C\, r^{3-p} & \int_{S_2} |u(R\sigma) - u(r\sigma)|^p d\sigma \\
& + C \int_r^R \left(\int_{S_2} \left| u(|\boldsymbol{x}|\sigma) - \frac{1}{w_3} \int_{s_2} u(|\boldsymbol{x}|\sigma) d\sigma \right|^p d\sigma \right) \rho^{2-p} d\rho.
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Les deux termes de (3.15) sont positifs et bornés par $D_R(r)$. Ainsi, il existe une fonction $u^* \in L^p(S_2)$ telle que

$$
\lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} \int_{S_2} |u(|\boldsymbol{x}|\sigma) - u^*(|\boldsymbol{x}|\sigma)|^p d\sigma = 0
$$

et

$$
\lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} \int_{S_2} u(|\boldsymbol{x}|\sigma) d\sigma = \int_{S_2} u^*(\sigma) d\sigma.
$$

Grâce à (3.12), nous en déduisons que $u^* = u_\infty$ et l'égalité précédente nous donne (3.9). Maintenant, de l'inégalité (3.15), on peut écrire

$$
\begin{aligned}
D_R(r) &\geq C\, r^{3-p} \int_{S_2} |u(R\sigma) - u(r\sigma)|^p d\sigma \\
&\geq C\, r^{3-p} \int_{S_2} |u(r\sigma) - u_\infty|^p d\sigma - C\, r^{3-p} \int_{S_2} |u(R\sigma) - u_\infty|^p d\sigma.
\end{aligned}
$$

En faisant tendre R vers l'infini, on obtient

$$
D(r) = \lim_{R \to \infty} D_R(r) \geq C\, r^{3-p} \int_{S_2} |u(r\sigma) - u_\infty|^p d\sigma,
$$

ce qui entraine (3.13). ■

Ce lemme permet de caractériser la constante donnée par la proposition 2.2 pour une distribution à gradient appartenant à $L^p(\mathbb{R}^3)$. Le prochain résultat est une autre conséquence du lemme. Il permet cette fois-ci de caractériser le polynôme , de degré au plus un, donné par la même proposition pour une distribution dont les dérivées secondes appartiennent à $L^p(\mathbb{R}^3)$.

Corollaire 3.2 *On suppose* $1 < p < 3$ *et soit* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ *telle que, pour tout* $i, j = 1, 2, 3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^3)$. *Alors il existe un unique vecteur* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^3$ *tel que* $\nabla u + \mathbf{A} \in \boldsymbol{L}^{\frac{3p}{3-p}}(\mathbb{R}^3)$, *où* $\mathbf{A}$ *est défini par*

$$\mathbf{A} = \lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} \frac{1}{w_3} \int_{S_2} \nabla u(\sigma |\boldsymbol{x}|) d\sigma.$$

De plus, nous avons les propriétés suivantes :
i) *Si* $3/2 \le p < 3$, *alors* $u + \mathbf{A}.\boldsymbol{x} \in W_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)$.
ii) *Si* $1 < p < 3/2$, *alors, il existe une unique constante* b *telle que* $u + \mathbf{A}.\boldsymbol{x} + b \in L^{\frac{3p}{3-2p}}(\mathbb{R}^3)$, *où* b *est définie par*

$$b = \lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} \frac{1}{w_3} \int_{S_2} \left(u(\sigma |\boldsymbol{x}|) - \mathbf{A}.\boldsymbol{x}\right) d\sigma.$$

Par conséquent, nous avons aussi $u + \mathbf{A}.\boldsymbol{x} \in W_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)$.

Preuve : L'existence du vecteur $\mathbf{A}$ et sa caractérisation est une conséquence immédiate du lemme précédent.
i) Posons à présent $\boldsymbol{\ell} = \nabla u + \mathbf{A}$. D'après la caractérisation (2.14), nous avons $\boldsymbol{\ell} \in \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$. Puisque div $\boldsymbol{\ell} \in L^p(\mathbb{R}^3)$, il existe une fonction $z \in W_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)$ telle que (voir [6]),

$$\Delta \boldsymbol{z} = \text{div}\ \boldsymbol{\ell} = \Delta u.$$

Par ailleurs, nous pouvons écrire

$$\Delta(\nabla z) = \Delta(\nabla u + \mathbf{A}).$$

Puisque $3/2 < p < 3$, l'espace $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ ne contient pas de polynômes . Nous en déduisons que $\nabla z = \nabla u + \mathbf{A}$, ce qui entraîne l'existence d'une constante c telle que $z + c = u + \mathbf{A}.\boldsymbol{x}$. Mais lorsque $3/2 < p < 3$, les constantes appartiennent à l'espace $W_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)$, et par conséquent $u + \mathbf{A}.\boldsymbol{x}$ appartient à $W_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)$.
ii) Le vecteur $\mathbf{A}$ peut s'écrire sous la forme $\mathbf{A} = \nabla(\mathbf{A}.\boldsymbol{x})$. Cela implique que $\nabla u + \mathbf{A} = \nabla(u + \mathbf{A}.\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{L}^{\frac{3p}{3-p}}(\mathbb{R}^3)$. Puisque $1 < p < 3/2$, nous pouvons observer que $\frac{3p}{3-p} < 3$. Nous pouvons donc appliquer le lemme 3.1 qui nous donne l'existence et la caractérisation de l'unique constante b. La caractérisation (2.16) nous permet ensuite de conclure que $u + \mathbf{A}.\boldsymbol{x}$ appartient à $W_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)$. ■

Nous pouvons à présent préciser le sens que nous donnons à la limite à l'infini.

Définition 3.3 Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ telle que $\nabla u \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$. Nous dirons que u tend vers une constante u_∞ à l'infini, et on écrira

$$\lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} u(\boldsymbol{x}) = u_\infty,$$

si

$$\lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} \int_{S_2} |u(\sigma|\boldsymbol{x}|) - u_\infty| d\sigma = 0.$$

Remarque 3.4 Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ telle que $\nabla u \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$. Si $1 < p < 3$, alors le lemme 3.1 montre que la définition 3.3 est équivalente à

$$u - u_\infty \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3).$$

Nous rappelons maintenant un résultat dont la preuve est standard.

Lemme 3.5 *Soient r et p deux réels tels que $1 < r < \infty$ et $3 < p < \infty$. Soit $u \in L^r(\mathbb{R}^3)$ et $\nabla u \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$. Alors u est une fonction continue sur $\mathbb{R}^3$ et*

$$\lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} u(\boldsymbol{x}) = 0.$$

3.3 Le modèle scalaire

Dans ce paragraphe, nous abordons donc le point central de la thèse qui est la résolution du modèle scalaire suivant :

$$-\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x_1} = f \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3. \tag{3.16}$$

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} u(\boldsymbol{x}) = u_\infty. \tag{3.17}$$

Soit T l'opérateur :

$$T \ : \ u \to -\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x_1}. \tag{3.18}$$

3.3.1 Le noyau de l'opérateur T

Considèrons le noyau de l'opérateur T quand celui-ci est défini sur l'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$. Soit u un élément du noyau, alors en appliquant la transformée de Fourier, nous pouvons écrire

$$4\pi^2|\xi|^2\hat{u}(\xi) + 2i\pi\xi_1\hat{u}(\xi) = 0.$$

En posant

$$\hat{u}(\xi) = v(\xi) + iw(\xi),$$

il vient

$$\begin{cases} 4\pi^2|\xi|^2 v(\xi) - 2\pi\xi_1 w(\xi) = 0 \\ 2\pi\xi_1 v(\xi) + 4\pi^2|\xi|^2 w(\xi) = 0. \end{cases} \tag{3.19}$$

Le déterminant de (3.19) étant $16\pi^4|\xi|^4 + 4\pi^2\xi_1^2$, nous en déduisons que, pour $\xi \neq 0$, le support de $\hat{u}$ est inclus dans $\{0\}$. On a donc

$$\hat{u}(\xi) = \sum_{\alpha\in J} c_\alpha \delta^{(\alpha)}, \ \ c_\alpha \in \mathbb{C},$$

avec J fini. Par transformée de Fourier inverse, on obtient

$$u(x) = \sum_{\alpha\in J} d_\alpha x^\alpha, \ \ d_\alpha \in \mathbb{C},$$

Cela signifie que u est un polynôme. Pour tout entier k, nous introduisons donc l'espace des polynômes

$$S_k = \left\{ q \in \mathrm{I\!P}_{\mathrm{k}}; -\Delta q + \frac{\partial q}{\partial x_1} = 0 \right\}.$$

Remarquons que

$$S_0 = \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad S_1 = \{q \in \mathrm{I\!P}_1,\ \mathrm{q}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_2 x_2 + \mathrm{a}_3 x_3\}.$$

Autrement dit, les polynômes de S_1 sont des polynômes qui sont indépendants de x_1. Nous pouvons à présent énoncer le résultat d'unicité suivant.

Proposition 3.6 *Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ une solution de* (3.16) *avec $f = 0$. Alors u est un polynôme de S_k.*

3.3.2 Résultats d'existence pour le modèle scalaire

Nous avons tout d'abord besoin de définir deux réels.

Définition 3.7 Soit p un réel tel que $1 < p < \infty$. Soient γ et δ les réels tels que $\delta \in [\frac{3}{2}, 2]$, $\delta > p$ et $\gamma \in [3, 4]$, $\gamma > p$. Nous définissons les réels $r_1 = r_1(p, \delta)$ et $r_2 = r_2(p, \gamma)$ comme suit :

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\delta} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma}.$$

Remarque 3.8 Nous pouvons remarquer que

$$\begin{aligned} &\text{si } 1 < p < 3/2, \quad \text{alors } \frac{2p}{2-p} \leq r_1 \leq \frac{3p}{3-2p}, \\ &\text{si } 3/2 \leq p < 2, \quad \text{alors } \frac{2p}{2-p} \leq r_1 < \infty. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} &\text{si } 1 < p < 3, \quad \text{alors } \frac{4p}{4-p} \leq r_2 \leq \frac{3p}{3-p}, \\ &\text{si } 3 \leq p < 4, \quad \text{alors } \frac{4p}{4-p} \leq r_2 < \infty. \end{aligned}$$

Nous allons à présent rappeler un résultat d'existence d'une solution de l'équation (3.16) lorsque f appartient à $L^p(\mathbb{R}^3)$. Dans ce cas, (3.16) admet une solution $u \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ tel que, pour tout $i, j = 1, 2, 3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^3)$, $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ avec les propriétés suivantes :
(i) Il existe une constante $C > 0$ tel que

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.20}$$

(ii) Si $1 < p < 4$, il existe une constante $C > 0$ tel que

$$\|\nabla u\|_{\boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.21}$$

(iii) Si $1 < p < 2$, il existe une constante $C > 0$ tel que

$$\|u\|_{L^{r_1}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.22}$$

Ce résultat se démontre en utilisant les transformées de Fourier et le théorème de Multiplicateur de Lizorkin ([40]). Ces arguments ont été utilisés pour le problème d'Oseen et le lecteur pourra consulter les démonstrations qui se trouvent dans [27], [22] et [23]. Comme nous pouvons le constater, ce résultat n'est pas complet puisque, par exemple, pour $p \geq 4$, nous n'avons que des propriétés locales de la solution ($u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^3)$). En utilisant les propriétés des espaces avec poids, nous allons compléter le résultat précédent.

Proposition 3.9 *Soient r_1 et r_2 les réels définis dans la définition 3.7 et $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$.*
(i) *Si $1 < p < 2$, alors l'équation* (3.16) *admet une unique solution $u \in L^{r_1}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\nabla u \in \boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)$ et pour tout $i, j = 1, 2, 3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^p(\mathbb{R}^3)$. De plus nous avons l'estimation*

$$\|u\|_{L^{r_1}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla u\|_{\boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.23}$$

(ii) *Si $2 \leq p < 4$, alors* (3.16) *admet une solution $u \in W_0^{1,r_2}(\mathbb{R}^3)$, unique à une constante additive près , telle que pour tout $i, j = 1, 2, 3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in$*

$L^p(\mathbb{R}^3)$. *De plus nous avons*

$$\inf_{K\in\mathbb{R}} \|u+K\|_{W_0^{1,r_2}(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.24}$$

(iii) *Si $p \geq 4$, alors* (3.16) *admet une solution $u \in W_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)$, unique à un polynôme de S_1 près, telle que $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ et satisfaisant*

$$\inf_{\lambda\in S_1} \|u+\lambda\|_{W_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.25}$$

Preuve : Rappelons que le noyau de l'opérateur T est l'espace des polynômes S_k.
(i) L'existence, la régularité de la solution et l'estimation (3.23) sont données par le résultat d'existence et les estimations (3.20), (3.21) et (3.22) rappelés au début du paragraphe.
(ii) si $2 \leq p < 4$, la solution $u \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ donnée par le résultat d'existence précédent satisfait $\nabla u \in L^{r_2}(\mathbb{R}^3)$. D'après la remarque 3.8, nous pouvons constater que $r_2 > 3$. Ainsi, la proposition 2.2 ii) nous donne que $u \in W_0^{1,r_2}(\mathbb{R}^3)$. L'estimation (3.24) est une conséquence de (3.21) et de (2.12).
(iii) Si $p \geq 4$, la solution $u \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ donnée par le résultat d'existence précédent satisfait pour tout $i, j = 1, 2, 3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^3)$, $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ et l'estimation (3.20). Utilisant à nouveau la proposition 2.2 ii), nous en déduisons que $u \in W_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)$. L'estimation (3.25) se déduit de (3.20) et de (2.12). ■

Remarque 3.10 Remarquons que si $3 \leq p < 4$, alors la solution donnée par le théorème 3.16 ii) appartient aussi à $W_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)$. En effet, comme pour tout $i, j = 1, 2, 3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^3)$, alors le résultat est une conséquence immédiate de la proposition 2.2 ii).

Remarque 3.11 (i) On suppose que $1 < p < 3$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$. Alors d'après la proposition précédente, la solution u de l'équation (3.16) satisfait $\nabla u \in \boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^3)$. D'après la definition 3.7, nous avons, en particulier $\nabla u \in \boldsymbol{L}^{\frac{3p}{3-p}}(\mathbb{R}^3)$. La caractérisation (2.14) nous donne $\nabla u \in \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$. Grâce au lemme 3.1, nous en déduisons que

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} \nabla u(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$$

au sens de la définition 3.3.
(ii) Si $3 < p < 4$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$, alors d'après la proposition précédente et le lemme 3.5, le gradient de la solution u est continue sur $\mathbb{R}^3$ et

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} \nabla u(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}.$$

De la proposition 3.9 découle notre prochain résultat.

Corollaire 3.12 *Soient r_1 et r_2 les réels définis dans la définition 3.7. Soit une distribution u telle que pour tout $i, j = 1, 2, 3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^p(\mathbb{R}^3)$. Alors*
(i) Si $1 < p < 2$, il existe un unique polynôme $q \in S_1$, tel que $u + q \in L^{r_1}(\mathbb{R}^3)$, $\nabla(u+q) \in \boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant l'estimation suivante :

$$\|u+q\|_{L^{r_1}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla(u+q)\|_{\boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)} \leq C\left(\|\Delta u\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}\right). \tag{3.26}$$

De plus, on a $\nabla q = \mathbf{A}$ où $\mathbf{A}$ est défini dans le corollaire 3.2. Si $1 < p < 3/2$, alors $q(\boldsymbol{x}) = \mathbf{A}.\boldsymbol{x}' + b$, où b est défini dans le corollaire3.2 et $\boldsymbol{x}' = (0, x_2, x_3)$.
(ii) Si $2 \leq p < 4$, alors il existe un unique polynôme $q \in S_1$ satisfaisant $q(0) = 0$, tel que $u + q \in W_0^{1,r_2}(\mathbb{R}^3)$. De plus nous avons l'estimation suivante :

$$\inf_{K\in\mathbb{R}} \|u+q+K\|_{W_0^{1,r_2}(\mathbb{R}^3)} \leq C\left(\|\Delta u\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}\right). \tag{3.27}$$

Si $2 \leq p < 3$, alors $q(\boldsymbol{x}) = \mathbf{A}.\boldsymbol{x}'$

Preuve : D'après les hypothèses sur la distribution u, il est immédiat de voir que $-\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^p(\mathbb{R}^3)$. Nous allons à présent utiliser la proposition 3.9. Nous distinguons donc deux cas :
(i) Si $1 < p < 2$, alors il existe une unique fonction $v \in L^{r_1}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\nabla v \in \boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial v}{\partial x_1} \in L^p(\mathbb{R}^3)$, satisfaisant

$$-\Delta(v-u) + \frac{\partial(v-u)}{\partial x_1} = 0. \tag{3.28}$$

De plus, nous avons l'estimation

$$\begin{aligned} & \|v\|_{L^{r_1}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla v\|_{\boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \\ & \leq C \left(\|\Delta u\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \right). \end{aligned} \tag{3.29}$$

En posant maintenant $w = v - u$, il vient que, pour tout, $i, j = 1, 2, 3$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^3)$ et satisfait

$$-\Delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \right) = 0.$$

Grâce à la proposition 3.6, nous en déduisons que $\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} = 0$ ce qui montre l'existence d'un polynôme $q \in \mathbb{P}_1$ tel que $v = u + q$ (voir par exemple [53]). Mais comme nous avons aussi $\frac{\partial w}{\partial x_1} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant

$$-\Delta \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right) = 0,$$

Nous en déduisons aussi que $\frac{\partial w}{\partial x_1} = 0$. D'où q est un polynôme indépendante de $\boldsymbol{x}_1$, c'est-à-dire que $q \in S_1$. L'estimation (3.26) se déduit de (3.29). Supposons à présent qu'il existe deux polynômes $q_1, q_2 \in S_1$ tels que $u + q_1 \in L^{r_1}(\mathbb{R}^3)$ et $u + q_2 \in L^{r_2}(\mathbb{R}^3)$. Par différence, nous en déduisons que $q_1 - q_2 \in L^{r_1}(\mathbb{R}^3)$ et, par conséquent, $q_1 = q_2$. L'unicité du polynôme q est donc prouvée. Maintenant, d'après la définition de r_1, nous avons, en particulier, $u + q \in L^{\frac{3p}{3-2p}}(\mathbb{R}^3)$. Le corollaire 3.2 et l'unicité du polynôme q nous permet d'affirmer que $\nabla q = \mathbf{A}$ où

$$\mathbf{A} = \lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} \frac{1}{w_3} \int_{S_2} \nabla u(\sigma |\boldsymbol{x}|) d\sigma.$$

Si $1 < p < 3/2$, alors nous en déduisons aussi que $q(\boldsymbol{x}) = \mathbf{A}.\boldsymbol{x}' + b$, où

$$b = \lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} \frac{1}{w_3} \int_{S_2} \left(u(\sigma |\boldsymbol{x}|) - \mathbf{A}.\boldsymbol{x} \right) d\sigma.$$

(ii) Si $2 \leq p < 4$, alors il existe une fonction $v \in W_0^{1,r_2}(\mathbb{R}^3)$ telle $\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial v}{\partial x_1} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant (3.28) avec l'estimation

$$\inf_{K \in \mathbb{R}} \|v + K\|_{W_0^{1,r_2}(\mathbb{R}^3)} \leq C \left(\|\Delta u\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \right).$$

En procédant comme précédement, on montre l'existence d'un polynôme $p \in S_1$ tel que $v = u + p$. De plus, nous pouvons écrire $p = q + a_0$, où $q \in S_1$ est un polynôme satisfaisant $q(0) = 0$ et $a_0 \in \mathbb{R}$. Mais comme $r_2 > 3$, les constantes appartiennent à l'espace $W_0^{1,r_2}(\mathbb{R}^3)$. Ainsi, par différence, nous avons $u + q \in W_0^{1,r_2}(\mathbb{R}^3)$. L'espace $W_0^{1,r}(\mathbb{R}^3)$ ne contenant pas les polynômes de $\mathbb{P}_1$ et donc *a fortiori* les polynômes de S_1, nous en déduisons l'unicité du polynôme q. L'estimation (3.27) se déduit de l'estimation précédente. Finalement, le corollaire 3.2 et l'unicité du polynôme q nous montre que $q(\boldsymbol{x}) = \mathbf{A}.\boldsymbol{x}'$. ■

Remarque 3.13 Nous pouvons constater que l'hypothèse supplémentaire $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^p(\mathbb{R}^3)$, améliore les propriétés d'une distribution u telle que $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^3)$. En effet, supposons par exemple $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Alors le corollaire précédent nous montre l'existence d'un unique polynôme q, que l'on sait caractériser, tel que $u+q \in W_0^{1,4}(\mathbb{R}^3) \cap W_0^{1,6}(\mathbb{R}^3)$. Sans l'information sur la derivée première, nous aurions seulement $u + q \in W_0^{2,2}(\mathbb{R}^3)$. C'est est une des différences entre l'équation (3.16) et l'équation de Laplace

$$\Delta u = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^3.$$

Nous nous intéressons à présent aux propriétés de l'opérateur $f \to \mathcal{O} * f$, où nous rappelons que $\mathcal{O}$ est la solution fondamentale de (3.16). Si $\mathcal{O} * f$ est définie, alors c'est une solution explicite de l'équation (3.16). Soit alors $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$. Comme pour tout $i, j = 1, 2, 3$, l'opérateur $\frac{\partial^2 \mathcal{O}}{\partial x_i \partial x_j}$ est un opérateur singulier, nous pouvons prouver que

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\mathcal{O} * f) = v.p. \left(\frac{\partial \mathcal{O}}{\partial x_i \partial x_j} * f \right) + c_{ij} f, \tag{3.30}$$

où c_{ij} sont des constantes et

$$v.p.\left(\frac{\partial^2\mathcal{O}}{\partial x_i\partial x_j}*f\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|>\varepsilon}\frac{\partial^2\mathcal{O}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{\partial x_i\partial x_j}f(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}.$$

Nous allons maintenant utiliser des estimations sur la convolution par la solution fondamentale d'Oseen $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ dans les espaces $L^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^3)$ prouvées dans [36] (voir aussi [51]). Nous rappelons que ces estimations peuvent être appliquées à la solution fondamentale $\mathcal{O}$ du modèle scalaire (3.16). Dans [36], Il est prouvé que si $f\in L^p(\mathbb{R}^3)$, alors $v.p.\,(\frac{\partial^2\mathcal{O}}{\partial x_i\partial x_j}*f)\in\bigcap_{\varepsilon>0}W^{0,p}_{-\varepsilon}(\mathbb{R}^3)$ et nous avons l'estimation suivante

$$\forall\varepsilon>0,\qquad \left\|v.p.\left(\frac{\partial^2\mathcal{O}}{\partial x_i\partial x_j}*f\right)\right\|_{W^{0,p}_{-\varepsilon}(\mathbb{R}^3)}\leq C_\varepsilon\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}.$$

Il est alors facile de voir que si $f\in L^p(\mathbb{R}^3)$, nous avons $\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(\mathcal{O}*f)\in\bigcap_{\varepsilon>0}W^{0,p}_{-\varepsilon}(\mathbb{R}^3)$ ainsi que l'estimation

$$\forall\varepsilon>0,\qquad \left\|\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(\mathcal{O}*f)\right\|_{W^{0,p}_{-\varepsilon}(\mathbb{R}^3)}\leq C_\varepsilon\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}.$$

A ce stade, il n'est pas clair que $\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(\mathcal{O}*f)$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^3)$. Mais en utilisant les propositions 3.9 et 3.6, nous allons prouver cette estimation.

Lemme 3.14 *On suppose $p>1$ et $f\in L^p(\mathbb{R}^3)$. Alors, pour tout $i,j=1,2,3$, nous avons*

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(\mathcal{O}*f)\in L^p(\mathbb{R}^3)\ \ et\ \ \frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{O}*f)\in L^p(\mathbb{R}^3).$$

De plus, nous avons l'estimation

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(\mathcal{O}*f)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}+\left\|\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{O}*f)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}\leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}.\tag{3.31}$$

Preuve : Pour une fonction $f\in L^p(\mathbb{R}^3)$ donnée, nous savons, d'après la proposition 3.9, que l'équation (3.16) admet une solution v telle que, pour tout $i,j=1,2,3$,

$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial v}{\partial x_1} \in L^p(\mathbb{R}^3)$. De plus, nous avons

$$\left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.32}$$

D'autre part, puisque $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\mathcal{O} * f) \in \bigcap_{\varepsilon > 0} W^{0,p}_{-\varepsilon}(\mathbb{R}^3)$, nous en déduisons que la fonction $z = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(v - \mathcal{O} * f) \bigcap_{\varepsilon > 0} W^{0,p}_{-\varepsilon}(\mathbb{R}^3)$ satisfait

$$-\Delta z + \frac{\partial z}{\partial x_1} = 0.$$

D'après la proposition 3.6, z est donc un polynôme . En prenant ε suffisamment petit, nous en déduisons que $z = 0$ et par conséquent $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\mathcal{O} * f) \in L^p(\mathbb{R}^3)$. Par l'équation (3.16), il vient que $\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{O} * f) \in L^p(\mathbb{R}^3)$. L'estimation (3.31) est une conséquence immédiate de l'estimation (3.32). ■

Notre prochain résultat, qui est une conséquence immédiate du lemme 3.14 et de la proposition 3.12, complète les résultats de la proposition 3.9 en donnant des solutions explicites.

Corollaire 3.15 *Soient r_1 et r_2 les réels définis dans la définition 3.7. On suppose $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$.*
(i) *Si $1 < p < 2$, alors il existe un unique polynôme $q \in S_1$ tel que $\mathcal{O} * f + q \in L^{r_1}(\mathbb{R}^3)$, $\nabla(\mathcal{O} * f + q) \in \boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)$ et pour tout, $i, j = 1, 2, 3$, $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\mathcal{O} * f) \in L^p(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{O} * f) \in L^p(\mathbb{R}^3)$. De plus, nous avons l'estimation suivante :*

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{O} * f + q\|_{L^{r_1}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla(\mathcal{O} * f + q)\|_{\boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\mathcal{O} * f) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \\ &+ \left\| \frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{O} * f) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

De plus, on a $\nabla q = \mathbf{A}$ où

$$\mathbf{A} = \lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} \frac{1}{w_3} \int_{S_2} \nabla(\mathcal{O} * f)(\sigma |\boldsymbol{x}|) d\sigma.$$

Si $1 < p < 3/2$, *alors* $q(\boldsymbol{x}) = \mathbf{A}.\boldsymbol{x}' + b$, *où* $\boldsymbol{x}' = (0, x_2, x_3)$ *et*

$$b = \lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} \frac{1}{w_3} \int_{S_2} ((\mathcal{O} * f)(\sigma|\boldsymbol{x}|) - \mathbf{A}.\boldsymbol{x})\, d\sigma.$$

(ii) *Si* $2 \leq p < 4$, *alors il existe un unique polynôme* $q \in S_1$ *satisfaisant* $q(0) = 0$, *tel que* $\mathcal{O} * f + q \in W_0^{1,r_2}(\mathbb{R}^3)$ *et pour tout* $i, j = 1, 2, 3$, $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\mathcal{O} * f) \in L^p(\mathbb{R}^3)$ *et* $\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{O} * f) \in L^p(\mathbb{R}^3)$. *De plus nous avons l'estimation suivante :*

$$\inf_{K\in\mathbb{R}} \|\mathcal{O}*f+q+K\|_{W_0^{1,r_2}(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\mathcal{O} * f)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{O} * f)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.34}$$

Si $2 \leq p < 3$, *alors* $q(\boldsymbol{x}) = \mathbf{A}.\boldsymbol{x}'$

(iii) *Si* $p \geq 4$, *alors* $\mathcal{O} * f \in W_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)$ *et* $\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{O} * f) \in L^p(\mathbb{R}^3)$. *De plus nous avons*

$$\inf_{\lambda\in S_1} \|\mathcal{O} * f + \lambda\|_{W_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{O} * f)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.35}$$

Nous établissons maintenant des résultats d'existence pour des données appartenant à $W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$.

Théorème 3.16 *Soit* r_2 *le réel défini dans la definition 3.7 et soit* $f \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ *satisfaisant la condition de compatibilité*

$$\forall \lambda \in \mathbb{P}_{[1-3/p']}, \quad \langle f, \lambda \rangle_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)\times W_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)} = 0. \tag{3.36}$$

(i) *Si* $1 < p < 4$, *alors l'équation* (3.16) *admet une unique solution* $u \in L^{r_2}(\mathbb{R}^3)$, *telle que* $\nabla u \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$ *et* $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$. *De plus on a*

$$\|u\|_{L^{r_2}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla u\|_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.37}$$

(ii) *si* $p \geq 4$, *alors l'équation* (3.16) *admet une solution* $u \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$, *unique à une constante additive près. De plus, on a*

$$\inf_{K\in\mathbb{R}} \|u + K\|_{\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.38}$$

Preuve : La proposition 3.6 nous montre que le noyau de l'opérateur T défini par (3.18) est réduit à $\{0\}$ si $1 < p < 4$ et est égal à $\mathbb{R}$ si $p \geq 4$. Soit maintenant $f \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant la condition de compatibilité (3.36). Alors, d'après l'isomorphisme 2.10, il existe un vecteur $\mathbf{F} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$ tel que

$$f = \mathrm{div}\ \mathbf{F}.$$

Nous allons à présent utiliser la proposition 3.9 et nous avons deux cas :
(i) Si $1 < p < 4$, il existe un vecteur $\boldsymbol{v}$ tel que, pour tout $i, j, k = 1, 2, 3$, $\nabla v_k \in \boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)$, $\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial v_k}{\partial x_1} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant

$$-\Delta v_k + \frac{\partial v_k}{\partial x_1} = F_k. \tag{3.39}$$

De plus, pour tout $k = 1, 2, 3$, nous avons

$$\|\nabla v_k\|_{\boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial v_k}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|F_k\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}.$$

En posant $u = \mathrm{div}\ \boldsymbol{v}$, nous en déduisons que $u \in L^{r_2}(\mathbb{R}^3)$ est solution de (3.16), telle que $\nabla u \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^p(\mathbb{R}^3)$. L'estimation (3.36) est une conséquence de l'estimation précédente.
(ii) Si $p \geq 4$, il existe un vecteur $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant (3.39) ainsi que l'estimation

$$\forall k = 1, 2, 3, \qquad \inf_{\lambda \in S_1} \|v_k + \lambda\|_{W_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial v_k}{\partial x_1} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C \|F_k\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}.$$

La fonction $u = \mathrm{div}\ \boldsymbol{v} \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ est alors solution de l'équation (3.16). Enfin, l'estimation (3.38) se déduit de la précédente. ■

Remarque 3.17 i) Si $1 < p < 3$, alors la solution u de l'équation (3.16) donnée par le théorème 3.16 i) appartient en particulier à $\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ (voir la remarque 3.8 et la caractérisation (2.14)). Nous en déduisons que

$$\lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} u(\boldsymbol{x}) = 0$$

au sens de la définition 3.3. Ainsi, pour une constante u_∞ donnée, la distribution $v = u - u_\infty$ est l'unique solution de l'équation (3.16) vérifiant

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} v(\boldsymbol{x}) = u_\infty$$

au sens de la définition 3.3.
ii) Si $3 < p < 4$, alors le lemme 3.5 nous montre que la solution u de l'équation (3.16) est continue sur $\mathbb{R}^3$ et vérifie

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} u(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Corollaire 3.18 *Soit* r_2 *le réel donné par la définition 3.7. On suppose de plus que* $1 < p < 4$*. Si* u *est une distribution telle que* $\nabla u \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$ *et* $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ *satisfaisant*

$$\forall \lambda \in \mathbb{P}_{[1-3/\mathrm{p}']}, \quad \langle \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x_1}, \lambda \rangle_{\mathrm{W}_0^{-1,\mathrm{p}}(\mathbb{R}^3)\times \mathrm{W}_0^{1,\mathrm{p}'}(\mathbb{R}^3)} = 0, \tag{3.40}$$

alors il existe une unique constant K *telle que* $u + K \in L^{r_2}(\mathbb{R}^3)$ *avec l'estimation*

$$\|u + K\|_{L^{r_2}(\mathbb{R}^3)} \leq C \left(\|\nabla u\|_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} \right). \tag{3.41}$$

De plus, si $1 < p < 3$*, alors*

$$K = -\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} u(\boldsymbol{x}) \tag{3.42}$$

au sens de la definition 3.3.
Si $3 < p < 4$*, alors* u *est continue et*

$$K = -\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} u(\boldsymbol{x}). \tag{3.43}$$

Preuve : Soit une distribution u telle que $\nabla u \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$. Maintenant, en remarquant que les polynômes de $\mathbb{P}_{[1-3/\mathrm{p}']}$ sont au plus des constantes et d'après la condition (3.40), on vérifie facilement que pour tout $\lambda \in \mathbb{P}_{[1-3/\mathrm{p}']}$,

$$\langle -\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x_1}, \lambda \rangle_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)\times W_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Le théorème 3.16 nous montre l'existence d'une unique fonction $v \in L^r(\mathbb{R}^3)$ telle que $\nabla v \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial v}{\partial x_1} \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$, satisfaisant

$$-\Delta(v-u) + \frac{\partial(v-u)}{\partial x_1} = 0.$$

De plus, on a

$$\|v\|_{L^r(\mathbb{R}^3)} \leq C\left(\|\nabla u\|_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)}\right). \tag{3.44}$$

Maintenant, en posant $w = v - u$, alors pour chaque $i = 1, 2, 3$, $\frac{\partial w}{\partial x_i} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ et

$$-\Delta\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right) = 0.$$

D'après la proposition 3.6, pour chaque $i = 1, 2, 3$, $\frac{\partial w}{\partial x_i}$ est un polynôme de $L^p(\mathbb{R}^3)$ d'où $\frac{\partial w}{\partial x_i} = 0$. Nous en déduisons que $\nabla v = \nabla u$ et par conséquent $v = u + K$, où K est une constante dont l'unicité vient du fait que l'espace $L^{r_2}(\mathbb{R}^3)$ ne contient pas les polynômes . Lorsque $1 < p < 3$, le lemme 3.1 nous montre que la constante K est défini par (3.42) et lorsque $3 < p < 4$, la relation (3.43) découle du lemme 3.5. ■

Remarque 3.19 En comparant avec le résultat du lemme 3.1, nous pouvons remarquer que le terme $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ améliore les estimations sur u. Prenons, par exemple, une distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ telle que $\nabla u \in \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in W_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3)$. Remarquons d'abord que comme $\mathbb{P}_{[1-3/2]} = \{0\}$, la condition (3.40) est automatiquement vérifiée. Le corollaire précédent nous donne $u \in L^4(\mathbb{R}^3) \cap L^6(\mathbb{R}^3)$. Sans l'hypothèse $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in W_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3)$, le lemme 3.1 donne simplement $u - K \in L^6(\mathbb{R}^3)$.

De la même manière que pour une donnée f appartenant à $L^p(\mathbb{R}^3)$, nous allons compléter le théorème 3.16 par des résultats sur la convolution par la solution fondamentale.

Proposition 3.20 *Soit r_2 le réel donné par la définition 3.7 et soit $f \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant la condition de compatibilité*

$$\forall \lambda \in \mathbb{P}_{[1-3/p']}, \quad \langle f, \lambda \rangle_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

(i) *Si* $1 < p < 4$*, il existe une unique constante* $K(f)$ *telle que* $\mathcal{O}*f+K(f) \in L^{r_2}(\mathbb{R}^3)$*,* $\nabla(\mathcal{O} * f) \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$ *et* $\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{O} * f) \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ *avec l'estimation*

$$\|\mathcal{O} * f\|_{L^{r_2}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla(\mathcal{O} * f)\|_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{O} * f)\right\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.45}$$

De plus si $1 < p < 3$*, alors*

$$K(f) = -\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} \mathcal{O} * f(\boldsymbol{x}) \tag{3.46}$$

au sens de la definition 3.3.
Si $3 < p < 4$*, alors* $\mathcal{O} * f$ *est continue et*

$$K(f) = -\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} \mathcal{O} * f(\boldsymbol{x}). \tag{3.47}$$

(ii) *Si* $p \geq 4$*, alors* $\mathcal{O} * f \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ *et on a l'estimation*

$$\inf_{K\in\mathbb{R}} \|\mathcal{O} * f\|_{\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.48}$$

Preuve : Soit $f \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant la condition de compatibilité, alors il existe un vecteur $\mathbf{F} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$ telle que $f = \operatorname{div} \mathbf{F}$. Nous allons à présent utiliser le corollaire 3.15.
(i) Si $1 < p < 4$, alors il existe un unique vecteur constant $\mathbf{A} = (0, a_2, a_3)$, tel que pour tout $k = 1, 2, 3$, $\nabla(\mathcal{O} * F_k) + \mathbf{A} \in \boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)$, $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\mathcal{O} * F_k) \in L^p(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{O} * F_k) \in L^p(\mathbb{R}^3)$. On pose $K = \operatorname{div} \mathbf{A}$. On obtient

$$\mathcal{O} * f + K = \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathcal{O} * F_i) + K \in L^{r_2}(\mathbb{R}^3),$$

avec la convention implicite sur les indices répétés. Par ailleurs, nous avons aussi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathcal{O} * f) &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\mathcal{O} * F_j) \in L^p(\mathbb{R}^3),\\
\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{O} * f) &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{O} * F_j)\right) \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3).
\end{aligned}$$

Si $1 < p < 3$, alors d'après la définition de r_2 et grâce à la caractérisation (2.14), nous avons en particulier $\mathcal{O} * f + K \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$. Le Lemme 3.1 nous donne par conséquent (3.46). Si $3 < p < 4$, le lemme 3.5 nous donne (3.47). L'estimation (3.45) se déduit des estimations (3.33) et (3.34).
(ii) La preuve du cas $p \geq 4$ est similaire au cas précédent avec l'utilisation du corollaire 3.15 iii). ■

Pour des valeurs de p tels que $1 < p \leq 2$, nous pouvons obtenir des estimations supplémentaires.

Théorème 3.21 *Soit r_2 le réel donné par la définition 3.7. On suppose de plus $1 < p \leq 2$ et $f \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant la condition de compatibilité*

$$\forall \lambda \in \mathbb{P}_{[1-3/p']}, \quad \langle f, \lambda \rangle_{\mathrm{W}_0^{-1,\mathrm{p}}(\mathbb{R}^3) \times \mathrm{W}_0^{1,\mathrm{p}'}(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Alors $\mathcal{O} * f \in \mathcal{M}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \cap L^{r_2}(\mathbb{R}^3)$ et

$$\lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} \mathcal{O} * f(\boldsymbol{x}) = 0$$

au sens de la définition 3.3. De plus, nous avons l'estimation

$$\|\mathcal{O} * f\|_{\mathcal{M}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} + \|\mathcal{O} * f\|_{L^{r_2}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.49}$$

Preuve : D'après les hypothèses sur f, nous pouvons écrire $f = \operatorname{div} \mathbf{F}$ (voir l'isomorphisme (2.10)). Par conséquent, pour chaque $\ell = 1, 2, 3$, $F_\ell \in L^p(\mathbb{R}^3)$ ce qui implique aussi $F_\ell \in \bigcap_{\varepsilon > 0} L^p_{-\varepsilon,\varepsilon}(\mathbb{R}^3)$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons $\frac{\partial \mathcal{O}}{\partial x_i} * F_\ell \in L^p_{-\frac{1}{2}-\varepsilon,\varepsilon}(\mathbb{R}^3)$ (voir [36] pour le cas $1 < p < 2$ et [20] pour le cas $p = 2$) avec l'estimation

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial x_i} * F_\ell \right\|_{L^p_{-\frac{1}{2}-\varepsilon,\varepsilon}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|F_\ell\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.50}$$

Nous avons donc aussi $\frac{\partial \mathcal{O}}{\partial x_i} * F_\ell \in W^{0,p}_{-\frac{1}{2}-\varepsilon}(\mathbb{R}^3)$ et par conséquent

$$\mathcal{O} * f = \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial x_i} * F_i \in \bigcap_{\varepsilon > 0} W^{0,p}_{-\frac{1}{2}-\varepsilon}(\mathbb{R}^3).$$

Cela entraîne, en particulier, que $\mathcal{O} * f \in W^{0,p}_{-1}(\mathbb{R}^3)$. Par ailleurs, la proposition 3.20 donne l'existence d'une unique constante $K(f)$ telle que $\mathcal{O} * f + K(f) \in L^{r_2}(\mathbb{R}^3)$, $\nabla(\mathcal{O} * f) \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial \mathcal{O}}{\partial x_1} * f \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$. D'après la définition de r_2, nous avons en particulier $\mathcal{O} * f + K(f) \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$, ce qui implique que $\mathcal{O} * f + K(f) \in W^{0,p}_{-1}(\mathbb{R}^3)$ (voir (2.2)). Par différence, nous avons donc $K(f) \in \mathbb{P}_{[1-3/p]}$. Comme $1 < p \leq 2$, alors nous avons $K(f) = 0$. En conclusion, nous obtenons $\mathcal{O} * f \in \mathcal{M}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \cap L^r(\mathbb{R}^3)$ et vérifie (voir (3.45)) :

$$\lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} \mathcal{O} * f(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Des estimations (3.50) et (3.45), nous obtenons l'estimation (3.49) ce qui achève la preuve. ■

Dans le cas particulier d'une donnée $f \in W_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3)$, la solution u vérifie une équation d'énergie.

Proposition 3.22 *Soit* $f \in W_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3)$. *Alors l'unique solution* $u = \mathcal{O} * f \in \mathcal{M}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3) \cap L^6(\mathbb{R}^3)$ *de l'équation* (3.16) *satisfait l'équation d'énergie*

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 d\boldsymbol{x} = \langle f, u \rangle_{W_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.51}$$

Preuve : Pour toute fonction $u \in \mathcal{M}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ et pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, nous avons

$$\langle \frac{\partial u}{\partial x_1}, \varphi \rangle_{W_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)} = -\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \rangle_{W_0^{1,2}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3)}.$$

Grâce à la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ dans $\mathcal{M}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, pour tout $u, v \in \mathcal{M}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, nous obtenons

$$\langle \frac{\partial u}{\partial x_1}, v \rangle_{W_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)} = \langle -u, \frac{\partial v}{\partial x_1} \rangle_{W_0^{1,2}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3)}.$$

Il vient donc

$$\langle \frac{\partial u}{\partial x_1}, u \rangle_{W_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)} = 0. \tag{3.52}$$

Par (3.16) and (3.52), nous en déduisons

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 d\boldsymbol{x} = \langle -\Delta u, u \rangle_{W_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)} = \langle f, u \rangle_{W_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)},$$

ce qui achève la démonstration. ■

Nous allons à présent chercher des solutions de (3.16) pour des données f appartenant à $W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \cap W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$.

Proposition 3.23 *Soient p et q deux réels tel que $1 < p, q < \infty$. Soient $r_2 = r_2(p,\gamma)$ et $r_2^* = r_2^*(q,\gamma)$ les réels définis dans la définition 3.7. On suppose que $f \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \cap W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$ vérifie les conditions de compatibilité*

$$\begin{aligned} &\forall \lambda \in \mathbb{P}_{[1-3/p']}, \ \forall \mu \in \mathbb{P}_{[1-3/q']} \\ &\langle f, \lambda \rangle_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)} = \langle f, \mu \rangle_{W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,q'}(\mathbb{R}^3)} = 0. \end{aligned} \tag{3.53}$$

(i) *Si $1 < p, q < 4$, alors l'équation* (3.16) *admet une unique solution $u \in L^{r_2}(\mathbb{R}^3) \cap L^{r_2^*}(\mathbb{R}^3)$, telle que $\nabla u \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3) \cap \boldsymbol{L}^q(\mathbb{R}^3)$, $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \cap W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$. De plus on a l'estimation*

$$\begin{aligned} &\|u\|_{L^{r_2}(\mathbb{R}^3)} + \|u\|_{L^{r_2^*}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla u\|_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla u\|_{\boldsymbol{L}^q(\mathbb{R}^3)} + \\ &+ \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)} \leq C \left(\|f\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} + \|f\|_{W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)} \right). \end{aligned} \tag{3.54}$$

(ii) *Si $1 < p < 4 \leq q < \infty$, alors l'équation* (3.16) *admet une unique solution $u \in L^{r_2}(\mathbb{R}^3) \cap \widetilde{W}_0^{1,q}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\nabla u \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$, $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$. De plus on a*

$$\begin{aligned} &\|u\|_{L^{r_2}(\mathbb{R}^3)} + \inf_{K \in \mathbb{R}} \|u + K\|_{\widetilde{W}_0^{1,q}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla u\|_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq C \left(\|f\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} + \|f\|_{W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)} \right). \end{aligned} \tag{3.55}$$

(iii) *Si $4 \leq p, q < \infty$, alors l'équation* (3.16) *admet une solution $u \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \cap \widetilde{W}_0^{1,q}(\mathbb{R}^3)$, unique à une constante additive près. De plus on a*

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \|u + \lambda\|_{\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} + \inf_{\mu \in \mathbb{R}} \|u + \mu\|_{\widetilde{W}_0^{1,q}(\mathbb{R}^3)} \leq C \left(\|f\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} + \|f\|_{W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)} \right). \tag{3.56}$$

Preuve : (i) Soit $f \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \cap W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant la condition de compatibilité (3.53). Alors d'après le théorème 3.16, d'une part, l'équation (3.16) admet une unique solution $u \in L^{r_2}(\mathbb{R}^3)$, telle que $\nabla u \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$,

d'autre part, l'équation (3.16) admet une unique solution $w \in L^{r_2^*}(\mathbb{R}^3)$, telle que $\nabla w \in \boldsymbol{L}^q(\mathbb{R}^3)$, $\frac{\partial w}{\partial x_1} \in W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$. D'après la proposition (3.6), la différence $u - w$ est donc un polynôme. Mais comme $\nabla u \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$ et $\nabla w \in \boldsymbol{L}^q(\mathbb{R}^3)$, un argument d'intégration montre que nécessairement $\nabla u - \nabla w = 0$. Il existe donc une constante K telle que $u = w + K$. Puisque les espaces $L^{r_2}(\mathbb{R}^3)$ et $L^{r_2^*}(\mathbb{R}^3)$ ne contiennent pas les constantes, nous en déduisons que $K = 0$ et $u = w$. L'estimation (3.54) est une conséquence des estimations du théorème 3.16.
ii) En utilisant à nouveau le théorème 3.16, nous avons l'existence d'une unique solution u comme précédement et d'une solution $w \in \widetilde{W}_0^{1,q}(\mathbb{R}^3)$, unique à une constante additive près. En procédant comme dans (i), on montre l'existence d'une constante K telle que $u = w + K$. Mais comme $q \geq 4$, la constante K appartient à $\widetilde{W}_0^{1,q}(\mathbb{R}^3)$. Ainsi, nous avons $u = w + K \in \widetilde{W}_0^{1,q}(\mathbb{R}^3)$.
(iii) La preuve du cas $1 \leq p, q < \infty$ est similaire aux deux cas précédents. ■

Ce résultat achève la recherche de solutions de l'équation (3.16) dans les espaces de Sobolev avec le poids η_0^α. Nous nous intéressons à présent à des solutions qui appartiennent à des espaces avec poids anisotropes : η_β^α. Nous allons fixer $\beta = \frac{1}{2}$ et nous supposons que la donnée f appartient à $L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Nous cherchons des solutions qui s'écrivent comme la convolution par la solution fondamentale. Rappelons pour cela quelques estimations sur $\mathcal{O} * f$ et ses dérivées successives. Le lecteur pourra se referrer à [36] ou à [51]. Si $p \geq 2$ et $f \in L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, alors on a $\mathcal{O} * f \in \bigcap_{\varepsilon>0} L^p_{-\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, $\frac{\partial \mathcal{O}}{\partial x_i} * f \in L^p_{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ et $v.p.(\frac{\partial^2 \mathcal{O}}{\partial x_i \partial x_j} * f) \in \bigcap_{\varepsilon>0} L^p_{\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Avec l'aide de (3.30), on en déduit que $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\mathcal{O} * f) \in \bigcap_{\varepsilon>0} L^p_{\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ et on a l'estimation

$$\|\mathcal{O}*f\|_{L^p_{-\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}+\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathcal{O} * f)\right\|_{L^p_{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}+\left\|\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\mathcal{O} * f)\right\|_{L^p_{\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.57}$$

A ce stade, il n'est pas encore clair que $\mathcal{O}*f \in L^p_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\mathcal{O}*f) \in L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Pour cela, nous introduisons tout d'abord un problème auxiliaire : soit un $R > 0$

un réel et $g \in W^{0,p}_{\frac{1}{2}}(B'_R)$, on cherche une fonction z solution de

$$\begin{aligned} -\Delta z + \frac{\partial z}{\partial x_1} + a_0 z = g \quad \text{dans } B'_R \\ z = 0 \quad \text{sur } \partial B'_R, \end{aligned} \tag{3.58}$$

où

$$a_0 = \frac{2+2s+s^2}{2r(1+s)^2}. \tag{3.59}$$

Rappelons que $s = r - x_1$. Nous pouvons remarquer que

$$\frac{1}{2r} \leq a_0 \leq \frac{1}{r} \text{ dans } B'_R.$$

Nous introduisons le réel $R^* > 0$ tel que

$$R^* = \frac{|(p/2-1)(p/2-2)|}{p(1/2 - |1/p - 1/2|)}.$$

Lemme 3.24 *Soit $g \in W^{0,p}_{\frac{1}{2}}(B'_R)$, avec $R > R^*$. Alors le problème* (3.58) *admet une unique solution $z \in W^{0,p}_{-\frac{1}{2}}(B'_R)$, telle que*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(B'_R) \ , \ \frac{\partial z}{\partial x_1} \in L^p(B'_R).$$

De plus, nous avons

$$\|z\|_{W^{0,p}_{-\frac{1}{2}}(B'_R)} + \left\| \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(B'_R)} + \left\| \frac{\partial z}{\partial x_1} \right\|_{L^p(B'_R)} \leq C \|g\|_{W^{0,p}_{\frac{1}{2}}(B'_R)}. \tag{3.60}$$

Preuve : On commence par introduire le problème suivant

$$\begin{aligned} -\Delta z_\varepsilon + \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x_1} + a_0 z_\varepsilon + \varepsilon z_\varepsilon = g \quad \text{dans } B'_R \\ z_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial B'_R, \end{aligned} \tag{3.61}$$

où $\varepsilon > 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, le problème (3.61) admet une unique solution $z_\varepsilon \in W^{2,p}(B'_R) \cap \overset{o}{W}{}^{1,p}(B'_R)$. On peut donc multiplier la première équation de (3.61) par

$r^{1-p/2}|z_\varepsilon|^{p-2}z_\varepsilon$ et intégrer par parties. On obtient

$$\begin{aligned}
&(p-1)\int_{B'_R} r^{1-p/2}|z_\varepsilon|^{p-2}|\nabla z_\varepsilon|^2 d\boldsymbol{x} + \int_{B'_R} a_0 r^{1-p/2}|z_\varepsilon|^p d\boldsymbol{x} + \varepsilon\int_{B'_R} r^{1-p/2}|z_\varepsilon|^p d\boldsymbol{x}\\
&= \frac{1}{p}\left(1-\frac{p}{2}\right)\left(2-\frac{p}{2}\right)\int_{B'_R} r^{-1-p/2}|z_\varepsilon|^p d\boldsymbol{x} + (\frac{1}{p}-\frac{1}{2})\int_{B'_R} |z_\varepsilon|^p \frac{x_1}{r} r^{-p/2} d\boldsymbol{x}\\
&+\int_{B'_R} r^{1-p/2} g|z_\varepsilon|^{p-2}z_\varepsilon d\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

Il vient donc

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2}-\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right|\right)\int_{B'_R} r^{-p/2}|z_\varepsilon|^p d\boldsymbol{x}\\
&\leq \frac{1}{p}\left|1-\frac{p}{2}\right|\left|2-\frac{p}{2}\right|\int_{B'_R} r^{-1-p/2}|z_\varepsilon|^p d\boldsymbol{x} + \int_{B'_R} r^{1-p/2}|g||z_\varepsilon|^{p-1} d\boldsymbol{x}.
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Par ailleurs, on a

$$\frac{1}{p}\left|1-\frac{p}{2}\right|\left|2-\frac{p}{2}\right|\int_{B'_R} r^{-1-p/2}|z_\varepsilon|^p d\boldsymbol{x} \leq \frac{1}{pR}\left|1-\frac{p}{2}\right|\left|2-\frac{p}{2}\right|\int_{B'_R} r^{-p/2}|z_\varepsilon|^p d\boldsymbol{x}. \tag{3.63}$$

Par (3.62) et (3.63), on touve

$$\left(\frac{1}{2}-\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right|-\frac{1}{pR}\left|1-\frac{p}{2}\right|\left|2-\frac{p}{2}\right|\right)\int_{B'_R} r^{-p/2}|z_\varepsilon|^p d\boldsymbol{x} \leq \int_{B'_R} r^{1-p/2}|g||z_\varepsilon|^{p-1} d\boldsymbol{x}.$$

Comme $R > R^*$, on a

$$\left(\frac{1}{2}-\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right|-\frac{1}{pR}\left|1-\frac{p}{2}\right|\left|2-\frac{p}{2}\right|\right) > 0.$$

Nous obtenons donc l'estimation

$$\int_{B'_R} r^{-p/2}|z_\varepsilon|^p d\boldsymbol{x} \leq C\int_{B'_R} r^{p/2}|g|^p d\boldsymbol{x}, \tag{3.64}$$

où la constante $C > 0$ est indépendante de ε. Ceci montre que la suite (z_ε) est borné dans $W^{0,p}_{-\frac{1}{2}}(B'_R)$ qui est un espace réflexif. Nous pouvons donc en extraire une sous-suite, que nous noterons encore (z_ε), qui converge faiblement vers un élément

z de $W^{0,p}_{-\frac{1}{2}}(B'_R)$. De plus nous avons aussi

$$\|z\|_{W^{0,p}_{-\frac{1}{2}}(B'_R)} \leq \liminf \|z_\varepsilon\|_{W^{0,p}_{-\frac{1}{2}}(B'_R)} \leq C\|g\|_{W^{0,p}_{\frac{1}{2}}(B'_R)}.$$

Nous en déduisons que z_ε converge vers z au sens des distributions et z vérifie donc

$$-\Delta z + \frac{\partial z}{\partial x_1} = g - a_0 z \quad \text{dans } B'_R,$$

au sens des distributions. De plus, nous avons aussi l'estimation

$$\|z\|_{W^{0,p}_{-\frac{1}{2}}(B'_R)} \leq C\|g\|_{W^{0,p}_{\frac{1}{2}}(B'_R)}. \tag{3.65}$$

Montrons que $z = 0$ sur le bord $\partial B'_R$. D'une part, $g - a_0 z_\varepsilon$ est borné dans $W^{0,p}_{\frac{1}{2}}(B'_R)$ et donc borné dans $L^p(B'_R)$. Ceci implique que $\frac{\partial^2 z_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}$ est borné dans $L^p(B'_R)$. D'autre part, z_ε est aussi bornée dans $W^{0,p}_{-\frac{1}{2}}(B'_R)$. Ainsi, si Ω' est un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ tel que $\overline{B'_R} \subset \Omega'$, nous pouvons écrire

$$z_\varepsilon \rightharpoonup w \quad \text{dans} \quad W^{2,p}(\Omega') \quad \text{faible.}$$

Puisque $z_\varepsilon = 0$ sur $\partial B'_R$, alors nous avons $w = 0$ sur $\partial B'_R$. De plus comme z_ε tend faiblement vers z dans $W^{0,p}_{-\frac{1}{2}}(B'_R)$, alors $w = z|_{\overline{\Omega'}}$ et, par conséquent, $z = 0$ on $\partial B'_R$. Il nous reste à montrer que $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(B'_R)$ et $\frac{\partial z}{\partial x_1} \in L^p(B'_R)$. D'une part, comme z_ε tend vers z au sens des distributions, on en déduit immédiatement que $\frac{\partial^2 z_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}$ tend vers $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}$ au sens des distributions. D'autre part, $(\frac{\partial^2 z_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j})$ étant borné dans $L^p(B'_R)$, nous pouvons en extraire une sous-suite, que nous noterons encore $(\frac{\partial^2 z_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j})$, qui converge vers un élément y de $L^p(B'_R)$. De plus nous avons l'estimation

$$\|y\|_{L^p(B'_R)} \leq \liminf \|\frac{\partial^2 z_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}\|_{L^p(B'_R)} \leq C\|g\|_{W^{0,p}_{\frac{1}{2}}(B'_R)}. \tag{3.66}$$

Par conséquent, $y = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(B'_R)$, et $\frac{\partial z}{\partial x_1} \in L^p(B'_R)$. Par les estimations (3.65) et (3.66) nous obtenons (3.60). ■

Remarque 3.25 Soit σ est un réel tel que $0 < \sigma < \frac{1}{p}$. Soit $z \in W^{0,p}_{-\frac{1}{2}-\sigma}(B'_R)$ une solution de (3.58) pour une donnée $g \in W^{0,p}_{\frac{1}{2}}(B'_R)$. Alors si $w \in W^{0,p}_{-\frac{1}{2}-\sigma}(B'_R)$ est une autre solution de (3.58) pour la même donnée g, alors $z = w$. De plus, on a l'estimation

$$\forall\ 0 < \sigma < \frac{1}{p}, \quad \|z\|_{W^{0,p}_{-\frac{1}{2}-\sigma}(B'_R)} \leq C\|g\|_{W^{0,p}_{\frac{1}{2}}(B'_R)}.$$

Nous pouvons maintenant établir notre résultat.

Théorème 3.26 *On suppose $p \geq 2$ et soit $f \in L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Alors $u = \mathcal{O} * f \in L^p_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, $\nabla u \in \boldsymbol{L}^p_{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ et pour tout $i,j = 1,2,3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. De plus, nous avons l'estimation*

$$\|u\|_{L^p_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla u\|_{\boldsymbol{L}^p_{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right\|_{L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.67}$$

Preuve : Nous savons déjà que

$$u \in \bigcap_{\varepsilon > 0} L^p_{-\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3) \text{ et } \nabla u \in \boldsymbol{L}^p_{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3). \tag{3.68}$$

En particulier, nous avons l'estimation

$$\|\nabla u\|_{\boldsymbol{L}^p_{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.69}$$

Il nous reste donc à montrer que

$$u \in L^p_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3), \ \ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3).$$

Introduisons la partition de l'unité suivante

$$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3), \quad 0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq 1, \quad \varphi_1 + \varphi_2 = 1 \text{ dans } \mathbb{R}^3$$

$$\varphi_1 = 1 \text{ dans } \overline{B}_R, \quad \text{supp } \varphi_1 \subset \overline{B}_{R+1}.$$

Nous pouvons alors écrire

$$u = u_1 + u_2 \text{ où } u_1 = u\varphi_1 \text{ et } u_2 = u\varphi_2.$$

Puisque supp $u_1 \subset B_{R+1}$, nous avons $u_1 \in L^p_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ et

$$\|u_1\|_{L^p_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.70}$$

Par ailleurs, nous pouvons constater que u_2 est solution de l'équation

$$-\Delta u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \tilde{f} \text{ dans } \mathbb{R}^3,$$

où $\tilde{f} = \varphi_2 f + u\Delta\varphi_1 + 2\nabla u.\nabla\varphi_1 - u\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}$. La régularité de $\tilde{f}$ est determinée par celle de $\varphi_2 f$, ce qui implique que $\tilde{f} \in L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(B'_R)$. Posons $v = (1+s)^{1/2}u_2$, alors de (3.68) et de la remarque 2.12, $v \in \bigcap_{\varepsilon>0} W^{0,p}_{-\frac{1}{2}-\varepsilon}(\mathbb{R}^3)$ et satisfait l'équation

$$-\Delta v + \frac{\partial v}{\partial x_1} = (1+s)^{1/2}\tilde{f} - 2\nabla u_2 \nabla[(1+s)^{1/2}] - u_2\Delta[(1+s)^{1/2}] + u_2\frac{\partial}{\partial x_1}\left[(1+s)^{1/2}\right].$$

Maintenant un simple calcul donne

$$\Delta[(1+s)^{1/2}] = \frac{2+s}{2r}(1+s)^{-3/2} \ , \frac{\partial}{\partial x_1}[(1+s)^{1/2}] = -\frac{s}{2r}(1+s)^{-1/2}.$$

Il vient donc

$$-u_2\Delta[(1+s)^{1/2}] + u_2\frac{\partial}{\partial x_1}[(1+s)^{1/2}] = -a_0 v,$$

où a_0 est défini par (3.59). Par conséquent la fonction v est solution du problème (3.58) avec une donnée $g = (1+s)^{1/2}\tilde{f} - 2\nabla u_2\nabla[(1+s)^{1/2}] \in W^{0,p}_{\frac{1}{2}}(B'_R)$. Le lemme 3.24 nous donne l'existence d'une fonction $z \in W^{0,p}_{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ solution de (3.58) et satisfait l'estimation (3.60). En posant $w = v - z$, alors $w \in \bigcap_{\varepsilon>0} W^{0,p}_{-\frac{1}{2}-\varepsilon}(B'_R)$ et satisfait

$$-\Delta w + \frac{\partial w}{\partial x_1} + a_0 w = 0 \text{ dans } B'_R \text{ et } w = 0 \text{ sur } \partial B_R.$$

La remarque 3.25 nous montre que $w = 0$ ce qui implique que $v \in W^{0,p}_{-\frac{1}{2}}(B'_R)$ et

$$\|v\|_{W^{0,p}_{-\frac{1}{2}}(B'_R)} \leq C\|g\|_{W^{0,p}_{\frac{1}{2}}(B'_R)} \leq C\|f\|_{L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}.$$

Par consequent, $u_2 \in L^p_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ et

$$\|u_2\|_{L^p_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.71}$$

Cela montre que $u \in L^p_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ et les estimations (3.70), (3.71) nous donnent

$$\|u\|_{L^p_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.72}$$

Maintenant, en multipliant l'équation (3.16) par $\varphi_2\eta_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$, on obtient

$$-\Delta(\eta_{1/2}^{1/2}u_2) + \frac{\partial}{\partial x_1}(\eta_{1/2}^{1/2}u_2) = F,$$

où $F = \varphi_2\eta_{1/2}^{1/2}f - u\Delta(\varphi_2\eta_{1/2}^{1/2}) - 2\nabla u.\nabla(\varphi_2\eta_{1/2}^{1/2}) + u\dfrac{\partial}{\partial x_1}(\varphi_2\eta_{1/2}^{1/2})$, alors par (2.25), (2.26) et la remarque 2.12, on a $F \in L^p(\mathbb{R}^3)$. Ainsi la proposition 3.9 nous donne l'existence d'une fonction w telle que $\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial w}{\partial x_1} \in L^p(\mathbb{R}^3)$, solution de

$$-\Delta w + \frac{\partial w}{\partial x_1} = -\Delta(\eta_{1/2}^{1/2}u_2) + \frac{\partial}{\partial x_1}(\eta_{1/2}^{1/2}u_2).$$

De plus on a

$$\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial w}{\partial x_1}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C\|F\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.73}$$

On pose $z = \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\eta_{1/2}^{1/2}u_2)$ et comme $\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i \partial x_j} \in \bigcap_{\varepsilon>0} L^p_{\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, alors $z \in \bigcap_{\varepsilon>0} W^{0,p}_{-\varepsilon}(\mathbb{R}^3)$ et satisfait

$$-\Delta z + \frac{\partial z}{\partial x_1} = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3.$$

D'après la proposition 3.6, ceci entraîne que $z = 0$ et

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\eta_{1/2}^{1/2}u_2) \in L^p(\mathbb{R}^3).$$

On obtient donc
$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3).$$
Par ailleurs, il est facile de vérifier que
$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3).$$
Ainsi, en conclusion, on a
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3),$$
avec l'estimation
$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.74}$$
Des estimations (3.69), (3.72), (3.74) on trouve (3.67). ■

Nous pouvons à présent établir un résultat d'existence pour des données moins régulière dans des espaces de Sobolev avec poids anisotropiques.

Théorème 3.27 *On suppose $p > 3$ et soit $f \in Y^{-1,p}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Alors l'équation* (3.16) *admet une unique solution $u \in L^p_{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\nabla u \in \boldsymbol{L}^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in Y^{-1,p}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. De plus on a l'estimation*
$$\|u\|_{L^p_{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla u\|_{\boldsymbol{L}^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{Y^{-1,p}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{Y^{-1,p}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.75}$$

Preuve : Comme $f \in Y^{-1,p}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ et $p > 3$, d'après la remarque 2.29, on peut écrire
$$f = \operatorname{div} \mathbf{F},$$
où $\mathbf{F} \in \boldsymbol{L}^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Ainsi, pour chaque $\ell = 1, 2, 3$, il existe une unique fonction $v_\ell \in L^p_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\nabla v_\ell \in \boldsymbol{L}^p_{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, $\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial v_\ell}{\partial x_1} \in L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$,

solution de

$$-\Delta v_\ell + \frac{\partial v_\ell}{\partial x_1} = F_\ell.$$

De plus nous avons l'estimation

$$\|v_\ell\|_{L^p_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla v_\ell\|_{\boldsymbol{L}^p_{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial^2 v_\ell}{\partial x_i \partial x_j}\right\|_{L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial v_\ell}{\partial x_1}\right\|_{L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|F_\ell\|_{L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.76}$$

Soit maintenant $u = \operatorname{div} \boldsymbol{v}$, alors $u \in L^p_{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ avec $\nabla u \in \boldsymbol{L}^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ est l'unique solution of (3.16). De plus, de l'estimation (3.76), nous obtenons

$$\|u\|_{L^p_{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla u\|_{\boldsymbol{L}^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\mathbf{F}\|_{\boldsymbol{L}^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{Y^{-1,p}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.77}$$

Comme $\nabla u \in \boldsymbol{L}^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, alors $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ appartient à $Y^{-1,p}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ et par conséquent $\Delta u \in Y^{-1,p}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Nous en déduisons que $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in Y^{-1,p}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ avec

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{Y^{-1,p}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{Y^{-1,p}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.78}$$

Des estimations (3.77) et (3.78), on ontient (3.75). ■

3.3.3 Un résultat de régularité

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que si la donnée f est plus régulière que dans le théorème 3.16, il en est de même de la solution de l'équation (3.16).

Théorème 3.28 *soient p et q deux réels tels que $1 < q < \infty$, $p > \frac{3}{2}$ et $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{3}$. Soient $r_2 = r_2(p, \gamma)$ et $r_2^* = r_2^*(q, \gamma)$ les réels définis dans la définition 3.7. Alors pour toute fonction $f \in W^{0,p}_1(\mathbb{R}^3) \cap W^{-1,q}_0(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant la condition de compatibilité*

$$\forall \lambda \in \mathbb{P}_{[1-3/q']}, \quad \langle f, \lambda \rangle_{W^{-1,q}_0(\mathbb{R}^3) \times W^{1,q'}_0(\mathbb{R}^3)} = 0, \tag{3.79}$$

l'unique solution u donnée par la proposition 3.23 satisfait,

$$\forall i, j = 1, 2, 3, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in W^{0,p}_1(\mathbb{R}^3)\ ,\ \frac{\partial u}{\partial x_1} \in W^{0,p}_1(\mathbb{R}^3),$$

avec les propriétés suivantes :

$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right\|_{W_1^{0,p}(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{W_1^{0,p}(\mathbb{R}^3)} \leq C\left(\|f\|_{W_1^{0,p}(\mathbb{R}^3)} + \|f\|_{W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)}\right). \qquad (3.80)$$

1) Si $1 < q < p < 4$, alors $u \in L^{r_2}(\mathbb{R}^3) \cap L^{r_2^*}(\mathbb{R}^3)$, $\nabla u \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3) \cap \boldsymbol{L}^q(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$.
2) Si $1 < q < 4 \leq p < \infty$, alors $u \in L^{r_2^*}(\mathbb{R}^3) \cap W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$, $\nabla u \in \boldsymbol{L}^q(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$.

Preuve : Remarquons tout d'abord que $1 < q < 3$ et

$$\mathbb{P}_{[1-3/\mathrm{p}']} = \mathbb{P}_{[1-3/\mathrm{q}]} = \{0\}.$$

Soit maintenant $f \in W_1^{0,p}(\mathbb{R}^3) \cap W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant (3.79). Alors d'après (2.3), nous avons

$$f \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \cap W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3).$$

Nous allons à présent utiliser la proposition 3.23.
1) Si $1 < q < p < 4$, alors l'équation (3.16) admet une unique solution $u \in L^{r_2}(\mathbb{R}^3) \cap L^{r_2^*}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\nabla u \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3) \cap \boldsymbol{L}^q(\mathbb{R}^3)$, $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \cap W_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant aussi (3.53). Il nous faut maintenant montrer que, pour tout $i, j = 1, 2, 3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in W_1^{0,p}(\mathbb{R}^3)$. Supposons d'abord $p \neq 3$. Pour tout $i = 1, 2, 3$, nous avons

$$-\Delta\left(\rho\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \rho\frac{\partial f}{\partial x_i} - \Delta\rho\frac{\partial u}{\partial x_i} - 2\nabla\rho\nabla\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

En utilisant (2.2), (2.3), (2.4) et (2.5), les termes $\rho\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\Delta\rho\frac{\partial u}{\partial x_i}$ et $\nabla\rho\nabla(\frac{\partial u}{\partial x_i})$ appartiennent à $W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$. Il reste à montrer que $\frac{\partial \rho}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_i} \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$. Mais comme $\nabla u \in \boldsymbol{L}^q(\mathbb{R}^3)$ et $p > \frac{3}{2}$, alors d'après la définition de q, grâce à (2.15), $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$. Il vient alors que

$$-\Delta\left(\rho\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3).$$

Ainsi d'après le théorème 3.16 i), pour chaque $i = 1, 2, 3$, il existe une fonction $v_i \in L^{r_2}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\nabla v_i \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial v_i}{\partial x_1} \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ est solution de

$$-\Delta v_i + \frac{\partial v_i}{\partial x_1} = -\Delta\left(\rho\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial x_i}\right),$$

et vérifie l'estimation

$$\begin{aligned} &\|v_i\|_{L^{r_2}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla v_i\|_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial v_i}{\partial x_1}\right\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq C\left\|-\Delta(\rho\frac{\partial u}{\partial x_i}) + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho\frac{\partial u}{\partial x_i})\right\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq C\|f\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned} \tag{3.81}$$

Par la définition de r_2, nous avons en particulier $v_i \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$. Par (2.2) et comme $p \neq 3$, $v_i \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \subset W_{-1}^{0,p}(\mathbb{R}^3)$. La proposition 3.6 nous donne alors $\rho\frac{\partial u}{\partial x_i} - v_i \in \mathbb{P}_{[1-3/p]}$. D'où $\rho\frac{\partial u}{\partial x_i} \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$, ce qui entraîne que $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in W_1^{0,p}(\mathbb{R}^3)$ et par conséquent $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in W_1^{0,p}(\mathbb{R}^3)$. Des estimations (3.53), (3.81) et (3.16), nous obtenons (3.80).
Si $p = 3$, la preuve reste valable en remplaçant le poids ρ dans les espaces $W_{-1}^{0,p}(\mathbb{R}^3)$ et $W_1^{0,p'}(\mathbb{R}^3)$ est remplacé par le poids $\rho\ln(1+\rho)$.
2) Pour le cas $1 < q < 4 \leq p < \infty$, nous procédons de la même manière. ■

Remarque 3.29 (i) Remarquons que $W_1^{0,p}(\mathbb{R}^3) \subset L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Par conséquent si $p \geq 2$, la solution donnée par le théorème précédent vérifie $u \in L^p_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ et $\nabla u \in \boldsymbol{L}^p_{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$.
(ii) La question de la régularité pour une donnée f appartenant simplement à $W_1^{0,p}(\mathbb{R}^3)$ est ouverte.

3.4 Le problème d'Oseen dans $\mathbb{R}^3$

Nous considérons maintenant le problème non homogène d'Oseen :

$$\begin{aligned} -\Delta \boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi = \boldsymbol{f} \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3, \\ \text{div } \boldsymbol{u} = g \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3. \end{aligned} \tag{3.82}$$

Nous ajoutons à ce système la condition à l'infini

$$\lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_\infty,$$

où $\boldsymbol{u}_\infty$ est un vecteur constant de $\mathbb{R}^3$.

3.4.1 Unicité de la solution

Considérons tout d'abord une solution $(\boldsymbol{u}, \pi)$ qui appartient à $\boldsymbol{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ et qui correspond à des données $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ et $g = 0$. En prenant la divergence de la première équation de (3.82), nous obtenons $\Delta \pi = 0$. Cela entraîne que π est un polynôme harmonique (voir [53]). Par ailleurs, nous pouvons écrire

$$\Delta \left(-\Delta \boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \right) = -\Delta(\nabla \pi) = \boldsymbol{0}. \tag{3.83}$$

Cela implique que, pour tout $j = 1, 2, 3$, $-\Delta u_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_1}$ est un polynôme harmonique. La transformée de Fourier appliquée à (3.83) nous permet d'obtenir

$$\forall j = 1, 2, 3, \qquad 2\pi |\xi|^4 \hat{u}_j(\xi) + i|\xi|^2 \xi_1 \hat{u}_j(\xi) = 0.$$

En posant $\hat{u}_j(\xi) = v_j(\xi) + i w_j(\xi)$, il vient,

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\pi |\xi|^4 v_j(\xi) - |\xi|^2 \xi_1 w_j(\xi) = 0 \\ |\xi|^2 \xi_1 v_j(\xi) + 2\pi |\xi|^4 w_j(\xi) = 0. \end{array} \right.$$

Le déterminant du système est $4\pi^2 |\xi|^8 + |\xi|^4 \xi_1^2$. Ainsi, pour $\xi \neq 0$, le support de $\hat{u}_j$ est inclus dans $\{0\}$. Nous en déduisons que u_j est un polynôme . Nous avons donc prouvé la proposition suivante

Proposition 3.30 *Si* $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ *est une solution du problème* (3.82), *correspondant à* $\boldsymbol{f} = g = 0$, *alors* $\boldsymbol{u}$ *et* π *sont des polynômes .*

Dans la suite, nous aurons besoin de l'espace des polynômes suivant

$$\boldsymbol{\mathcal{N}}_k = \left\{ (\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in \boldsymbol{\mathbb{P}}_k \times \mathbb{P}^{\Delta}_{k-1}, -\Delta\boldsymbol{\lambda} + \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial x_1} + \nabla\mu = \boldsymbol{0},\ \operatorname{div} \boldsymbol{\lambda} = 0 \right\}.$$

Remarquons que

$$\boldsymbol{\mathcal{N}}_0 = \mathbb{R}^3 \times \{0\} \ \text{ et } \boldsymbol{\mathcal{N}}_1 = \mathbf{S}_1 \times \mathbb{R}.$$

Nous rappelons que S_1 est l'espace des polynômes de $\mathbb{P}_1$ indépendante de x_1.

3.4.2 Résultats d'existence

Rappelons deux résultats sur le problème (3.82). Le premier concerne des données régulières, $(\boldsymbol{f}, g) \in \boldsymbol{\mathcal{C}}^\infty(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$. Le problème possède alors une solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{\mathcal{C}}^\infty(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ que l'on peut écrire explicitement

$$\begin{aligned} u_i &= \mathcal{O}_{ij} * f_j + \mathcal{P}_i * g, \\ \pi &= \mathcal{P}_j * f_j + g - \frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{E} * g) = \mathcal{P}_j * f_j + g - \mathcal{P}_1 * g. \end{aligned} \tag{3.84}$$

Le second résultat concerne des données $(\boldsymbol{f}, g) \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3) \times W^{1,p}(\mathbb{R}^3)$. Dans ce cas, le problème (3.82) possède une solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{L}^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3) \times L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ telle que, pour tout $i, j = 1, 2, 3$, $\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x_i \partial x_j} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$, $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$ et $\nabla\pi \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$. De plus, nous avons les propriétés suivantes :

(i) Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left\| \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \right\|_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla\pi\|_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)} \leq C(\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^3)}).$$

(ii) Si $1 < p < 4$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\nabla \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)} \leq C(\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^3)}).$$

où r_2 est le réel donné dans la définition 3.7.
(iii) Si $1 < p < 2$, il existe une constante $C > 0$ telle

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^{r_1}(\mathbb{R}^3)} \leq C(\|\boldsymbol{f}\,\|_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^3)}).$$

où r_1 est le réel donné dans la définition 3.7.
On peut trouver une preuve de ce résultat dans [23] et [22]. Le cas particulier où $r_1 = \frac{2p}{2-p}$ et $r_2 = \frac{4p}{4-p}$ est aussi démontré dans [27]. Nous allons améliorer le résultat d'existence précédent en supposant que la donnée g appartient à un espace contenant $W^{1,p}(\mathbb{R}^3)$.

Théorème 3.31 *Soient r_1 et r_2 les réels donnés dans la définition 3.7. Soit $(\boldsymbol{f}, g) \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3) \times \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$.*
(i) *Si $1 < p < 2$, alors le problème (3.82) possède une solution unique $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{L}^{r_1}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\nabla \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)$, pour tout $i, j = 1, 2, 3$ $\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x_i \partial x_j} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$. De plus, nous avons*

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^{r_1}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x_i \partial x_j}\right\|_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1}\right\|_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \|\pi\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \\ \leq C\left(\|\boldsymbol{f}\,\|_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)}\right).\end{aligned} \tag{3.85}$$

(ii) *Si $2 \leq p < 3$, alors (3.82) possède une solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{W}_0^{1,r_2}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$, unique à un élément de $\boldsymbol{\mathcal{N}}_0$ près, telle que pour tout $i, j = 1, 2, 3$, $\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x_i \partial x_j} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$ vérifiant aussi*

$$\begin{aligned}\inf_{\mathbf{K} \in \mathbb{R}^3} \|\boldsymbol{u} + \mathbf{K}\|_{\boldsymbol{W}_0^{1,r}(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x_i \partial x_j}\right\|_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1}\right\|_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \|\pi\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \\ \leq C\left(\|\boldsymbol{f}\,\|_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)}\right).\end{aligned} \tag{3.86}$$

(iii) *Si $p \geq 3$, alors (3.82) possède une solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{W}_0^{2,p}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$,* *unique à un élément de $\boldsymbol{\mathcal{N}}_1$ près, telle que $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$. De plus, nous avons*

$$\inf_{(\boldsymbol{\lambda},\mu)\in\boldsymbol{\mathcal{N}}_1} \Big(\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\lambda}\|_{\boldsymbol{W}_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)} + \|\pi+\mu\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \Big) + \left\| \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \right\|_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)} \\ \leq C \left(\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \right). \tag{3.87}$$

Preuve : Rappelons que si $(\boldsymbol{u},\pi) \in \boldsymbol{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ est une solution du problème d'Oseen (3.82) avec des données nulles, alors $\boldsymbol{u}$ et π sont des polynômes . Dans un premier temps, nous allons montrer l'existence de la pression. Soit $(\boldsymbol{f},g) \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3) \times \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$, nous avons alors

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f} + \Delta g - \frac{\partial g}{\partial x_1} \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3).$$

De plus, pour tout polynôme $\mu \in \mathbb{P}_{[1-3/\mathrm{p}']} \subset \widetilde{\mathrm{W}}_0^{1,\mathrm{p}'}(\mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned} &\langle \operatorname{div} \boldsymbol{f} + \Delta g - \frac{\partial g}{\partial x_1}, \mu \rangle_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)\times W_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)} \\ &= -\langle \boldsymbol{f}, \nabla\mu \rangle_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)\times \boldsymbol{L}^{p'}(\mathbb{R}^3)} + \langle g, \Delta\mu \rangle_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)\times W_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^3)} + \\ &+ \langle g, \frac{\partial \mu}{\partial x_1} \rangle_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)\times W_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^3)} = 0. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que $\operatorname{div} \boldsymbol{f} + \Delta g - \frac{\partial g}{\partial x_1} \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \perp \mathbb{P}_{[1-3/\mathrm{p}']}$. Par ailleurs, d'après le théorème 9.5 de [6], l'opérateur de Laplace suivant est un isomorphisme

$$\Delta : \; W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)/\mathbb{P}_{[1-\frac{3}{\mathrm{p}}]} \to \mathrm{W}_0^{-1,\mathrm{p}}(\mathbb{R}^3) \perp \mathbb{P}_{[1-\frac{3}{\mathrm{p}'}]}.$$

Ainsi, il existe une fonction $\pi \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$\Delta\pi = \operatorname{div} \boldsymbol{f} + \Delta g - \frac{\partial g}{\partial x_1}$$

et satisfaisant l'estimation

$$\inf_{\mu\in\mathbb{P}_{[1-3/\mathrm{p}]}} \|\pi+\mu\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \leq C \left\| \operatorname{div} \boldsymbol{f} + \Delta g - \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} \\ \leq C \left(\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \right). \tag{3.88}$$

Il est alors facile de voir que $\boldsymbol{f} - \nabla\pi$ appartient à $\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$. Nous allons maintenant appliquer le théorème 3.16 pour montrer l'existence de la vitesse $\boldsymbol{u}$. Nous avons, pour cela, trois cas à considérer.

(i) Si $1 < p < 2$, alors il existe un unique vecteur $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^{r_1}(\mathbb{R}^3)$, telle que $\nabla \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)$, et pour tout $i, j = 1, 2, 3$, $\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x_i \partial x_j} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$. De plus

$$-\Delta \boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} = \boldsymbol{f} - \nabla\pi \tag{3.89}$$

et

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^{r_1}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i \partial x_j}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq C\left(\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla\pi\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}\right) \\ &\leq C\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned} \tag{3.90}$$

Les estimations (3.88) et (3.90) nous donnent l'estimation (3.85). Il nous reste à prouver que div $\boldsymbol{u} = g$. Remarquons que div $\boldsymbol{u}$ appartient à $L^{r_2}(\mathbb{R}^3)$ et que $1 < p < 2$. Alors d'après la définition 3.7 et la remarque 3.8, div $\boldsymbol{u}$ appartient en particulier à $L^{\frac{3p}{3-p}}(\mathbb{R}^3)$. Par ailleurs, la propriété (2.13) nous fournit l'injection continue $\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \subset L^{\frac{3p}{3-p}}(\mathbb{R}^3)$. Par conséquent la fonction g appartient aussi à $L^{\frac{3p}{3-p}}(\mathbb{R}^3)$. Alors div $\boldsymbol{u} - g \in L^{\frac{3p}{3-p}}(\mathbb{R}^3)$ et vérifie

$$-\Delta(\text{div } \boldsymbol{u} - g) + \frac{\partial(\text{div } \boldsymbol{u} - g)}{\partial x_1} = 0. \tag{3.91}$$

D'après la proposition 3.6, div $\boldsymbol{u} - g$ est un polynôme de $L^{\frac{3p}{3-p}}(\mathbb{R}^3)$, c'est-à-dire que div $\boldsymbol{u} = g$.

(ii) Si $2 \leq p < 3$, alors il existe un vecteur $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}_0^{1,r_2}(\mathbb{R}^3)$ telle que pour tout $i, j = 1, 2, 3$, $\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x_i \partial x_j} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$ et vérifie (3.89). Les mêmes arguments que précédemment sont utilisés ensuite pour prouver que div $\boldsymbol{u} = g$.

(iii) si $p \geq 3$, alors en utilisant la remarque 3.10, il existe un vecteur $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant (3.89). Il vient que div $\boldsymbol{u} - g \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ vérifie (3.91). Par conséquent, div $\boldsymbol{u} - g$ est un polynôme de $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$. Comme $p \geq 3$, cela entraîne que div $\boldsymbol{u} - g = K \in \mathbb{R}$. En posant $\boldsymbol{\lambda} = (0, \frac{1}{2}Kx_2, \frac{1}{2}Kx_3)$, nous constatons que $\lambda \in \mathbf{S}_1 \subset \boldsymbol{W}_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)$ et nous pouvons écrire

$$K = \text{div } \boldsymbol{\lambda}.$$

Ainsi, div $(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\lambda}) = g$ et nous en déduisons que $(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\lambda}, \pi) \in \boldsymbol{W}_0^{2,p}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ est une solution de (3.82). ■

Remarque 3.32 1) Si $1 < p < 3$ et $(\boldsymbol{f}, g) \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3) \times \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$, alors d'après le théorème précédent, la solution $(\boldsymbol{u}, \pi)$ du problème d'Oseen satisfait, $\nabla \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)$, $\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x_i \partial x_j} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$ et $\pi \in W_0^{1,p}$. La définition 3.7 et la remarque 3.8 montrent, qu'en particulier, $\nabla \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^{\frac{3p}{3-p}}(\mathbb{R}^3)$. Ainsi grâce à la caractérisation (2.14), nous en déduisons que $\nabla \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$. La remarque 3.4 entraîne alors que

$$\lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} \nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \text{ et } \lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} \pi(\boldsymbol{x}) = 0,$$

au sense de la définition 3.3.
2) Si $3 \leq p < 4$ et si, dans le théorème précédent, nous supposons de plus $g = 0$ ou g appartient à $L^{r_2}(\mathbb{R}^3)$, alors le problème (3.82) possède une solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{W}_0^{1,r_2}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$, unique à un vecteur constant près de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, satisfaisant pour tout $i, j = 1, 2, 3$, $\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x_i \partial x_j} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$. Par le lemme 3.5, nous en déduisons que $\nabla \boldsymbol{u}$ est continue et

$$\lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} \nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}.$$

Nous nous intéressons maintenant à des solutions $(\boldsymbol{u}, \pi)$ qui appartiennent à l'espace $\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \times L^p(\mathbb{R}^3)$. Nous avons tout d'abord besoin d'un résultat qui est une condition nécessaire pour prouver l'existence d'une telle solution.

Lemme 3.33 *Pour tout* $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \times L^p(\mathbb{R}^3)$ *et pour tout* $\boldsymbol{\lambda} \in \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)$, *nous avons*

$$\begin{aligned} &\langle -\Delta \boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi, \boldsymbol{\lambda} \rangle_{\boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times \boldsymbol{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)} \\ &= \langle \boldsymbol{u}, -\Delta \boldsymbol{\lambda} - \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial x_1} \rangle_{\boldsymbol{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \times \boldsymbol{W}_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^3)} - \langle \pi, \text{div } \boldsymbol{\lambda} \rangle_{L^p(\mathbb{R}^3) \times L^{p'}(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned} \tag{3.92}$$

En particulier, si $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{P}_{[1-3/p']}$, *nous avons*

$$\langle -\Delta \boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi, \boldsymbol{\lambda} \rangle_{\boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times \boldsymbol{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Preuve : Comme $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \times L^p(\mathbb{R}^3)$ nous avons $-\Delta \boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi \in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$. D'où pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\langle -\Delta \boldsymbol{u} + \nabla \pi, \boldsymbol{\lambda} \rangle_{\boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times \boldsymbol{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)} \\
&= \langle \boldsymbol{u}, -\Delta \boldsymbol{\lambda} \rangle_{\boldsymbol{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \times \boldsymbol{W}_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^3)} - \langle \pi, \operatorname{div} \boldsymbol{\lambda} \rangle_{L^p(\mathbb{R}^3) \times L^{p'}(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}$$

Maintenant, la densité de $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^3)$ dans $\widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$, fournit l'existence d'une suite $(\boldsymbol{u}_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^3)$ qui converge vers $\boldsymbol{u}$ dans $\widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$. Par conséquent, $\boldsymbol{u}_k$ converge vers $\boldsymbol{u}$ dans $\boldsymbol{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial \boldsymbol{u}_k}{\partial x_1}$ converge vers $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1}$ dans $\boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$. Ainsi, pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\langle \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1}, \boldsymbol{\lambda} \rangle_{\boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times \boldsymbol{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)} = \lim_{k \to +\infty} \langle \frac{\partial \boldsymbol{u}_k}{\partial x_1}, \boldsymbol{\lambda} \rangle_{\boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times \boldsymbol{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)} \\
&= - \lim_{k \to +\infty} \langle \boldsymbol{u}_k, \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial x_1} \rangle_{\boldsymbol{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \times \boldsymbol{W}_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^3)} \\
&= -\langle \boldsymbol{u}, \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial x_1} \rangle_{\boldsymbol{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \times \boldsymbol{W}_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}$$

De plus, pour tout $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \times L^p(\mathbb{R}^3)$ et pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)$, nous obtenons (3.92). Comme les polynômes de $\mathbb{P}_{[1-3/p']}$ sont au plus des constantes, (3.92) entraîne que

$$\langle -\Delta \boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi, \boldsymbol{\lambda} \rangle_{\boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times \boldsymbol{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)} = 0. \quad \blacksquare$$

Théorème 3.34 *Soit* r_2 *le réel donné dans définition 3.7. Soit* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ *satisfaisant la condition de compatibilité*

$$\forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{P}_{[1-3/p']}, \quad \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\lambda} \rangle_{\boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times \boldsymbol{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)} = 0. \tag{3.93}$$

Soit $g \in L^p(\mathbb{R}^3)$*, telle que* $\frac{\partial g}{\partial x_1} \in W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3)$*, satisfaisant*

$$\forall \lambda \in \mathbb{P}_{[2-3/\mathrm{p}']}, \quad \langle \frac{\partial g}{\partial x_1}, \lambda \rangle_{\mathrm{W}_0^{-2,\mathrm{p}}(\mathbb{R}^3) \times \mathrm{W}_0^{2,\mathrm{p}'}(\mathbb{R}^3)} = 0. \tag{3.94}$$

(i) *Si* $1 < p < 4$*, alors le problème d'Oseen* (3.82) *admet une solution unique* $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3) \times L^p(\mathbb{R}^3)$ *telle que* $\nabla \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$ *et* $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$*. De plus, nous avons*

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \right\|_{\boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} + \|\pi\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq C \left(\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3)} \right). \end{aligned} \tag{3.95}$$

(ii) *Si* $p \geq 4$*, alors le problème* (3.82) *admet une solution* $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \times L^p(\mathbb{R}^3)$*, unique à un élément de* $\boldsymbol{\mathcal{N}}_0$ *près. De plus, nous avons*

$$\begin{aligned} &\inf_{\mathbf{K} \in \mathbb{R}^3} \|\boldsymbol{u} + \mathbf{K}\|_{\widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} + \|\pi\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq C \left(\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3)} \right). \end{aligned} \tag{3.96}$$

Preuve : Le principe de la preuve est le même que pour le théorème 3.31. Soient $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^3)$ telle que $\frac{\partial g}{\partial x_1} \in W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3)$. Alors, par (2.3), (3.93) et (3.94), nous pouvons observer que

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{f} + \Delta g - \frac{\partial g}{\partial x_1} \in W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3) \perp \mathbb{P}_{[2-3/\mathrm{p}']}.$$

Par ailleurs, d'après le théorème 9.6 de [6], l'opérateur de Laplace suivant est un isomorphisme

$$\Delta : \ W_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)/\mathbb{P}_{[2-\frac{3}{\mathrm{p}}]} \to \mathrm{L}^\mathrm{p}(\mathbb{R}^3).$$

Par dualité et transposition, nous obtenons l'isomorphisme suivant

$$\Delta : \ L^{p'}(\mathbb{R}^3) \to W_0^{-2,p'}(\mathbb{R}^3) \perp \mathbb{P}_{[2-\frac{3}{\mathrm{p}}]}. \tag{3.97}$$

Ainsi, il existe une unique fonction $\pi \in L^p(\mathbb{R}^3)$, telle que,

$$\Delta\pi = \text{div}\, \boldsymbol{f} + \Delta g - \frac{\partial g}{\partial x_1},$$

et vérifiant l'estimation

$$\|\pi\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C \left(\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3)} \right).$$

Ainsi $\boldsymbol{f} - \nabla\pi$ appartient à $\in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \perp \mathbb{P}_{[1-3/p']}$ et nous avons deux cas.
(i) Si $1 < p < 4$, alors le théorème 3.16 i) fournit l'existence de $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^r(\mathbb{R}^3)$, telle que $\nabla \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$, satisfaisant (3.89) et l'estimation

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \right\|_{\boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} \leq C \left(\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla\pi\|_{\boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} \right)$$
$$\leq C \left(\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3)} \right).$$

Il est alors facile de voir que div $\boldsymbol{u} - g \in L^p(\mathbb{R}^3)$ vérifie (3.91). La proposition 3.6 montre que div $\boldsymbol{u} = g$.
(ii) Si $p \geq 4$, alors, d'après le théorème 3.16 ii), il existe $\boldsymbol{u} \in \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant (3.89) et vérifiant

$$\inf_{\mathbf{K} \in \mathbb{R}^3} \|\boldsymbol{u} + \mathbf{K}\|_{\widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \leq C \left(\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3)} \right).$$

Remarque 3.35 Dans ce théorème , l'hypothèse sur la donnée g est plus faible que celle du théorème 4.2 p 388 de [27] qui est, pour $n = 3$, $g \in L^p(\mathbb{R}^3) \cap D_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$. Comme pour $p > 3/2$ les espaces $D_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ et $W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ coïncident, cela signifie donc $g \in L^p(\mathbb{R}^3) \cap W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$.

Remarque 3.36 1) Si $1 < p < 3$, alors, d'après le définition de r_2 et la caractérisation (2.14), le champs de vitesses $\boldsymbol{u}$ appartient en particulier à $\widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$.

Ainsi, la remarque 3.4 nous montre que

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$$

au sens de la définition 3.3. En particulier, pour tout vecteur constant $\boldsymbol{u}_\infty$, le couple $(\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}_\infty, \pi)$ est l'unique solution de (3.82) vérifiant $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$, $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$, $\pi \in L^p(\mathbb{R}^3)$ et

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_\infty$$

au sens de la définition 3.3.
2) Si $3 < p < 4$, alors d'après le lemme 3.5, la vitesse $\boldsymbol{u}$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ et

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}.$$

Remarque 3.37 La remarque précédente et la proposition 2.2 montrent que finalement si $1 < p < 4$, la vitesse $\boldsymbol{u}$ appartient à $\boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3) \cap \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$.

Nous allons maintenant montrer que certaines solutions trouvées dans le théorème 3.34 ont une expression explicite. Observons que si $(\boldsymbol{f}, g) \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ et $f_j = \operatorname{div} \mathbf{F}_j$, alors (3.82) admet une solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{\mathcal{C}}^\infty(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ qui peut s'écrire explicitement,

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{\partial \mathcal{O}_{ij}}{\partial x_k} * F_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathcal{E} * g), \\ \pi &= \frac{\partial \mathcal{P}_j}{\partial x_k} * F_{jk} + g - \mathcal{P}_1 * g + c_{jk} F_{jk} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}(\mathcal{E} * F_{jk}) + g - \frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{E} * g) + c_{jk} F_{jk}, \end{aligned} \tag{3.98}$$

où c_{jk} sont des réels.

Proposition 3.38 *Supposons que* $1 < p \leq 2$ *et soit* $(\boldsymbol{f}, g) \in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times L^p(\mathbb{R}^3)$ *satisfaisant* $\frac{\partial g}{\partial x_1} \in W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3)$*. Nous supposons, de plus que les conditions de compatibilités* (3.93) *et* (3.94) *sont satisfaites. Alors le couple* $(\boldsymbol{u}, \pi)$ *défini par* (3.98) *est un élément de* $\in \boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3) \times L^p(\mathbb{R}^3)$ *satisfaisant* $\nabla \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$, $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$.

Preuve : Puisque $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$ satisfait (3.93), alors grâce à l'isomorphisme (2.10), pour tout $j = 1, 2, 3$, il existe un vecteur $\mathbf{F}_j \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$f_j = \mathrm{div}\ \mathbf{F}_j.$$

Ainsi, en utilisant un résultat prouvé dans [4], pour tout $j, k = 1, 2, 3$, nous avons $\mathcal{E} * F_{jk} \in W_0^{2,p}(\mathbb{R}^3)$. Ceci entraîne que $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}(\mathcal{E} * F_{jk}) \in L^p(\mathbb{R}^3)$. Montrons que $\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{E} * g) \in L^p(\mathbb{R}^3)$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, nous avons

$$\begin{aligned}
\left| \langle \frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{E} * g), \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} \right| &= \left| \langle \mathcal{E} * g, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} \right| \\
&= \left| \langle g, \frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{E} * \varphi) \rangle_{L^p(\mathbb{R}^3) \times L^{p'}(\mathbb{R}^3)} \right| \\
&= \left| \langle \frac{\partial g}{\partial x_1}, \mathcal{E} * \varphi \rangle_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{2,p'}(\mathbb{R}^3)} \right|.
\end{aligned}$$

La condition de compatibilité (3.94) nous permet d'écrire

$$\left| \langle \frac{\partial g}{\partial x_1}, \mathcal{E} * \varphi \rangle_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{2,p'}(\mathbb{R}^3)} \right| = \left| \langle \frac{\partial g}{\partial x_1}, \mathcal{E} * \varphi + \lambda \rangle_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{2,p'}(\mathbb{R}^3)} \right|.$$

Il vient alors

$$\left| \langle \frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{E} * g), \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} \right| \leq \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3)} \inf_{\lambda \in \mathbb{P}_{[2-3/p']}} \| \mathcal{E} * \varphi + \lambda \|_{W_0^{2,p'}(\mathbb{R}^3)}.$$

Dans [4], il est prouvé que

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{P}_{[2-3/p']}} \| \mathcal{E} * \varphi \|_{W_0^{2,p'}(\mathbb{R}^3)} \leq C \| \varphi \|_{L^{p'}(\mathbb{R}^3)}.$$

Nous en déduisons alors que

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{E} * g) \right\|_{L^p} \leq C \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3)}.$$

La fonction π donnée dans l'expression (3.98) est donc bien définie et appartient à $L^p(\mathbb{R}^3)$. Occupons nous maintenant de l'expression de $\boldsymbol{u}$. Puisque $g \in L^p(\mathbb{R}^3)$, alors $\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathcal{E} * g) \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \subset W_{-1}^{0,p}(\mathbb{R}^3)$. Par ailleurs, pour tout $j, k = 1, 2, 3$, nous avons

$F_{jk} \in L^p(\mathbb{R}^3) \subset \bigcap_{\varepsilon>0} L^p_{-\varepsilon,\varepsilon}(\mathbb{R}^3)$. Utilisant un résultat prouvé dans [36] pour le cas $1 < p < 2$ et dans [20] pour le cas $p = 2$, nous avons $\frac{\partial \mathcal{O}_{ij}}{\partial x_k} * F_{jk} \in \bigcap_{\varepsilon>0} L^p_{-\frac{1}{2}-\varepsilon,\varepsilon}(\mathbb{R}^3)$. En particulier, $\frac{\partial \mathcal{O}_{ij}}{\partial x_k} * F_{jk}$ appartient à $W^{0,p}_{-1}(\mathbb{R}^3)$. Nous en déduisons que le vecteur $\boldsymbol{u}$ donné dans (3.98) est bien défini et appartient à $W^{0,p}_{-1}(\mathbb{R}^3)$. Le résultat d'existence et d'unicité donné par le théorème 3.34 i) nous montre que $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)$, $\nabla \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$. ■

La prochaine proposition sera utile pour établir un résultat de régularité. Elle nous servira aussi pour l'étude du problème d'Oseen dans un domaine extérieur (voir Chapitre 5).

Proposition 3.39 *Soient p et q deux réels tel que $1 < p, q < \infty$. Soient $r_2 = r_2(p,\gamma)$ et $r_2^* = r_2^*(q,\gamma)$ les réels définis dans la définition 3.7. On suppose $g = 0$ et $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \cap \boldsymbol{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant les conditions de compatibilité*

$$\begin{aligned} &\forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{P}_{[1-3/p']},\ \forall \boldsymbol{\mu} \in \mathbf{P}_{[1-3/q']} \\ &\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\lambda}\rangle_{\boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)\times \boldsymbol{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)} = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\mu}\rangle_{\boldsymbol{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)\times \boldsymbol{W}_0^{1,q'}(\mathbb{R}^3)} = 0. \end{aligned} \tag{3.99}$$

(i) *Si $1 < p, q < 4$, alors le problème* (3.82) *admet une unique solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in (\boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3) \cap \boldsymbol{L}^{r_2^*}(\mathbb{R}^3)) \times (L^p(\mathbb{R}^3) \cap L^q(\mathbb{R}^3))$, telle que $\nabla \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3) \cap \boldsymbol{L}^q(\mathbb{R}^3)$, $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \cap \boldsymbol{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$.*

(ii) *Si $1 < p < 4 \leq q < \infty$, alors le problème* (3.82) *admet une unique solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in (\boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3) \cap \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,q}(\mathbb{R}^3)) \times (L^p(\mathbb{R}^3) \cap L^q(\mathbb{R}^3))$ telle que $\nabla \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$, $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$.*

(iii) *Si $4 \leq p, q < \infty$, alors le problème* (3.82) *admet une solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in (\widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \cap \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,q}(\mathbb{R}^3)) \times (L^p(\mathbb{R}^3) \cap L^q(\mathbb{R}^3))$, unique à un élément de $\boldsymbol{\mathcal{N}}_0$ près.*

Preuve : Les idées de la preuve sont les mêmes que celles des preuves des théorèmes 3.31 et 3.34. Si $\boldsymbol{f}$ appartient à $\boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \cap \boldsymbol{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$ alors div $\boldsymbol{f} \in W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3) \cap W_0^{-2,q}(\mathbb{R}^3)$. Par (3.99), pour tout $\lambda \in \mathbb{P}_{[2-3/p']}$ et pour tout $\mu \in \mathbb{P}_{[2-3/q']}$ nous avons

$$\langle \operatorname{div} \boldsymbol{f}, \lambda\rangle_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3)\times W_0^{2,p'}(\mathbb{R}^3)} = \langle \operatorname{div} \boldsymbol{f}, \mu\rangle_{W_0^{-2,q}(\mathbb{R}^3)\times W_0^{2,q'}(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

L'isomorphisme de l'opérateur de Laplace (3.97), nous donne l'existence d'une unique fonction $\pi \in L^p(\mathbb{R}^3)$ et d'une unique fonction $\psi \in L^q(\mathbb{R}^3)$ telles que

$$\Delta\pi = \Delta\psi = \text{div}\, \boldsymbol{f}.$$

La fonction $\pi - \psi$ étant harmonique est donc un polynôme. Mais le fait que $\pi \in L^p(\mathbb{R}^3)$ et $\psi \in L^q(\mathbb{R}^3)$ entraîne que $\pi = \psi$ et, par conséquent, $\pi \in L^p(\mathbb{R}^3) \cap L^q(\mathbb{R}^3)$. Ainsi $\boldsymbol{f} - \nabla\pi \in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \cap \boldsymbol{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$ et satisfait

$$\begin{aligned} &\forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{P}_{[1-3/p']}, \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{P}_{[1-3/q']}, \\ &\langle \boldsymbol{f} - \nabla\pi, \boldsymbol{\lambda} >_{\boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times \boldsymbol{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)} = \langle \boldsymbol{f} - \nabla\pi, \boldsymbol{\mu} >_{\boldsymbol{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3) \times \boldsymbol{W}_0^{1,q'}(\mathbb{R}^3)} = 0. \end{aligned}$$

Nous allons à présent utiliser la proposition 3.23 et nous avons pour cela trois cas.
(i) Si $1 < q < p < 4$, alors il existe un unique $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^{r_2} \cap \boldsymbol{L}^{r_2^*}(\mathbb{R}^3)$, tel que $\nabla \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3) \cap \boldsymbol{L}^q(\mathbb{R}^3)$, $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \cap \boldsymbol{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant

$$-\Delta \boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} = \boldsymbol{f} - \nabla\pi. \tag{3.100}$$

(ii) Si $1 < q < 4 \leq p < \infty$, il existe un unique $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^{r_2^*}(\mathbb{R}^3) \cap \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{L}^q(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant (3.100).
(iii) $4 \leq p, q < \infty$, alors il existe $\boldsymbol{u} \in \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \cap \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,q}(\mathbb{R}^3)$, unique à un vecteur $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^3$ près, solution de (3.100).
Maintenant, dans tous les cas, div $\boldsymbol{u} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ vérifie

$$-\Delta(\text{div}\, \boldsymbol{u}) + \frac{\partial(\text{div}\, \boldsymbol{u})}{\partial x_1} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3.$$

D'où div $\boldsymbol{u}$ est un polynôme de $L^p(\mathbb{R}^3)$, c'est-à-dire div $\boldsymbol{u} = 0$. ■

Remarque 3.40 Si nous supposons $g \neq 0$, la proposition précédente reste vraie en prenant $g \in L^p(\mathbb{R}^3) \cap L^q(\mathbb{R}^3)$, telle que $\frac{\partial g}{\partial x_1} \in W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3) \cap W_0^{-2,q}(\mathbb{R}^3)$ et satisfaisant les conditions de compatibilité

$$\forall \lambda \in \mathbb{P}_{[2-3/q']}, \quad \langle \frac{\partial g}{\partial x_1}, \lambda \rangle_{W_0^{-2,q}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{2,q'}(\mathbb{R}^3)} = 0,$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{P}_{[2-3/p']}, \quad \langle \frac{\partial g}{\partial x_1}, \lambda \rangle_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{2,p'}(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Nous abordons maintenant la résolution du problème d'Oseen dans des espaces de Sobolev avec poids anisotropes. Comme nous ne disposons pas d'une famille complète d'isomorphismes de l'opérateur laplacien dans des espaces avec poids anisotropes, nous recherchons des solutions explicites. Rappelons pour cela quelques résultats sur la solution fondamentale. On suppose $p > 2$ et $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Alors pour tout $\ell = 1, 2, 3$, $\mathcal{P}_\ell * f_\ell \in L^p_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ et $\nabla(\mathcal{P}_\ell * f_\ell) \in \boldsymbol{L}^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. En d'autres termes, la fonction $\pi = \mathcal{P}_\ell * f_\ell$ appartient à $Y^{1,p}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. De plus, nous avons l'estimation

$$\|\pi\|_{L^p_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla \pi\|_{\boldsymbol{L}^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|\boldsymbol{f}\,\|_{\boldsymbol{L}^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.101}$$

Rappelons que π satisfait

$$\Delta \pi = \operatorname{div} \boldsymbol{f}.$$

Grâce à la proposition 2.40, nous pouvons améliorer les estimations de (3.101).

Proposition 3.41 *On suppose $p > 2$ et $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Alors $\pi = \mathcal{P}_\ell * f_\ell$ est bien défini et appartient à $L^p(\mathbb{R}^3)$, $\nabla \pi$ appartient à $\boldsymbol{L}^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ et nous avons l'estimation*

$$\|\pi\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla \pi\|_{\boldsymbol{L}^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|\boldsymbol{f}\,\|_{\boldsymbol{L}^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.102}$$

En d'autres termes, π appartient à $X^{1,p}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$.

Nous pouvons maintenant établir le résultat suivant :

Théorème 3.42 *On suppose $p > 2$ et soit $(\boldsymbol{f}, g) \in \boldsymbol{L}^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3) \times L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\nabla g \in \boldsymbol{L}^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Alors le problème d'Oseen (3.82) admet une unique solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{L}^p_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3) \times X^{1,p}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, défini par (3.84), telle que $\nabla \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^p_{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, $\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x_i \partial x_j} \in \boldsymbol{L}^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$*

et $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{L}^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. *De plus, nous avons l'estimation*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^p_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^p_{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x_i \partial x_j}\right\|_{\boldsymbol{L}^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1}\right\|_{\boldsymbol{L}^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \|\pi\|_{X^{1,p}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}$$
$$\leq C\left(\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla g\|_{\boldsymbol{L}^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}\right). \tag{3.103}$$

Preuve : D'après (2.29) et (2.30), l'espace, $\boldsymbol{L}^p_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3) \times X^{1,p}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ ne contient pas de polynômes . L'unicité de la solution est donc prouvée. Soit maintenant $(\boldsymbol{f}, g) \in \boldsymbol{L}^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3) \times L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\nabla g \in \boldsymbol{L}^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. D'après la proposition 3.41, $\pi = \mathcal{P}_\ell * f_\ell + g - \mathcal{P}_1 * g$ appartient à $X^{1,p}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Nous savons aussi (voir [36]) que, pour tout $i, j = 1, 2, 3$, nous avons $\mathcal{O}_{ij} * f_j \in \bigcap_{\varepsilon>0} L^p_{-\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Il vient alors que $u_i = \mathcal{O}_{ij} * f_j + \mathcal{P}_i * g$ appartient à $\bigcap_{\varepsilon>0} L^p_{-\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Par ailleurs, le fait que $\pi \in X^{1,p}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},}(\mathbb{R}^3)$ entraîne que $\boldsymbol{f} - \nabla\pi \in \boldsymbol{L}^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Le théorème 3.26 nous donne l'existence d'un unique $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^p_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ tel que, $\nabla \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^p_{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, pour tout $i, j = 1, 2, 3$, $\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial x_i \partial x_j} \in \boldsymbol{L}^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{L}^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant

$$-\Delta \boldsymbol{v} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i} = \boldsymbol{f} - \nabla\pi.$$

Cela implique que $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in \bigcap_{\varepsilon>0} \boldsymbol{L}^p_{-\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ et

$$-\Delta \boldsymbol{w} + \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x_1} = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3.$$

D'après la proposition 3.6, $\boldsymbol{w}$ est un polynôme de $\boldsymbol{L}^p_{-\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, avec $\varepsilon > 0$ fixé. En choisissant ε suffisamment petit, par (2.29), nous en concluons que $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$. L'estimation (3.103) se déduit facilement des estimations (3.102) et (3.67). ■

Ce théorème et les inégalités de Hardy établies dans le chapitre 2, nous permettent de résoudre le problème d'Oseen pour des données moins régulières.

Théorème 3.43 *On suppose* $p > 3$ *et* $(\boldsymbol{f}, g) \in \boldsymbol{Y}^{-1,p}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3) \times L^p_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. *Alors, le problème* (3.82) *admet une solution unique* $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{L}^p_{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3) \times L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, *telle que,* *pour tout* $i = 1, 2, 3$, $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i} \in \boldsymbol{L}^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ *et* $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{Y}^{-1,p}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. *De plus, nous avons*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^p_{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i}\right\|_{\boldsymbol{L}^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1}\right\|_{\boldsymbol{Y}^{-1,p}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \|\pi\|_{L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}$$
$$\leq C\left(\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{Y}^{-1,p}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \|g\|_{L^p_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}}\right).$$

Preuve : L'espace $\boldsymbol{L}^p_{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3) \times L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ ne contient pas de polynômes et donc l'unicité de la solution est prouvée. Supposons maintenant $p > 3$ et $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{Y}^{-1,p}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Alors, d'après la remarque 2.29, pour tout $\ell = 1, 2, 3$, il existe $\mathbf{F}_\ell \in \boldsymbol{L}^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ tel que

$$f_\ell = \operatorname{div} \mathbf{F}_\ell.$$

Définissons alors le couple $(\boldsymbol{u}, \pi)$ par l'expression (3.98). Puisque $p > 3$ et $g \in L^p_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, alors pour tout $i = 1, 2, 3$, (voir [36]) $\mathcal{P}_i * g$ appartient à $L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ avec l'estimation

$$\|\mathcal{P}_i * g\|_{L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|g\|_{L^p_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}.$$

En utilisant aussi la proposition 3.41, la fonction π appartient à $L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Par ailleurs, d'après [36], nous savons aussi que $\frac{\partial \mathcal{O}_{ij}}{\partial x_k} * F_{jk}$ appartient à $L^p_{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ et satisfait

$$\left\|\frac{\partial \mathcal{O}_{ij}}{\partial x_k} * F_{jk}\right\|_{L^p_{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|F_{jk}\|_{L^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}.$$

Nous en déduisons que $\boldsymbol{u}$ appartient à $\boldsymbol{L}^p_{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Ensuite, le résultat d'existence et d'unicité du théorème 3.27 nous permet de conclure que $\nabla \boldsymbol{u}$ appartient à $\boldsymbol{L}^p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1}$ appartient à $\boldsymbol{Y}^{-1,p}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. ■

3.4.3 Un résultat de régularité

Le but de ce paragraphe est d'établir un résultat de régularité. Dans un souci de clarté, nous nous contentons du cas homogène, c'est-à-dire , $g = 0$. Nous allons supposer que la donnée $\boldsymbol{f}$ est plus régulière que dans le théorème 3.34.

Théorème 3.44 *Soient* p *et* q *deux réels tels que* $1 < q < \infty$, $p > \frac{3}{2}$ *et* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{3}$. *Soient* $r_2 = r_2(p, \gamma)$ *et* $r_2^* = r_2^*(q, \gamma)$ *les réels donnés dans la définition 3.7 et* *supposons $g = 0$. Alors, pour toute fonction $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}_1^{0,p}(\mathbb{R}^3) \cap \boldsymbol{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant*

$$\forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{P}_{[1-3/q']}, \quad \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\lambda} \rangle_{\boldsymbol{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3) \times \boldsymbol{W}_0^{1,q'}(\mathbb{R}^3)} = 0, \tag{3.104}$$

le problème (3.82) admet une unique solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{L}^{r_2^*}(\mathbb{R}^3) \times (L^p(\mathbb{R}^3) \cap L^q(\mathbb{R}^3))$, telle que $\nabla \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^q(\mathbb{R}^3)$, $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$. De plus

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \text{ et } \nabla \pi \in \boldsymbol{W}_1^{0,p}(\mathbb{R}^3), \tag{3.105}$$

et on a l'estimation

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^{r_2}} + \|\nabla \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^q(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \right\|_{\boldsymbol{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{\boldsymbol{W}_1^{0,p}(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \right\|_{\boldsymbol{W}_1^{0,p}(\mathbb{R}^3)}$$
$$+ \|\pi\|_{W_1^{1,p}(\mathbb{R}^3)} + \|\pi\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} \leq C(\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_1^{0,p}(\mathbb{R}^3)} + \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)}). \tag{3.106}$$

Enfin, nous avons les propriétés suivantes :
(i) *Si $1 < p < 4$, alors $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\nabla \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$ avec l'estimation*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)} \leq C(\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_1^{0,p}(\mathbb{R}^3)} + \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)}). \tag{3.107}$$

(ii) *Si $4 \leq p < \infty$, alors $\boldsymbol{u} \in \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$, avec l'estimation*

$$\inf_{\mathbf{K} \in \mathbb{R}^3} \|\boldsymbol{u} + \mathbf{K}\|_{\widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \leq C(\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_1^{0,p}(\mathbb{R}^3)} + \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)}). \tag{3.108}$$

Preuve : Remarquons tout d'abord que, puisque $p > \frac{3}{2}$, alors

$$\mathbb{P}_{[1-3/p']} = \{\mathbf{0}\}.$$

De plus, d'après la définition de q, nous avons $1 < q < 3$. Maintenant, si $\boldsymbol{f}$ appartient à $\boldsymbol{W}_1^{0,p}(\mathbb{R}^3) \cap \boldsymbol{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$ alors

$$\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \cap \boldsymbol{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3).$$

Par conséquent, d'après la proposition 3.39 il existe un unique $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{L}^{r_2^*}(\mathbb{R}^3) \times (L^p(\mathbb{R}^3) \cap L^q(\mathbb{R}^3))$, telle que $\nabla \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^q(\mathbb{R}^3)$, $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$. De plus, cette solution vérifie :
(i) Si $1 < p < 4$, alors $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^{r_2} \cap \boldsymbol{L}^{r_2^*}(\mathbb{R}^3)$, tel que $\nabla \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3) \cap \boldsymbol{L}^q(\mathbb{R}^3)$, $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \cap \boldsymbol{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$.
(ii) Si $4 \leq p < \infty$, alors $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^{r_2^*}(\mathbb{R}^3) \cap \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{L}^q(\mathbb{R}^3)$ et $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$.
Il nous reste maintenant à montrer (3.105) dans les deux cas. Puisque $\boldsymbol{f}$ appartient à $\boldsymbol{W}_1^{0,p}(\mathbb{R}^3)$, alors div $\boldsymbol{f}$ appartient à $W_1^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$. Par ailleurs, comme $p > \frac{3}{2}$, les polynômes de $\mathbb{P}_{[2-3/p']}$ sont au plus des constantes, ce qui implique que

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f} \in W_1^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \perp \mathbb{P}_{[2-3/p']}.$$

De plus, remarquons que $\frac{3}{p'} \neq 1$. Dans ce cas, l'opérateur de Laplace suivant est un isomorphisme (voir théorème 9.9 de [6])

$$\Delta \, : \, W_1^{1,p}(\mathbb{R}^3) \to W_1^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \perp \mathbb{P}_{[2-3/p']}.$$

Il existe alors une fonction unique $\psi \in W_1^{1,p}(\mathbb{R}^3) \subset L^p(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$\Delta \psi = \operatorname{div} \boldsymbol{f}.$$

La fonction $\pi - \psi$ est donc un polynôme harmonique de $L^p(\mathbb{R}^3)$, c'est-à-dire $\pi = \psi$. Ceci implique que $\nabla \pi \in \boldsymbol{W}_1^{0,p}(\mathbb{R}^3)$ et $\boldsymbol{f} - \nabla \pi$ est un élément de $\boldsymbol{W}_1^{0,p}(\mathbb{R}^3) \cap \boldsymbol{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3)$ qui satisfait

$$\forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{P}_{[1-3/q']}, \quad \langle \boldsymbol{f} - \nabla \pi, \boldsymbol{\lambda} \rangle_{\boldsymbol{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^3) \times \boldsymbol{W}_0^{1,q'}(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Le théorème 3.28 nous montre alors que $\boldsymbol{u}$ satisfait (3.105). ■

Remarque 3.45 Si nous supposons $g \neq 0$, le théorème précédent reste vrai en prenant $g \in L^p(\mathbb{R}^3) \cap L^q(\mathbb{R}^3)$, telle que $\frac{\partial g}{\partial x_1} \in W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3) \cap W_0^{-2,q}(\mathbb{R}^3)$ et satisfaisant les conditions de compatibilité

$$\forall \lambda \in \mathbb{P}_{[2-3/\mathrm{q}']}, \quad \langle \frac{\partial g}{\partial x_1}, \lambda \rangle_{\mathrm{W}_0^{-2,\mathrm{q}}(\mathbb{R}^3)\times \mathrm{W}_0^{2,\mathrm{q}'}(\mathbb{R}^3)} = 0,$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{P}_{[2-3/\mathrm{p}']}, \quad \langle \frac{\partial g}{\partial x_1}, \lambda \rangle_{\mathrm{W}_0^{-2,\mathrm{p}}(\mathbb{R}^3)\times \mathrm{W}_0^{2,\mathrm{p}'}(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Chapitre 4

Le problème stationnaire d'Oseen dans $\mathbb{R}^n$

Dans ce chapitre, nous étudions à nouveau le problème d'Oseen, mais nous le posons maintenant dans $\mathbb{R}^n$. Il s'agit alors de résoudre le système suivant :

$$\begin{aligned} -\Delta \boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi = \boldsymbol{f} \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^n, \\ \text{div } \boldsymbol{u} = h \quad \text{dans } \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{4.1}$$

L'objectif ici est d'étendre les résultats des théorèmes 3.31 et 3.34. Plus précisément, nous considérons des forces extérieures $\boldsymbol{f}$ appartenant à $\boldsymbol{W}_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{Z}$. Comme dans le chapitre précédent, nous commençons d'abord par résoudre le modèle scalaire et nous utilisons ensuite les résultats obtenus pour résoudre (4.1). Dans une première partie, nous analysons les relations qui lient le modèle scalaire et le système (4.1).

ON THE STEADY OSEEN PROBLEM IN THE WHOLE SPACE

TAHAR ZAMÈNE BOULMEZAOUD* AND ULRICH JERRY RAZAFISON †

Abstract. We deal with Oseen's equations in the whole space. A class of existence, uniqueness and regularity results for both the scalar and the vectorial equations are given. The use of weighted Sobolev spaces for describing the growth or the decay of functions at infinity is at the heart of our approach.

Key words. Oseen's equations, weighted Sobolev spaces, unbounded domains, fluid mechanics.

AMS subject classifications. 76D03, 35Qxx, 35N05, 35A05, 35A08.

1. Introduction. The Oseen's equations are a linearized version of the Navier-Stokes equations describing a viscous and incompressible fluid in which a small body is moving. The purpose of this paper is to study the Oseen problem in the whole space $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} -\nu\Delta \boldsymbol{u} + k\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} + \nabla\pi = \boldsymbol{f} \ \text{ in } \mathbb{R}^n, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = h \ \text{ in } \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Here the unknowns are the velocity vector $\boldsymbol{u}$ of the fluid and the pressure π. The data are the viscosity ν of the fluid, the external force $\boldsymbol{f}$, the function h and the positive real k. System (1.1) was proposed by Oseen (see [22]) in order to remove some physical paradoxes of the Stokes system which corresponds to the case $k = 0$. One of the first works devoted to these equations is due to Finn [13]. Specifically, Finn treated the Oseen's equations in a three dimensional exterior domains when $(1 + |\boldsymbol{x}|)\boldsymbol{f}$ is square integrable and $h = 0$. He proved the existence of solution $\boldsymbol{u}$ such that $(1 + |\boldsymbol{x}|)^{-1}\boldsymbol{u}$ is square integrable. Farwig in [12] proved, among other results, the existence of a solution $(\boldsymbol{u}, \pi)$ of (1.1) when $\boldsymbol{f} \in L^p(\mathbb{R}^n)^n$ and $h \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. In that case the solution $(\boldsymbol{u}, \pi)$ satisfies $\boldsymbol{u} \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)^n$, $\partial_i\partial_j u_k \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\partial_i\pi \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2, ..., n$. In [14] Galdi stated that if $\boldsymbol{f} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)^n$, $h \in W^{m+1,p}(\mathbb{R}^n)$, $m \geq 0$, then the problem (1.1) has a solution in $W^{m+2,p}_{loc}(\mathbb{R}^n) \times W^{m+1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$. In [10] Farwig investigates the system (1.1), set in three dimensional exterior domains, in anisotropically weighted L^2 spaces. The use of anisotropic weights seems to be a natural approach because of the anisotropy introduced by the term $\partial_1 u$. However, such an approach contains some serious technical complications. The reader can refer to [19], [23] [11] [10], [6],

*Laboratoire Jacques-Louis Lions Université Pierre et Marie Curie, 75252, Paris cedex 05 (boulmeza@ann.jussieu.fr)

†Laboratoire de Mathématiques Appliquées, Université de Pau et des pays de l'Adour, 64000, Pau, France, (ulrich.razafison@univ-pau.fr)

[5], [4] for existence results in anisotropic weighted spaces. To our knowledge, most of the existing results in the literature concern the case $\boldsymbol{f} \in L^p(\mathbb{R}^n)^n$ or are around that case. Several questions concerning the existence, the uniqueness and regularity of the solution remain not treated, especially when the data $\boldsymbol{f}$ and h are slowly decreasing or have a polynomial behavior at infinity. Among the results we present in this paper, we shall prove that if $\boldsymbol{f} = (f_i, ..., f_n)$ and h satisfies the conditions

$$(1 + |\boldsymbol{x}|^2)^{(|\mu|-m)/2} \partial^\mu f_k \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ for } |\mu| \leq m,$$

$$(1 + |\boldsymbol{x}|^2)^{(|\mu|-m-1)/2} \partial^\mu h \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ for } |\mu| \leq m+1,$$

for some integer $m \geq 0$, then Problem (1.1) admits a solution $(\boldsymbol{u}, \pi)$, unique up to a class of polynomials, and satisfying

$$(1 + |\boldsymbol{x}|^2)^{(|\mu|-m-2)/2} \partial^\mu u_k \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ for } |\mu| \leq m+2,$$

$$(1 + |\boldsymbol{x}|^2)^{(|\mu|-m-1)/2} \partial^\mu \pi \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ for } |\mu| \leq m+1.$$

In all the paper, we deal with following problem obtained from (1.1) by means of a simple scaling argument

$$\begin{aligned} -\Delta \boldsymbol{u} + 2\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi = \boldsymbol{f} \ \text{ in } \mathbb{R}^n, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = h \ \text{ in } \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{1.2}$$

We are interested also in the scalar equation

$$-\Delta u + 2\frac{\partial u}{\partial x_1} = f \ \text{ in } \mathbb{R}^n, \tag{1.3}$$

which is intimately linked to the system (1.2). The relation between this scalar equation and the general vectorial system (1.2) as well as the relation between their fundamental solutions are discussed in section 3 hereafter. Observe for the moment that Oseen's system (1.2) can be formally decomposed into two problems: a Laplace equation for the pressure

$$\Delta \pi = \operatorname{div} \boldsymbol{f} + \Delta h - 2\frac{\partial h}{\partial x_1}, \tag{1.4}$$

and a scalar equation on each component of the velocity

$$-\Delta u_i + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_1} = \tilde{f}_i, \tag{1.5}$$

where $\tilde{f}_i = f_i - \dfrac{\partial \pi}{\partial x_i}$. Consequently, one must choose a functional framework which allows the solving of *both* the equations (1.4) and (1.5) for several behaviors at infinity.

The use of weighted Sobolev spaces turned out to be convenient for treating problems in unbounded domains, and consequently seems to be the natural framework for treating Problem (1.4) (see for instance [3]). The main difficulty here lies on the choice of the *weights* since the convective term $\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1}$ in Equation (1.5) induces an anisotropic behavior of the velocity, while the pressure keeps an isotropic behavior as in the Stokes problem. Another difficulty is due to divergence condition div $\boldsymbol{u} = h$ which complicates seriously the problem. In section 3 we expose how the system (1.2) can be treated by solving only the scalar equation (1.3) is a such a way that the divergence condition is automatically fulfilled.

For all these reasons, we shall treat in a first time and independently the scalar equation (1.3). We prove that there exists at least two kinds of solutions; tempered solutions, which are tempered distributions, and quasi-tempered solutions which are not necessarily tempered distributions. Only tempered solution are useful for solving the vectorial system (1.2).

In a forthcoming paper, we will use our present results in order to solve the Oseen equations in an exterior domain.

In the sequel, we set

$$T = -\Delta\ + 2\frac{\partial}{\partial x_1}$$

and

$$T^* = -\Delta\ - 2\frac{\partial}{\partial x_1}$$

The remaining of this paper is organized as follows

- Section 2 is devoted to a brief presentation of some basic definitions and properties of weighted Sobolev spaces, used as a functional framework for solving both the scalar and the vectorial Oseen equations.
- In Section 3, the relation between the scalar equation (1.5) and the vectorial system (1.2) is discussed. Some properties of their fundamental solutions are showed.
- Section 4 deals with the scalar equation (1.5). Existence of solutions and the well posedness of the problem are treated in several functional frameworks.
- Section 5 is devoted to the study of the vectorial system (1.2). After giving a characterization of the kernel of the system, we prove a complete class of existence, uniqueness and regularity results.

2. Notations and functional framework.

2.1. Notations. In the sequel, $n \geq 2$ is an integer and p is a real in the interval $]1, +\infty[$. The dual number of p denoted p' is defined by the relation $1/p + 1/p' = 1$. We use bold characters for vector functions or distributions. For $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

we set

$$r = |\boldsymbol{x}| = (x_1^2 + ... + x_n^2)^{1/2}.$$

Given a real α, we denote by $[\alpha]$ its integer part. For any $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}_k$ stands for the space of polynomial of degree lower then k and $\mathbb{P}_k^{\Delta}$ the subspace of harmonic polynomials of $\mathbb{P}_k$. If k is a negative integer, we set by convention $\mathbb{P}_k = \{0\}$. We recall that $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ is the well-known space of $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ functions with a compact support and $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ its dual space, namely the space of distributions. We denote by $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ the Schwartz space of functions $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ with rapid decrease at infinity, by $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ its dual, i. e. the space of tempered distributions, and by $\mathcal{S}_1'(\mathbb{R}^n)$ be the space of all the distributions $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ such that $e^{-x_1}u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

The Fourier transform of any complex valued Lebesgue integrable function u $\mathbb{R} :\mapsto \mathbb{C}$ is defined by

$$\hat{u}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} u(\boldsymbol{x}) dx,$$

where $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$. If $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ then its Fourier distribution $\hat{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ is defined by $\langle \hat{u}, \phi \rangle = \langle u, \hat{\phi} \rangle$ for any function $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. The Fourier transform is an invertible mapping of $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ into $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ and from $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ into $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Given a Banach space B with its dual space B' and a closed subspace X of B, we denote by $B' \perp X$ the subspace of B' orthogonal to X, namely

$$B' \perp X = \{f \in B', \forall v \in X, \langle f, v \rangle = 0\} = (B/X)'.$$

For any real $\alpha > 0$, the Bessel kernel g_α is defined as the function whose Fourier transform is

$$\hat{g}_\alpha(\boldsymbol{\xi}) = (2\pi)^{-n/2}(1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{-\alpha/2}.$$

The kernel g_α can be expressed in terms of Bessel functions by the formula

$$g_\alpha(\boldsymbol{x}) = \gamma_\alpha |\boldsymbol{x}|^{(\alpha-n)/2} K_{(n-\alpha)/2}(|\boldsymbol{x}|).$$

with $\gamma_\alpha = (2\pi)^{-n/2} 2^{-\alpha/2+1} \Gamma(\alpha/2)$. Here Γ denotes the classical gamma function and K_λ denotes the modified Bessel function of third kind. Since for any integer $m \geq 0$, we know that

$$K_{m+1/2}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2t}} e^{-t} \sum_{k=0}^{m} \frac{(m+k)!}{k!(m-k)!} \frac{1}{(2t)^k},$$

we deduce an explicit expression of g_α when $\alpha < n$ and $n - \alpha$ is odd. In particular if $\alpha = 2$ and $n = 3$ we get

$$g_2(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}|} e^{-|\boldsymbol{x}|}.$$

More generally, we have

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \quad |g_\alpha(\boldsymbol{x})| \leq \frac{c_\alpha}{|\boldsymbol{x}|^{n-\alpha}(1+|\boldsymbol{x}|)^{(\alpha+1-n)/2}} e^{-|\boldsymbol{x}|}. \tag{2.1}$$

Hence,

$$g_\alpha \in W_s^{0,p}(\mathbb{R}^n) \text{ for } s \in \mathbb{R}, \ 1 \leq p \leq +\infty \text{ and } (n-\alpha)p < n. \tag{2.2}$$

In the sequel, the notation $a \lesssim b$ (resp. $a \simeq b$) means that there exists a constant c not depending on the functions such that $a \leq cb$.

2.2. Weighted Sobolev spaces. Some basic results. In the sequel, ρ denotes the basic weight defined by

$$\rho(\boldsymbol{x}) = (1+|\boldsymbol{x}|^2)^{1/2}. \tag{2.3}$$

For $1 \leq p \leq +\infty$, $L^p(\mathbb{R}^n)$ will denote the space of (equivalence classes of) all measurable functions that are p^{th} power integrable on $\mathbb{R}^n$. This space is equipped with the norm

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Given two integer $m \geq 0$ and $k \in \mathbb{Z}$, we consider the weighted spaces

$$\begin{aligned}
W^{m,p}(\mathbb{R}^n) &= \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n);\ \forall \mu \in \mathbb{N}^n, |\mu| \leq m,\ \partial^\mu u \in L^p(\mathbb{R}^n)\} \\
V_k^{m,p}(\mathbb{R}^n) &= \big\{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n);\ \forall \mu \in \mathbb{N}^n, |\mu| \leq m,\ \rho^k \partial^\mu u \in L^p(\mathbb{R}^n)\big\} \\
W_k^{m,p}(\mathbb{R}^n) &= \Big\{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n);\ \forall \mu \in \mathbb{N}^n, |\mu| \leq m,\ \rho^{k-m+|\mu|} \partial^\mu u \in L^p(\mathbb{R}^n)\Big\} \\
\mathcal{H}_k^{m,p}(\mathbb{R}^n) &= \big\{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n);\ \forall \mu \in \mathbb{N}^n, |\mu| \leq m, e^{-x_1} \rho^k \partial^\mu u \in L^p(\mathbb{R}^n)\big\}.
\end{aligned}$$

These spaces are equipped with the norms

$$\begin{aligned}
\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} &= (\sum_{|\mu| \leq m} \|\partial^\mu u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)})^{1/p}. \\
\|u\|_{V_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)} &= (\sum_{|\mu| \leq m} \|\rho^k \partial^\mu u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)})^{1/p}. \\
\|u\|_{W_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)} &= (\sum_{|\mu| \leq m} \|\rho^{k-m+|\mu|} \partial^\mu u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)})^{1/p}. \\
\|u\|_{\mathcal{H}_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)} &= (\sum_{|\mu| \leq m} \|\rho^k e^{-x_1} \partial^\mu u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)})^{1/p}.
\end{aligned}$$

The spaces $W^{m,p}(\mathbb{R})$, $W_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, $V_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ and $\mathcal{H}_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ are Banach spaces. The space $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ is dense in $W^{m,p}(\mathbb{R})$, in $V_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ and in $W_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ (see, e. g., Hanouzet [18]). We denote by $W^{-m,p'}(\mathbb{R}^n)$, $V_{-k}^{-m,p'}(\mathbb{R}^n)$ and $W_{-k}^{-m,p'}(\mathbb{R}^n)$ the dual spaces of $W^{m,p}(\mathbb{R})$, $W_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ and $V_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ respectively. They are spaces of tempered distributions. It is quite clear that the local properties of the spaces $W_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ and

$V_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ coincide with those of the Sobolev space $W_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. We have also the obvious identities

$$V_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n),\ V_k^{0,p}(\mathbb{R}^n) = W_k^{0,p}(\mathbb{R}^n).$$

The spaces $W_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ will play a particular role in this paper. For a detailed study of the spaces $W_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, we can refer to [3], [18] and [20]. In this paper we need the semi-norm

$$|u|_{W_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{|\mu|=m} \|\rho^k \partial^\mu u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)^{1/p}.$$

and the Green's formula

$$\forall u \in W_k^{1,p}(\mathbb{R}^n), \forall v \in W_{-k+1}^{1,p'}(\mathbb{R}^n),\ \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_{\mathbb{R}^n} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \tag{2.4}$$

where $1 \leq i \leq n$, $1 < p < +\infty$ and $k \in \mathbb{Z}$. We have also the inclusion

$$\mathbb{P}_\ell \subset W_k^{m,p}(\mathbb{R}^n), \quad \text{if } \ell < m - n/p - k. \tag{2.5}$$

In what follows, the space $W_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ will be considered often in the case

$$\frac{n}{p} + k \notin \{1, ..., m\}. \tag{2.6}$$

Indeed, this condition is sufficient to get some Hardy's type inequalities. Namely, if (2.6) is fulfilled, then (see [3])

$$\forall u \in W_k^{m,p}(\mathbb{R}^n), \quad \inf_{\lambda \in \mathbb{P}_{j'}} \|u + \lambda\|_{W_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \lesssim |u|_{W_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)},$$

where $j' = \min(m-1, j)$ and $j = -[k+n/p-m]-1$ is the highest degree of polynomials contained in $W_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. If (2.6) does not hold, namely if $\dfrac{n}{p} + k \in \{1, ..., m\}$, then similar inequalities can be obtained by a adding a logarithmic factor to the weights in the definition of $W_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ (see [3]). In that case, all the forthcoming results remains valid provided some minor corrections are given.

We have the following algebraic and topological inclusions ($m \geq 0$)

$$V_k^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset W_k^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset W_{k-1}^{m-1,p}(\mathbb{R}^n) \subset ... \subset W_{k-m}^{0,p}(\mathbb{R}^n). \tag{2.7}$$

For any $\mu \in \mathbb{N}^n$, the mapping

$$u \in W_k^{m,p}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \partial^\mu u \in W_k^{m-|\mu|,p}(\mathbb{R}^n) \tag{2.8}$$

is continuous (see [18]).

The spaces $W_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ turned out to be adequate for treating several elliptic problems in unbounded regions of spaces and for several kinds of behavior at infinity (see [3], [2], [7, 8], [16, 17]). Let us recall some basic but fundamental results concerning the Laplace equation in whole the space (see [3]):

THEOREM 2.1. *Let $m \in \mathbb{Z}$ and $\ell \in \mathbb{N}^*$.*

1. If $n/p \notin \{1, ..., \ell+1\}$, then the operator

$$\Delta \; : \; W_{m-\ell}^{m+1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{P}^{\Delta}_{[\ell+1-n/p]} \mapsto W_{m-\ell}^{m-1,p}(\mathbb{R}^n),$$

is an isomorphism.

2. If $n/p' \notin \{1, ..., \ell+1\}$, then the operator

$$\Delta \; : \; W_{m+\ell}^{m+1,p}(\mathbb{R}^n) \mapsto W_{m+\ell}^{m-1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}^{\Delta}_{[\ell+1-n/p']}$$

is an isomorphism.

3. If $n/p' \neq 1$ and $n/p \neq 1$, then the operator

$$\Delta \; : \; W_{m}^{m+1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}_{[1-n/p]} \mapsto W_{m}^{m-1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}_{[1-n/p']}$$

is an isomorphism.

3. Relation between the scalar and the vectorial Oseen's equations. Properties of the fundamental solutions. Our purpose here is to discuss briefly the relation between the scalar equation (1.3) and the vectorial Oseen's system (1.2). Indeed, the difference between the equation (1.3) and the system (1.2) seems to reinforced by the presence of the pressure π and the divergence equation div $\boldsymbol{u} = h$. This difference appears also in terms of the fundamental solutions. However, there is a simple method for solving the system (1.2) by solving the equation (1.3) and the Laplace equation, in such a way that the divergence condition is automatically fulfilled. This method reveals that the fundamental solutions are intimately linked by a simple relation.

Formally, let θ and $\boldsymbol{s} = (s_1, ..., s_n)$ be solution of the Laplace equations

$$\Delta\theta = h \text{ in } \mathbb{R}^n, \; \Delta\boldsymbol{s} = \boldsymbol{f} + \nabla(h - 2\frac{\partial\theta}{\partial x_1}) \text{ in } \mathbb{R}^n.$$

Consider in addition a vector function $\boldsymbol{\Phi} = (\Phi_1, ..., \Phi_n)$ whose components Φ_i, $1 \leq i \leq n$, are solution of the scalar equations $T\Phi_i = s_i$. Then the pair $(\boldsymbol{u}, \pi)$ defined by

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \nabla\theta + \Delta\boldsymbol{\Phi} - \nabla(\text{div } \boldsymbol{\Phi}), \\ \pi &= \text{div } \boldsymbol{s}, \end{aligned}$$

is solution of the system (1.2). In other words, the existence of solutions of (1.2) can be obtained by treating the Laplace equation and the scalar equation (1.3).

On the other hand, concerning the fundamental solution $(\mathcal{O}_{i,j}, e_j)$ of (1.2) we know that

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{ij} &= (\delta_{ij}\Delta - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j})\varphi \\ e_j &= \frac{\partial}{\partial x_j}(-\Delta + 2\frac{\partial}{\partial x_1})\varphi. \end{aligned}$$

Here, $i, j = 1, ..., n$ and φ satisfies $T\varphi = \mathcal{E}$ where $\mathcal{E}$ is the fundamental solution of the Laplace equation. It is well known (see for instance [14]) that the fundamental solution $\mathcal{O}$ of the scalar equation (1.3) in $\mathbb{R}^n$ is given by

$$\mathcal{O}(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-n/2}|\boldsymbol{x}|^{1-n/2}e^{x_1}K_{n/2-1}(|\boldsymbol{x}|).$$

In particular, if the dimension is odd, namely $n = 2m + 1$ $(m \geq 1)$, then

$$\mathcal{O}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^m}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^m}e^{x_1-|\boldsymbol{x}|}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m+k-1)!}{k!(m-k-1)!}\frac{1}{(2|\boldsymbol{x}|)^k},$$

Thus

$$\mathcal{O}(x) = \frac{1}{2}e^{x-|x|} \text{ if } n = 1, \ \mathcal{O}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{x_1-|\boldsymbol{x}|}}{|\boldsymbol{x}|} \text{ if } n = 3.$$

In order to clarify the relation between $(\mathcal{O}_{ij}, e_j)$ and $\mathcal{O}$ it is convenient to use the notions of *Riesz transforms* (see for instance [24]). Recall that the Riesz transforms of a function $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p > 1$, are defined by

$$\widehat{R_j u}(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\hat{u}, \ j = 1, ..., n,$$

where $\widehat{R_j u}$ and $\hat{u}$ denote the Fourier transform of $R_j u$ and u respectively. Among the properties of the Riesz transforms let us recall that R_j preserves the class $L^p(\mathbb{R}^n)$ and satisfies

$$R_i \circ R_j(\Delta u) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

Consequently the relation between $(\mathcal{O}_{ij}, e_j)$ and $\mathcal{O}$ is summarized in terms of the Riesz transforms as follows

LEMMA 3.1. *For each i, $j \leq n$,*

$$\mathcal{O}_{ij} = (\delta_{ij}I + R_i \circ R_j)\mathcal{O}. \tag{3.1}$$

Since R_i maps $L^p(\mathbb{R}^3)$ into itself, one can easily get some properties of $\mathcal{O}_{ij}$ from those of $\mathcal{O}$. Let us display some of them. We state the following proposition whose proof is given in appendix A.

PROPOSITION 3.2. *We have*

(a) *If* $n=3$, *then* $\mathcal{O}\in L^p(\mathbb{R}^3)$, $2<p<3$.
(b) *If* $n=3$, *then* $\mathcal{O}-g_2\in L^p(\mathbb{R}^3)$, $2<p\le+\infty$.
(c) *If* $n=4$, $\mathcal{O}-g_2\in L^p(\mathbb{R}^4)$, $2<p<4$.
(d) *If* $n=5$, $\mathcal{O}-g_2\in L^p(\mathbb{R}^5)$, $2<p<5/2$.

Assertions (b)-(d) allow to decompose the convolution $\mathcal{O}*f$ of the fundamental solution $\mathcal{O}$ (or $\mathcal{O}_{ij}$)) with any function f into the sum $g_2*f+(\mathcal{O}-g_2)*f$. The advantage of this decomposition is twofold; Firstly, as stated in Proposition 3.2, the function $\mathcal{O}-g_2$ has a better behavior than $\mathcal{O}$. The second advantage lies in the fact that g_2*u belongs to $W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ if u belongs to L^p (see Lizorkin spaces in section 4.1 hereafter or in [9]).
The proof of the following corollary stems from assertion (b) of Proposition 3.2.

Corollary 3.3. *If* $n=3$, $1\le p<3$ *and* $2<q\le+\infty$, *then* $\mathcal{O},\mathcal{O}_{ij}\in L^p(\mathbb{R}^3)+L^q(\mathbb{R}^3)$, $i,j=1,2,3$. In appendix B, a proof of the following corollary is given

Corollary 3.4. *Let* $f\in L^p(\mathbb{R}^3)$, $1\le p<2$ *and* $n=3$. *We set*

$$p_1^*=\frac{2p}{2-p},\ p_2^*=\begin{cases}\dfrac{3p}{3-2p} & \text{if } p<3/2\\ +\infty & \text{if } 3/2\le p<2\end{cases},\ p_3^*=\begin{cases}\dfrac{p}{p-1} & \text{if } 1<p<2\\ +\infty & \text{if } p=1\end{cases}.$$

Then,
(a) $\mathcal{O}*f\in L^r(\mathbb{R}^3)$ *for each* r, $p_1^*<r<p_2^*$. *Moreover, if* $p\neq 3/2$ *and* $p\neq 1$, *then* $\mathcal{O}*f\in L^r(\mathbb{R}^3)$ *with* $r=p_2^*$. *In all the cases,*

$$\|\mathcal{O}*f\|_{L^r(\mathbb{R}^3)}\lesssim\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}.$$

(b) $\mathcal{O}*f=h_1+h_2$ *with* $h_1\in L^r(\mathbb{R}^3)$, $p_1^*<r\le p_3^*$, $h_2\in W^{2,p}(\mathbb{R}^3)$ *and*

$$\|h_1\|_{L^r(\mathbb{R}^3)}+\|h_2\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^3)}\lesssim\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}.$$

(c) *If* $1<p<3/2$, *then* $\mathcal{O}*f=h_1+h_2$ *with* $h_1\in L^q(\mathbb{R}^3)$ *and* $h_2\in W^{2,p}(\mathbb{R}^3)$ *with*

$$q=\frac{(p+3)p}{3-2p}.$$

The same assertion remains true if $\mathcal{O}$ *is replaced by* $\mathcal{O}_{ij}$, $1\le i,j\le 3$.

4. The scalar equation. Here we deal with the scalar equation

$$-\Delta u+2\frac{\partial u}{\partial x_1}=f\text{ in }\mathbb{R}^n. \tag{4.1}$$

A first approach for treating this equation is based on a simple but efficient idea. It consists to rewrite Equation (4.1) in term of the new unknown $w(\boldsymbol{x})=e^{-x_1}u(\boldsymbol{x})$. More precisely, Equation (4.1) can be written into the form

$$-\Delta u+\nabla\phi_1.\nabla u=f\text{ in }\mathbb{R}^n,$$

where $\phi_1 = 2x_1$, and therefore $\nabla\phi_1 = 2\boldsymbol{e}_1$. Hence, let us consider the more general equation

$$-\Delta u + \nabla\phi.\nabla u = f \text{ in } \mathbb{R}^n,$$

with $\Delta\phi = 0$. Setting $w(\boldsymbol{x}) = e^{-\phi(\boldsymbol{x})/2}u(\boldsymbol{x})$, then w satisfies the usual elliptic equation:

$$-\Delta w + a(\boldsymbol{x})w = F_1 \text{ in } \mathbb{R}^n, \tag{4.2}$$

with $a(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{4}|\nabla\phi|^2(\boldsymbol{x})$ and $F_1(\boldsymbol{x}) = e^{-\phi(\boldsymbol{x})/2}f(\boldsymbol{x})$. The scalar equation (4.1) corresponds to the case $\phi(\boldsymbol{x}) = 2x_1$. In this case, we get the classical equation

$$-\Delta w + w = F_1 \text{ in } \mathbb{R}^n. \tag{4.3}$$

The main advantage of this new formulation is that the anisotropic character of equation (4.1) has disappeared . However, as we shall see, the solutions obtained by this method could be different from those obtained by dealing directly with the equation (4.1). This difference is mainly due to the fact that the space of tempered distribution $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ is not preserved under multiplication by e^{-x_1}.

These considerations lead one to distinguish two kinds of solutions of (4.1); *tempered solutions*, which are tempered distributions, and *quasi-tempered* solutions. A solution u of (4.1) will be called quasi-tempered if $e^{-x_1}u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Quasi-tempered solutions are obtained by solving (4.3). As we shall see, when a quasi-tempered solution exists it is unique. The uniqueness is lost in general with tempered solutions which are obtained by dealing with equation (4.1). It is worth nothing that only tempered solutions of the equation (4.1) turn out to be useful in the treatment of the vectorial Oseen's system (1.2).

Remark (Relation with the Laplace equation). Let $u \in \mathcal{S}_1'(\mathbb{R}^n)$ be a solution of (4.1) and set $w = e^{-x_1}u$. Consider the finite measure μ_2 defined by $\mu_2 = (2\pi)^{n/2}\delta_0 - (2\pi)^{n/2}g_2(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$, with δ_0 the Dirac measure at the origin. Let $\hat{\mu}_2$ be the Fourier transform of μ_2. We have $\hat{\mu}_2(\boldsymbol{\xi}) = |\boldsymbol{\xi}|^2(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{-1} = 1-(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{-1}$. Next, let $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ be solution of the Laplace equation $-\Delta v = e^{-x_1}f = F$ in $\mathbb{R}^n$. Then, on the one hand, we have $|\boldsymbol{\xi}|^2\hat{v} = \hat{F}$. On the other, since $-\Delta w + w = F$, we get $\hat{w}(\boldsymbol{\xi}) = (1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{-1}\hat{F}$. Thus, $\hat{w}(\boldsymbol{\xi}) = \hat{\mu}_2(\boldsymbol{\xi})\hat{v}$, and $w(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-n/2}\mu_2 * v(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} v(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})d\mu_2(\boldsymbol{y})$. Namely, $w = v - g_2 * v$ and $u = e^{x_1}(v - g_2 * v) = (2\pi)^{-n/2}e^{x_1}\mu_2 * v$.

4.1. Quasi-tempered solutions of scalar Oseen equation.. Our aim here is to show existence of quasi-tempered solutions of the scalar Oseen equation (4.1). The main result of this paragraph is the following

THEOREM 4.1. *Let m, $k \in \mathbb{Z}$ be two integers and $p > 1$ a real. Then, the operator*

$$T: \ \mathcal{H}_k^{m+2,p}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{H}_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)$$

is an isomorphism.

PROOF OF THEOREM 4.1

Firstly, observe that the mapping

$$v \mapsto w = e^{-x_1} v$$

is a isomorphism between $\mathcal{H}_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ and $V_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Moreover, in the sense of distributions one can easily prove that

$$Tv = e^{x_1}(I - \Delta)e^{-x_1} v.$$

This remark allows one to deal only with the operator $I - \Delta$. We start with the following lemma.

LEMMA 4.2. *Let $k \geq 0$ be an integer and $p > 1$ be a real. Then, the operator*

$$I - \Delta \ \ : \ \ W^{s+2,p}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$$

is an isomorphism.

Proof. We need the following identity (see [9])

$$\mathcal{L}^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n), \ \ \forall m \in \mathbb{N},$$

where $\mathcal{L}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ is the Lizorkin space defined by

$$\mathcal{L}^{m,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), u = g_m * v, v \in L^p(\mathbb{R}^n)\}.$$

In terms of Fourier transform, the unique solution of the equation

$$(I - \Delta)w = h,$$

is given by $w = \mathcal{F}^{-1}((1 + |\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}(h)) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{g}_2 \mathcal{F}(h))$. Hence,

$$\begin{aligned} h \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n) &\Leftrightarrow h \in \mathcal{L}^{m,p}(\mathbb{R}^n) \\ &\Leftrightarrow (\hat{g}_m)^{-1}\hat{h} \in \mathcal{F}(L^p(\mathbb{R}^n)) \\ &\Leftrightarrow (\hat{g}_m)^{-1}(\hat{g}_2)^{-1}\hat{w} \in \mathcal{F}(L^p(\mathbb{R}^n)) \\ &\Leftrightarrow (\hat{g}_{m+2})^{-1}\hat{w} \in \mathcal{F}(L^p(\mathbb{R}^n)) \\ &\Leftrightarrow w \in W^{m+2,p}(\mathbb{R}^n). \end{aligned} \tag{4.4}$$

■

LEMMA 4.3. *Let $k \in \mathbb{Z}$ and $m \in \mathbb{Z}$ be two integers and $p > 1$ a real. Then, the operator*

$$I - \Delta \quad : \quad V_k^{m+2,p}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow V_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)$$

is an isomorphism.

Proof. We know that the operator $I - \Delta$ is one to one from $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ into $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Hence, for $F \in V_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, there exists a unique $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ such that

$$-\Delta w + w = F \text{ in } \mathbb{R}^n.$$

Suppose first that $k \geq 0$. Let us prove by induction on k the following

$$F \in V_k^{0,p}(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \Big(w \in V_k^{2,p}(\mathbb{R}^n) \text{ and } \|w\|_{V_k^{2,p}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{V_k^{0,p}(\mathbb{R}^n)} \Big) \tag{4.5}$$

The latter follows immediately from Lemma 4.2 when $k = 0$. Suppose that (4.5) holds for $0, ..., k$ and suppose that $F \in V_{k+1}^{0,p}(\mathbb{R}^n)$. Necessarily $w \in V_k^{2,p}(\mathbb{R}^n)$. Setting $\tilde{w} = \rho^{k+1} w$, we prove easily that

$$-\Delta \tilde{w} + \tilde{w} = \rho^{k+1} F - \nabla \rho^{k+1} . \nabla w - (\Delta \rho^{k+1}) w.$$

The right hand side belongs to $L^p(\mathbb{R}^n)$ since $w \in V_k^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ and $|\partial^\alpha \rho^k| \lesssim \rho^{k-|\alpha|}$ for any multi-index α. We deduce that $\tilde{w} \in V_0^{2,p}(\mathbb{R}^n)$, and, consequently, $w \in V_{k+1}^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ since

$$\forall |\alpha| \leq 2;\ |\partial^\alpha w| \lesssim \sum_{|\nu| \leq 2,\, \nu \leq \alpha} |\partial^\nu \rho^{-k-1} \partial^{\alpha-\nu} \tilde{w}| \lesssim \sum_{|\nu| \leq 2,\, \nu \leq \alpha} |\rho^{-k-1-|\nu|} \partial^{\alpha-\nu} \tilde{w}|.$$

This ends the proof of (4.5). Similarly, let us prove by induction on $k \geq 0$ the following

$$F \in V_{-k}^{0,p}(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \Big(w \in V_{-k}^{2,p}(\mathbb{R}^n) \text{ and } \|w\|_{V_{-k}^{2,p}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{V_{-k}^{0,p}(\mathbb{R}^n)} \Big). \tag{4.6}$$

The latter holds clearly for $k = 0$. Suppose that it holds for $0, ..., k$ and let $F \in V_{-k-1}^{0,p}(\mathbb{R}^n)$. Setting $\tilde{F} = \rho^{-k-1} F \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{w} = (I - \Delta)^{-1} \tilde{F} \in V_0^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ and $h = w - \rho^{-k-1} \tilde{w}$, we get after few calculation

$$-\Delta h + h = (\Delta \rho^{k+1}) \tilde{w} + \nabla \rho^{k+1} . \nabla \tilde{w}.$$

The right hand side of the last identity belongs to $V_{-k}^{0,p}(\mathbb{R}^n)$. From induction hypothesis we deduce that $h \in V_{-k}^{2,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow V_{-k-1}^{2,p}(\mathbb{R}^n)$. It follows that $w \in V_{-k-1}^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ since $\rho^{k+1} \tilde{w} \in V_{-k-1}^{2,p}(\mathbb{R}^n)$. This ends the proof of (4.6).

At this stage, the assertion of lemma 4.3 is proved when $m = 0$ and $k \in \mathbb{Z}$. Now, suppose that $m \geq 1$, and let $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ be the unique solution of $-\Delta w + w = F$ with $F \in V_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Then, for each multi-index α, $|\alpha| \leq m$, $\partial^\alpha w$ satisfies

$-\Delta(\partial^\alpha w) + \partial^\alpha w = \partial^\alpha F \in V_k^{0,p}(\mathbb{R}^n)$. Hence, $\partial^\alpha w \in V_k^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ for each α, $|\alpha| \leq m$. We conclude that $w \in V_k^{m+2,p}(\mathbb{R}^n)$ which ends the proof of Lemma 4.3 for $m \geq 0$. The proof for $m \leq -2$ is based on a classical duality argument. It remains to treat the case $m = -1$. Let $F \in V_k^{-1,p}(\mathbb{R}^n)$ for some $k \in \mathbb{Z}$. Then, $F \in V_k^{-2,p}(\mathbb{R}^n)$. Hence, there exists $w \in V_k^{0,p}(\mathbb{R}^n)$ such that $-\Delta w + w = F$ (here we used the result of lemma for $m = -2$). Since in addition, $\partial_i F \in V_k^{-2,p}(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, ..., n$, we deduce that $\partial_i w \in V_k^{0,p}(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, ..., n$ since $-\Delta(\partial_i w) + \partial_i w = \partial_i F$. Hence, $w \in V_k^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. ■

4.2. Tempered solutions of the scalar Oseen equation. Our aim here is to look for solutions of the equation (4.1) which are tempered distributions. In the sequel, for each integer $m \in \mathbb{Z}$, we consider the space

$$\widetilde{W}_k^{m,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in W_k^{m,p}(\mathbb{R}^n),\ \frac{\partial u}{\partial x_1} \in W_k^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)\},$$

equipped with the norm

$$\|u\|_{\widetilde{W}_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)} = \left\{ \|u\|^p_{W_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)} + \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|^p_{W_k^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)} \right\}^{1/p}.$$

When $m \geq 0$ and $k \in \mathbb{Z}$, we set $\widetilde{\mathcal{W}}_{-k}^{-m,p'}(\mathbb{R}^n)$ the dual space of $\widetilde{W}_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Clearly, we have the imbeddings

$$\widetilde{W}_{-k}^{-m,p'}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_{-k}^{-m,p'}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{W}}_{-k}^{-m,p'}(\mathbb{R}^n).$$

In what follows, $\mathbb{Q}_k$ denotes the sum $\mathbb{H}'_k + \mathbb{P}_{k-1}$, where $\mathbb{H}'_k$ is the space of *homogeneous* polynomials of degree k and depending only on $x_2, ..., x_n$. We denote by $\mathbb{Q}_\ell^+$ (resp. $\mathbb{Q}_\ell^-$) the subspace of all the polynomials $p \in \mathbb{Q}_\ell$ satisfying $Tp = 0$ (resp. $T^*p = 0$). Notice that the mapping $p(x_1, x_2, ..., x_n) \longrightarrow p(-x_1, x_2, ..., x_n)$ is one to one from $\mathbb{Q}_\ell^+$ into $\mathbb{Q}_\ell^-$. We have the lemma

LEMMA 4.4. *Let $m \geq 0$, $1 < p < +\infty$ and $k \in \mathbb{Z}$ such that $k + n/p \notin \{0, ..., m\}$. A function $u \in \widetilde{W}_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ satisfies $Tu = 0$ if and only if $u \in \mathbb{Q}_\ell^+$ with $\ell = -[k + n/p - m] - 1$.* *Proof.* If u is a tempered such that $Tu = 0$, then $(|\xi|^2 - i\xi_1)\hat{u} = 0$. Since $|\xi|^2 - i\xi_1$ vanishes only at $\xi = 0$, we deduce that u is polynomial. If in addition $u \in \widetilde{W}_k^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ than necessarily belongs to $\mathbb{Q}_\ell$. □

THEOREM 4.5. *If $n/p \neq 1$ and $n/p' \neq 1$. The operator*

$$T\ :\ \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{P}_{[1-n/p]} \longrightarrow W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}_{[1-n/p']}$$

is an isomorphism.

THEOREM 4.6. *Let $m \geq 2$ be an integer and suppose that $n/p \neq \{1, ..., m\}$, then the operator*

$$T:\ \widetilde{W}_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{Q}^+_{[m-n/p]} \longrightarrow W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)$$

is an isomorphism.

THEOREM 4.7. *Let $m \geq 2$ be an integer suppose that $n/p' \neq \{1, ..., m\}$ and $n/p \neq \{1, 2\}$ if m is even and $n/p \neq \{1\}$. Let $\widetilde{W}_0^{-m+2,p}(\mathbb{R}^n) \perp\perp \mathbb{P}_{[m-n/p']}$ be the space of all the functions $u \in \widetilde{W}_0^{-m+2,p}(\mathbb{R}^n)$ satisfying the conditions*

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{P}_{[m-2-n/p']},\ \langle u, p\rangle &= 0, \\ \forall p \in \mathbb{P}_{[m-n/p']},\ \langle \frac{\partial u}{\partial x_1}, p\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Then, the operator

$$T:\ \ \widetilde{W}_0^{-m+2,p}(\mathbb{R}^n) \perp\perp \mathbb{P}_{[m-n/p']} \longrightarrow W_0^{-m,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}_{[m-n/p']}$$

is an isomorphism.

By duality and transposition, Theorem 4.6 yields

THEOREM 4.8. *Suppose that $m \geq 2$, $1 < p < +\infty$ and $n/p' \neq \{1, ..., m\}$, then the operator*

$$T:\ \ W_0^{-m+2,p}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{W}}_0^{-m,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{Q}^-_{[m-n/p']}$$

is an isomorphism.

The following proposition plays a prominent role in the proof of theorems 4.5-4.6,

PROPOSITION 4.9. *Let $1 < p < +\infty$, $m \geq 2$ such that $n/p \notin \{1, ..., m\}$, and set $\ell = \min(m-1, [m - n/p])$. Then,*

$$\inf_{q\in\mathbb{Q}_\ell} \|u + q\|_{\widetilde{W}_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \lesssim |u|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} + |\frac{\partial u}{\partial x_1}|_{W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)}$$

for each $u \in \widetilde{W}_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

PROOF OF PROPOSITION 4.9

Observe first that the semi-norm $[u]_{m,p} = |u|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} + |\dfrac{\partial u}{\partial x_1}|_{W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)}$ is a norm on $\widetilde{W}_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Indeed, if $[u]_{m,p} = 0$, then $|u|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} = 0$. Hence, u is a polynomial. Since u belongs to $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, its degree is necessarily less or equal to ℓ. Moreover, since $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$ belongs to $W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)$, the degree of $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$ is less or equal to $\ell - 2 = \min(m-3, [m-2-n/p])$. Hence, $u \in \mathbb{Q}_\ell$.

Now, let us prove that this semi-norm is equivalent to the norm $\widetilde{W}_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. We need the following lemma (see [3])

LEMMA 4.10. *Let $k \in \mathbb{Z}$ and $s \geq 1$ be two integers such that $n/p + k \neq \{1, ..., s\}$. Let $q = \min(s-1, [s-k-n/p])$. Then, the semi-norm $|v|_{W_k^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$ defines on $W_k^{s,p}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{P}_q$ a norm which is equivalent to the quotient norm.*

Suppose first $\ell \geq 0$, then from Lemma 4.10 it follows that

$$\forall v \in W_0^{m-\ell,p}(\mathbb{R}^n),\ \inf_{c\in\mathbb{R}} \|v+c\|_{W_0^{m-\ell,p}(\mathbb{R}^n)} \lesssim |v|_{W_0^{m-\ell,p}(\mathbb{R}^n)}, \tag{4.7}$$

$$\forall v \in W_0^{m-\ell-1,p}(\mathbb{R}^n),\ \|v\|_{W_0^{m-\ell-1,p}(\mathbb{R}^n)} \lesssim |v|_{W_0^{m-\ell-1,p}(\mathbb{R}^n)}, \tag{4.8}$$

$$\forall v \in W_{\ell-m}^{\ell,p}(\mathbb{R}^n),\ \inf_{q\in\mathbb{P}_{\ell-1}} \|v-q\|_{W_{\ell-m}^{\ell,p}(\mathbb{R}^n)} \lesssim |v|_{W_{m-\ell}^{\ell,p}(\mathbb{R}^n)}, \tag{4.9}$$

Now, let $\mathbb{P}'_k$, k being an integer, be the space of all the polynomials of degree less or to ℓ and depending only on $x_2, ..., x_n$. Namely, if $k \geq 0$,

$$\mathbb{P}'_k = \mathbb{H}'_0 + ... + \mathbb{H}'_k.$$

If $k < 0$, $\mathbb{P}'_k = \{0\}$. We shall use the following Lemma.

Lemma 4.11. *Let m, ℓ and p be as in Proposition 4.9. Then,*

$$\inf_{q\in\mathbb{P}'_\ell} \|u+q\|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \lesssim |u|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} + \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_{W_0^{m-1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

for each $u \in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

Proof. (of lemma 4.11) For each $k \geq 0$, we set

$$\Lambda_k = \{\mu = (0, \mu_2, ..., \mu_n),\ \ |\mu| = \mu_2 + ... + \mu_n = k\}.$$

The proof of lemma 4.11 is based on an identification between the space $\mathbb{H}_k$, $k \geq 0$, and $\mathbb{R}^{\mathrm{card}(\Lambda_k)}$ by way of the mapping

$$q \in \mathbb{H}_k \longrightarrow (\partial^\mu p)_{\mu\in\Lambda_k} \in \mathbb{R}^{\mathrm{card}(\Lambda_k)}.$$

Now from Lemma 4.10, we can write

$$\inf_{q\in\mathbb{P}'_\ell} \|u+q\|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} = \inf_{p_\ell\in\mathbb{H}'_\ell} \inf_{p_{\ell-1}\in\mathbb{H}'_{\ell-1}} ... \inf_{p_0\in\mathbb{H}'_0} \|u-(p_\ell+p_{\ell-1}+...+p_0)\|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\lesssim \inf_{p_\ell\in\mathbb{H}'_\ell} ... \inf_{p_1\in\mathbb{H}'_1} \left\{ \sum_{\mu\in\Lambda_1} \|\partial^\mu u - \partial^\mu(p_\ell+...+p_1)\|_{W_0^{m-1,p}(\mathbb{R}^n)} + \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_{W_0^{m-1}(\mathbb{R}^n)} \right\}.$$

Since the polynomial $p_1 \in \mathbb{H}'_1$ can be identified to the constants $(\partial^\mu p_1, |\mu| = 1)$, it follows that

$$\inf_{p_\ell\in\mathbb{H}'_\ell} ... \inf_{p_1\in\mathbb{H}'_1} \left\{ \sum_{\mu\in\Lambda_1} \|\partial^\mu u - \partial^\mu(p_\ell+...+p_1)\|_{W_0^{m-1,p}(\mathbb{R}^n)} + \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_{W_0^{m-1}(\mathbb{R}^n)} \right\}$$

$$\lesssim \inf_{p_\ell\in\mathbb{H}'_\ell} ... \inf_{p_2\in\mathbb{H}'_2} \left\{ \sum_{\mu\in\Lambda_2} \|\partial^\mu u - \partial^\mu(p_\ell+...+p_2)\|_{W_0^{m-1,p}(\mathbb{R}^n)} + \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_{W_0^{m-1}(\mathbb{R}^n)} \right\}.$$

More generally the polynomial $p_k \in \mathbb{H}'_k$ can be identified to the constants $(\partial^\mu p_k, |\mu| = k)$. Then, by repeating the argument we deduce that

$$\inf_{q\in\mathbb{P}'_\ell} \|u+q\|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \lesssim |u|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} + \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_{W_0^{m-1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

which ends the proof of lemma 4.11.

Now, since the space $\mathbb{Q}_\ell$ can be identified to the product $\mathbb{P}'_\ell \times x_1\mathbb{P}_{\ell-2}$, we can write for each $u \in \widetilde{W}_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
&\inf_{p\in\mathbb{Q}_\ell} \|u-p\|_{\widetilde{W}_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \\
&= \inf_{(p_1,p_2)\in\mathbb{P}'_\ell\times x_1\mathbb{P}_{\ell-2}} \|u-(p_1+p_2)\|_{\widetilde{W}_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \\
&= \inf_{(p_1,p_2)\in\mathbb{P}'_\ell\times x_1\mathbb{P}_{\ell-2}} \left\{\|u-(p_1+p_2)\|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} + \|\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial p_2}{\partial x_1}\|_{W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)}\right\}
\end{aligned}$$

Now, using Lemma 4.11 and the fact that the mapping $p \to \frac{\partial p}{\partial x_1}$ is one to one from $x_1\mathbb{P}_{\ell-2}$ into $\mathbb{P}_{\ell-2}$, we get

$$\begin{aligned}
&\inf_{p\in\mathbb{Q}_\ell} \|u-p\|_{\widetilde{W}_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim \left(|u|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} + \inf_{p_2\in x_1\mathbb{P}_{\ell-2}} \left\{\|\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial p_2}{\partial x_1}\|_{W_0^{m-1,p}(\mathbb{R}^n)} + \|\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial p_2}{\partial x_1}\|_{W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)}\right\}\right) \\
&\lesssim \left(|u|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} + \inf_{p\in\mathbb{P}_{\ell-2}} \left\{\|\frac{\partial u}{\partial x_1} - p\|_{W_0^{m-1,p}(\mathbb{R}^n)} + \|\frac{\partial u}{\partial x_1} - p\|_{W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)}\right\}\right).
\end{aligned}$$

Observing that

$$\begin{aligned}
\|\frac{\partial u}{\partial x_1} - p\|_{W_0^{m-1,p}(\mathbb{R}^n)} &= \|\frac{\partial u}{\partial x_1} - p\|_{W_{-1}^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)} + |\frac{\partial u}{\partial x_1}|_{W_0^{m-1,p}(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim \|\frac{\partial u}{\partial x_1} - p\|_{W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)} + |\frac{\partial u}{\partial x_1}|_{W_0^{m-1,p}(\mathbb{R}^n)} \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

and, from Lemma 4.10,

$$\inf_{p\in\mathbb{P}_{\ell-2}} \|\frac{\partial u}{\partial x_1} - p\|_{W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)} \lesssim |\frac{\partial u}{\partial x_1}|_{W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)},$$

we deduce that

$$\inf_{q\in\mathbb{Q}_\ell} \|u+q\|_{\widetilde{W}_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \lesssim |u|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} + |\frac{\partial u}{\partial x_1}|_{W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)},$$

which ends the proof. ■

Proof of Theorem 4.5

T is clearly continuous from $\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{P}_{[1-n/p]}$ into $W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}_{[1-n/p']}$. It is also injective, thanks to Lemma 4.4. Let us prove that it is onto. Let $f \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}_{[1-n/p']}$. Then, according to Proposition 4.1 of [3] and since $n/p' \neq 1$, there exists a vector function $\boldsymbol{w} = (w_1, ..., w_n) \in L^p(\mathbb{R}^n)^n$ such that div $\boldsymbol{w} = f$. We set

$$z = \mathcal{F}^{-1}\left((|\xi|^2 + i\xi_1)^{-1}\mathcal{F}f\right) = \sum_{k=1}^n \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{i\xi_k}{|\xi|^2 + 2i\xi_1}\mathcal{F}w_k\right).$$

We use the following multiplier theorem due to Lizorkin [21] (see also [14], Lemma 4.2 Ch. VII)

Lemma 4.12. *Let j, $k \in \{1, ..., n\}$. The operators*

$$h \longrightarrow \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\xi_k\xi_j}{|\xi|^2 + 2i\xi_1}\mathcal{F}h\right),\ h \longrightarrow \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\xi_1}{|\xi|^2 + 2i\xi_1}\mathcal{F}h\right),$$

are continuous from $L^p(\mathbb{R}^n)$ into $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < +\infty$.

Hence, for each $j \leq n$, we have

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = -\sum_{k=1}^{n} \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\xi_j\xi_k}{|\xi|^2 + 2i\xi_1}\mathcal{F}w_k\right) \in L^p(\mathbb{R}^n),$$

and

$$\|\nabla z\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\boldsymbol{w}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Lemma 4.13. *(see [3]) Let $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ such that $\nabla h \in L^p(\mathbb{R}^n)$, with $1 < p < +\infty$ and $p \neq n$. Then, there exists a constant K such that $h + K \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ and*

$$\|h + K\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\nabla h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

From this lemma, it follows that there exists a constant K, such that $z + K \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ and

$$\|z + K\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\nabla z\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

We set $u = z + K$. Then, $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ and satisfies

$$-\Delta u + 2\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\Delta z + 2\frac{\partial z}{\partial x_1} = f.$$

In addition,

$$2\frac{\partial u}{\partial x_1} = f + \Delta u \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}_{[1-n/p']},$$

since the range of the Laplacian $\Delta : \ W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)$ is nothing but $W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}_{[1-n/p']}$. ■

Proof of Theorem 4.6

We start with the lemma

Lemma 4.14. *The operator $T :\ \mathbb{Q}_{\ell+2} \longrightarrow \mathbb{P}_\ell$ is onto.*

Proof. If $\ell = 0$ and $p = c \in \mathbb{P}_\ell = \mathbb{R}$, then $p = T(\frac{1}{2}cx_1)$. Suppose that $\ell \geq 1$ and let $p \in \mathbb{P}_\ell$. Set

$$q = \frac{1}{2}\int_0^{x_1} p(t, x_2, .., x_n)dt.$$

Then, $p - Tq \in \mathbb{P}_{\ell-1}$. The proof is ended by applying the hypothesis of induction. ■

LEMMA 4.15. *Let $m \geq 2$ and and set $\ell = [m - n/p]$. Let T^* be the adjoint operator of $T : \widetilde{W}_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{Q}_\ell \longrightarrow W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{P}_{\ell-2}$. Then, T^* is injective.*

Proof. The adjoint operator T^* is defined from $W_0^{-m+2,p'}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}_{\ell-2}$ into $\widetilde{\mathcal{W}}_0^{-m,p'}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{Q}_\ell$ as follows:

$$\forall u \in W_0^{-m+2,p'}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}_{\ell-2},\ \forall v \in \widetilde{W}_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)\ \ \langle T^*u, v\rangle = \langle u, Tv\rangle.$$

If $T^*u = 0$ then $-\Delta u - 2\dfrac{\partial u}{\partial x_1} = 0$. Since u is a tempered distribution, and using the same argument of lemma 4.4, we deduce that u is a polynomial. Further, $u = 0$ since $W_0^{-m+2,p'}(\mathbb{R}^n)$ contains only the trivial polynomial.

□

LEMMA 4.16. *Let $m \geq 2$ be an integer and set $\ell = [m - n/p]$. Suppose that $n/p \neq \{1, ..., m\}$, then the operator $T : \ \widetilde{W}_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{Q}_\ell \longrightarrow W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{P}_{\ell-2}$ is an isomorphism.*

Proof. The linear mapping T is clearly bounded. It is also injective; indeed, let $u \in \widetilde{W}_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ such that $Tu \in \mathbb{P}_{\ell-2}$. According to lemma 4.14, there exists $\theta \in \mathbb{Q}_\ell$ such that $T\theta = Tu$. Hence, $T(\theta - u) = 0$. Thus, by virtue of Lemma 4.4, $\theta - u$ belongs to $\mathbb{Q}_\ell$ and $u \in \mathbb{Q}_\ell$.

Let us prove that the range of T is a closed subspace of $W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{P}_{\ell-2}$. Let α be an arbitrary multi-index such that $|\alpha| = m - 2$. Then, according to lemma 4.12, we have

$$\begin{aligned}
\|\frac{\partial^2(D^\alpha u)}{\partial x_i \partial x_j}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \|\mathcal{F}^{-1}(\xi_i\xi_j\mathcal{F}\partial^\alpha u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \|\mathcal{F}^{-1}(\frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2 + 2i\xi_1}\mathcal{F}T\partial^\alpha u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim \|\partial^\alpha Tu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim |Tu|_{W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim \|Tu\|_{W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{P}_{\ell-2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\frac{\partial(D^\alpha u)}{\partial x_1}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \|\mathcal{F}^{-1}(\xi_1\mathcal{F}\partial^\alpha u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \|\mathcal{F}^{-1}(\frac{\xi_1}{|\xi|^2 + 2i\xi_1}\mathcal{F}\partial^\alpha Tu)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim \|\partial^\alpha Tu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim \|Tu\|_{W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{P}_{\ell-2}}
\end{aligned}$$

Hence,

$$|u|_{\widetilde{W}_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|Tu\|_{W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{P}_{\ell-2}}$$

Combining with Proposition 4.9 gives

$$\|u\|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{Q}_\ell} \lesssim \|Tu\|_{W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{P}_{\ell-2}}.$$

We conclude that the range of T is a closed subspace of $W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{P}_{\ell-2}$. By means of the Closed range theorem of Banach, and since the adjoint of T is injective, we deduce that this range is nothing but the whole space $W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{P}_{\ell-2}$. ∎

Theorem 4.6 stems directly from Lemma 4.14 and 4.16.

Proof of Theorem 4.7

Firstly, let $u \in \widetilde{W}_0^{-m+2,p}(\mathbb{R}^n) \perp\perp \mathbb{P}_{[m-n/p']}$. Then, for each $p \in \mathbb{P}_{[m-n/p']}$, we have

$$\begin{aligned} \langle Tu, p\rangle &= -\langle \Delta u, p\rangle + 2\langle \frac{\partial u}{\partial x_1}, p\rangle \\ &= -\langle u, \Delta p\rangle + 2\langle \frac{\partial u}{\partial x_1}, p\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Hence, $Tu \in W_0^{-m,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}_{[m-n/p']}$. On the other hand, Theorem 2.1 asserts that the operator

$$\Delta \ : \ W_0^{m,p'}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{P}_{[m-n/p']} \longrightarrow W_0^{m-2,p'}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{P}_{[m-2-n/p']},$$

is an isomorphism if $m \geq 2$ and $n/p' \notin \{1, ..., m\}$. It follows that Δ^k is an isomorphism between $W_0^{2k,p'}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{P}_{[2k-n/p']}$ and $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ for $k \geq 1$ and $n/p' \notin \{1, ..., 2k\}$. By duality and transposition Δ^k is also an isomorphism between $L^p(\mathbb{R}^n)$ and $W_0^{-2k,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}_{[2k-n/p']}$. Let Δ^{-k} be its inverse. From theorem 4.6, we know that T is an isomorphism between $\widetilde{W}_0^{2,p}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{Q}_{[2-n/p]}$ and $L^p(\mathbb{R}^n)$ if $n/p \notin \{1, 2\}$. Moreover, it is quite clear that Δ^k is a continuous operator from $\widetilde{W}_0^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ into $\widetilde{W}_0^{-2k+2,p}(\mathbb{R}^n) \perp\perp \mathbb{P}_{[2k-2-n/p']}$. The operator $\Delta^k \circ T^{-1} \circ \Delta^{-k}$ is well defined and continuous from $W_0^{-2k,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}_{[2k-n/p']}$ into $\widetilde{W}_0^{-2k+2,p}(\mathbb{R}^n) \perp\perp \mathbb{P}_{[2k-2-n/p']}$ (here T^{-1} is from $L^p(\mathbb{R}^n)$ into $\widetilde{W}_0^{2,p}(\mathbb{R}^n)/\mathbb{Q}_{[2-n/p]}$). Moreover, $T \circ (\Delta^k \circ T^{-1} \circ \Delta^{-k}) = I$, we deduce that T, considered as an operator from $\widetilde{W}_0^{-2k+2,p}(\mathbb{R}^n) \perp\perp \mathbb{P}_{[2k-n/p']}$ into $W_0^{-2k,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}_{[2k-n/p']}$, is onto. It is also injective. It follows that is an isomorphism, thanks to Banach Theorem.

∎

5. The Oseen system in $\mathbb{R}^n$. In this section, we consider, the *nonhomogeneous* Oseen problem: Given a vector field $\boldsymbol{f}$ and a function h, we look for a solution $(\boldsymbol{u}, \pi)$ satisfying

$$\begin{gathered} -\Delta \boldsymbol{u} + 2\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} + \nabla\pi = \boldsymbol{f} \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = h \text{ in } \mathbb{R}^n. \end{gathered} \tag{5.1}$$

We start with a characterization of the kernel of the operator $(\boldsymbol{u}, \mu) \mapsto (T\boldsymbol{u} + \nabla\mu, \operatorname{div} \boldsymbol{u})$.

Proposition 5.1. *Let $m \geq 1$ be an integer, and set $\ell = -[n/p - m] - 1$. Then, $(u, \pi) \in \widetilde{W}_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)^n \times W_0^{m-1,p}(\mathbb{R}^n)$ is solution of (5.1) if and only if $(u, \pi) \in \boldsymbol{\mathcal{N}}_\ell$, where*

$$\boldsymbol{\mathcal{N}}_\ell = \left\{ (\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in (\mathbb{Q}_\ell)^n \times \mathbb{P}_{\ell-1}^{\Delta}; -\Delta\boldsymbol{\lambda} + \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial x_1} + \nabla \mu = \mathbf{0},\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{\lambda} = 0 \right\}.$$

Moreover, a pair $(\boldsymbol{\lambda}, \mu)$ belongs to $\boldsymbol{\mathcal{N}}_\ell$ if and only if there exists a vector function $\boldsymbol{\Phi} = (\boldsymbol{\Phi}_1, ..., \boldsymbol{\Phi}_n) \in (\mathbb{P}_{\ell+2})^n$ such that $\mathrm{div}\ \boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{Q}_{\ell+1}$, $(\Delta \circ T)\boldsymbol{\Phi}_i = 0$, $i = 1, ..., n$, *and*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda} &= \Delta \boldsymbol{\Phi} - \nabla(\mathrm{div}\ \boldsymbol{\Phi}) \\ \mu &= T(\mathrm{div}\ \boldsymbol{\Phi}). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Proof of Proposition 5.1

Let $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ be a solution of (5.1), with $\boldsymbol{f} = 0$. Then taking the divergence of the first equation of (5.1), we obtain

$$\Delta \pi = 0.$$

Thus, π is a harmonic polynomial. Now, we have

$$\Delta \left(-\Delta \boldsymbol{u} + 2 \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \right) = -\Delta(\nabla \pi) = 0.$$

It follows that

$$|\xi|^2 (|\xi|^2 - i\xi_1) \hat{\boldsymbol{u}}(\xi) = 0.$$

Hence the support of $\hat{\boldsymbol{u}}$ is included in $\{0\}$ and consequently $\boldsymbol{u}$ is a polynomial. If in addition $\boldsymbol{u} \in \widetilde{W}_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)^n$ and $\pi \in W_0^{m-1,p}(\mathbb{R}^n)$, then necessarily $\boldsymbol{u} \in (\mathbb{Q}_\ell)^n$ and $\pi \in \mathbb{P}_{\ell-1}^{\Delta}$. This ends the proof of the first assertion of the proposition. Now, according to the Lemma 4.14 there exists a polynomial $r \in \mathbb{Q}_{\ell+1}$ such that $Tr = \pi$. The vector function $\boldsymbol{u} + \nabla r$ belongs to $(\mathbb{P}_\ell)^n$. Hence, there exists a vectorial function $\boldsymbol{\varphi} \in (\mathbb{P}_{\ell+2})^n$ such that $\Delta \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{u} + \nabla r$ (since $\Delta \mathbb{P}_{\ell+2} = \mathbb{P}_\ell$). Furthermore, by applying the divergence operator to this identity one deduces that the function $s = \mathrm{div}\ \boldsymbol{\varphi} - r$ is a harmonic polynomial, and consequently belongs to $\mathbb{P}_{\ell+1}^{\Delta}$. Since $\mathrm{div}\ (\mathbb{P}_{k+1}^{\Delta}) = \mathbb{P}_k^{\Delta}$ (see [15] or [1]), there exists a polynomial $\boldsymbol{\theta} \in (\mathbb{P}_{\ell+2}^{\Delta})^n$ such that $\mathrm{div}\ \boldsymbol{\theta} = -s$. Set $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\theta} \in (\mathbb{P}_{\ell+2})^n$. Then, $\mathrm{div}\ \boldsymbol{\Phi} = r$, $\Delta \boldsymbol{\Phi} = \Delta \boldsymbol{\varphi}$. It follows that $\boldsymbol{u} = \Delta \boldsymbol{\Phi} - \nabla(\mathrm{div}\ \boldsymbol{\Phi})$ and $\pi = T(\mathrm{div}\ \boldsymbol{\Phi})$. Since $Tu_i + \partial_i \pi = 0$, we deduce that $\Delta(T\Phi_i) = 0$, $i = 1, ..., n$ which ends the proof of (5.2). The converse is straightforward. Indeed, let $\boldsymbol{\Phi} = (\boldsymbol{\Phi}_1, ..., \boldsymbol{\Phi}_n) \in (\mathbb{P}_{\ell+2})^n$ such that $\mathrm{div}\ \boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{Q}_{\ell+1}$, $(\Delta \circ T)\boldsymbol{\Phi}_i = 0$, $i = 1, ..., n$, and consider the pair $(\boldsymbol{\lambda}, \mu)$ given by (5.2). Since $T\mathbb{Q}_{\ell+1} = \mathbb{P}_\ell$ then obviously we have $\mu \in \mathbb{P}_{\ell-1}^{\Delta}$. Moreover, $\Delta \boldsymbol{\Phi} \in (\mathbb{Q}_\ell)^n$ since $\Delta \boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{P}_\ell^n$ and

$$2 \frac{\partial (\Delta \boldsymbol{\Phi})}{\partial x_1} = T \Delta \boldsymbol{\Phi} + \Delta^2 \boldsymbol{\Phi} = \Delta^2 \boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{P}_{\ell-2}^n. \quad \blacksquare$$

Let us notice that $\boldsymbol{\mathcal{N}}_\ell = \{(\mathbf{0},0)\}$ if $\ell < 0$, $\boldsymbol{\mathcal{N}}_0 = \mathbb{R}\times\{0\}$ and $\boldsymbol{\mathcal{N}}_1 = \mathbb{Q}_1^+ \times \mathbb{R}$. Our first existence result is for $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)$ and $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Note that a different proof of the next theorem, in the particular case $n = 3$, is given in [4].

Theorem 5.2. *Assume $n/p \neq 1$ and $n/p' \neq 1$.*
Let $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)\perp\mathbb{P}_{[1-n/p']}$ and $h \in \widetilde{W}_0^{0,p}(\mathbb{R}^n)$ satisfying

$$\forall q \in \mathbb{P}_{[2-n/p']},\ \langle \frac{\partial h}{\partial x_1}, q\rangle = 0 \tag{5.3}$$

Then the Oseen system (5.1) *has a unique solution*
$(\boldsymbol{u},\pi) \in (\widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)\times L^p(\mathbb{R}^n))/\boldsymbol{\mathcal{N}}_{[1-n/p]}$. *Moreover, the following estimate holds*

$$\inf_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{P}_{[1-n/p]}} \|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\lambda}\|_{\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)} + \|\pi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \left(\|\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)} + \|h\|_{\widetilde{W}_0^{0,p}(\mathbb{R}^n)}\right). \tag{5.4}$$

Proof of Theorem 5.2

1) Consider first $(\boldsymbol{u},\pi) \in \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)\times L^p(\mathbb{R}^n)$. Then $-\Delta\boldsymbol{u} + 2\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_1} + \nabla\pi \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)$. Thus, due to the density of $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ in $\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, for any $\boldsymbol{\lambda} \in \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n)$, we have

$$\begin{aligned}\langle -\Delta\boldsymbol{u} + 2\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_1} + \nabla\pi, \boldsymbol{\lambda}\rangle_{\mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)\times\mathbf{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n)} &= \langle \boldsymbol{u}, -\Delta\boldsymbol{\lambda} - 2\frac{\partial\boldsymbol{\lambda}}{\partial x_1}\rangle_{\mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)\times\mathbf{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n)} \\ &\quad -\langle \pi, \operatorname{div}\boldsymbol{\lambda}\rangle_{L^p(\mathbb{R}^n)\times L^{p'}(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Thus, necessarily $-\Delta\boldsymbol{u} + 2\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_1} + \nabla\pi \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)\perp\mathbb{P}_{[1-n/p']}$.
2) The uniqueness is a straightforward consequence of Proposition 5.1, since $(\boldsymbol{u},\pi) \in \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)\times L^p(\mathbb{R}^n)$ satisfying (5.1) with $\boldsymbol{f} = h = 0$ implies that $\boldsymbol{u} \in \mathbb{P}_{[1-n/p]}$ and $\pi = 0$. Namely $(\boldsymbol{u},\pi) \in \boldsymbol{\mathcal{N}}_{[1-n/p]}$.
3) Let us now prove existence. Given $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)\perp\mathbb{P}_{[1-n/p']}$ and $h \in \widetilde{W}_0^{0,p}(\mathbb{R}^n)$ satisfying (5.3), then it is easy to see that $\operatorname{div}\boldsymbol{f} - Th \in W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^n)\perp\mathbb{P}_{[2-n/p']}$. Now setting $m = l = 0$ in Theorem 2.1 1), we see that the Laplace operator defined by

$$\Delta : L^p(\mathbb{R}^n) \to W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^n)\perp\mathbb{P}_{[2-n/p']}$$

is an isomorphism. Thus there exists a unique function $\pi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ such that

$$\Delta\pi = \operatorname{div}\boldsymbol{f} - Th$$

and satisfying the estimate

$$\begin{aligned}\|\pi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\lesssim \|\operatorname{div}\boldsymbol{f} + \Delta h - 2\frac{\partial h}{\partial x_1}\|_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \left(\|\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)} + \|h\|_{\widetilde{W}_0^{0,p}(\mathbb{R}^n)}\right).\end{aligned} \tag{5.5}$$

Hence, $\boldsymbol{f} - \nabla\pi \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)$. Furthermore, since the polynomials of $\mathbb{P}_{[1-n/p']}$ are at most constants, for any $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{P}_{[1-n/p']}$, we can write

$$\langle \nabla\pi, \boldsymbol{\lambda}\rangle_{\mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)\times \mathbf{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n)} = \langle \pi, \operatorname{div}\, \boldsymbol{\lambda}\rangle_{L^p(\mathbb{R}^n)\times L^{p'}(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

We deduce that $\boldsymbol{f} - \nabla\pi \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}_{[1-n/p']}$. By virtue of Theorem 4.5, there exists a vector field $\boldsymbol{u} \in \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ such that

$$-\Delta\boldsymbol{u} + 2\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} = \boldsymbol{f} - \nabla\pi,$$

with the estimate

$$\inf_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{P}_{[1-n/p]}} \|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\lambda}\|_{\widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \left(\|\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla\pi\|_{\mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)} \right). \tag{5.6}$$

From (5.5) and (5.6), we obtain (5.4). It remains to prove that div $\boldsymbol{u} = h$. Let us notice that div $\boldsymbol{u} - h \in L^p(\mathbb{R}^n)$ satisfies

$$T(\operatorname{div}\, \boldsymbol{u} - h) = 0. \tag{5.7}$$

Thanks to Proposition 4.4, we deduce that div $\boldsymbol{u} - h$ is a polynomial of $L^p(\mathbb{R}^n)$ which implies that div $\boldsymbol{u} = h$, and this ends the proof. ∎

For our next existence result, we need to prove a preliminary result on polynomials belonging to $\mathbb{Q}_k^+$. To that end, we first begin with the following lemma.

LEMMA 5.3. *Let $p \in \mathbb{P}_\ell$ be a polynomial not depending of the variable x_i for some i, $2 \le i \le n$. Then there exists a polynomial $q \in \mathbb{Q}_{\ell+2}$, not depending on x_i such that*

$$p = -\Delta q + 2\frac{\partial q}{\partial x_1}.$$

Proof. The proof is analogous to that of Lemma 4.14. ∎

PROPOSITION 5.4. *Let $\ell \ge 0$ be an integer. Then we have*

$$\mathbb{Q}_{\ell+1}^+ = \operatorname{div}\, (\mathbb{Q}_\ell^+).$$

Proof. Let us begin with $\ell = 0$, and $p = c \in \mathbb{R}$. Let $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{P}_1$, such that $\lambda_1 = 0$ and for any integer $i \ge 2$, $\lambda_i = \frac{1}{n-1} c x_i$. Then we easily see that $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{Q}_1^+$ and

$$\operatorname{div}\, \boldsymbol{\lambda} = c.$$

Suppose now $\ell \ge 1$ and $p \in \mathbb{Q}_\ell^+$. Then, for any integer $i \ge 2$, $\frac{\partial p}{\partial x_i}(x_i = 0)$ is a polynomial of $\mathbb{P}_{\ell-1}$ not depending on x_i. Thanks to the previous lemma, there exists a polynomial $h_i \in \mathbb{Q}_{\ell+1}$, independent with respect to x_i such that

$$-\Delta h_i + 2\frac{\partial h_i}{\partial x_1} = \frac{\partial p}{\partial x_i}(x_i = 0).$$

Next, set $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ the polynomial such that $\lambda_1 = 0$ and for any integer $i \geq 2$,

$$\lambda_i = \frac{1}{n-1}\int_0^{x_i} p(x_1, ..., x_{i-1}, t, x_{i+1}, ..., x_n)dt + h_i.$$

One can verifies that $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{Q}^+_{\ell+1}$ and satisfies

$$\operatorname{div}\, \boldsymbol{\lambda} = p,$$

which ends the proof of the proposition. ■

We are now ready to prove our next result.

THEOREM 5.5. *Let $m \geq 2$ be an integer and suppose that $n/p \neq \{1, ..., m\}$ and $n/p' \neq 1$ if $m = 2$. Let $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)$ and $h \in \widetilde{W}_0^{m-1,p}(\mathbb{R}^n)$. Then the Oseen system* (5.1) *has a unique solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in (\widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) \times W_0^{m-1,p}(\mathbb{R}^n))/\boldsymbol{\mathcal{N}}_{[m-n/p]}$. Moreover, the following estimate holds*

$$\begin{aligned}\inf_{(\boldsymbol{\lambda},\mu)\in\boldsymbol{\mathcal{N}}_{[m-n/p]}} & \left(\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\lambda}\|_{\widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} + \|\pi+\mu\|_{W_0^{m-1,p}(\mathbb{R}^n)}\right) \\ & \lesssim \left(\|\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{W}_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)} + \|h\|_{\widetilde{W}_0^{m-1,p}(\mathbb{R}^n)}\right).\end{aligned} \tag{5.8}$$

PROOF OF THEOREM 5.5

1) If $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) \times W_0^{m-1,p}(\mathbb{R}^n)$ satisfies (5.1), then from Proposition 5.1, $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{\mathcal{N}}_{[m-n/p]}$.
2) The beginning of the proof of existence is similar to that of the preceding theorem. Given $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)$ and $h \in \widetilde{W}_0^{m-1,p}(\mathbb{R}^n)$, we have $\operatorname{div}\, \boldsymbol{f} - Th \in W_0^{m-3,p}(\mathbb{R}^n)$. Considering first the case $m \geq 3$, and using Theorem 2.1 1), we deduce the existence a function $\pi \in W_0^{m-1,p}(\mathbb{R}^n)$ such that

$$\Delta\pi = \operatorname{div}\, \boldsymbol{f} - Th.$$

If $m = 2$, then, we easily see that $\operatorname{div}\, \boldsymbol{f} - Th \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}_{[1-n/p']}$. Again from Theorem 2.1, there exists a unique function $\pi \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ satisfying the previous equality. Thus summarizing, we conclude that for $m \geq 2$, there exists a function $\pi \in W_0^{m-1,p}(\mathbb{R}^n)$ satisfying the previous Laplace equation. Next, we see that $\boldsymbol{f} - \nabla\pi \in \mathbf{W}_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)$. Thanks to Theorem 4.6, there exists a vector field $\boldsymbol{u} \in \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ satisfying

$$-\Delta\boldsymbol{u} + 2\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_1} = \boldsymbol{f} - \nabla\pi.$$

It follows that $\operatorname{div}\, \boldsymbol{u} - h \in \mathbf{W}_0^{m-1,p}(\mathbb{R}^n)$ verifies

$$T(\operatorname{div}\, \boldsymbol{u} - h) = 0.$$

Therefore, div $\boldsymbol{u} - h = q \in \mathbb{Q}^+_{[m-1-n/p]}$. Proposition 5.4 implies that there exists a polynomial $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{Q}^+_{[m-n/p]} \subset \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ such that

$$\text{div } \boldsymbol{\lambda} = q.$$

Thus, $(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\lambda}, \pi) \in \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) \times W_0^{m-1,p}(\mathbb{R}^n)$ is a solution of the system (5.1). ■

Theorem 5.6. *Let $m \geq 2$ be an integer. Suppose that $n/p' \neq \{1, ..., m\}$ and $n/p \neq \{1, 2[m/2]+2-m\}$. Let $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_0^{-m,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}_{[m-n/p']}$ and $h \in \widetilde{W}_0^{-m+1,p}(\mathbb{R}^n) \perp\perp \mathbb{P}_{[m+1-n/p']}$. Then the Oseen system* (5.1) *has a unique solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in ((\widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{-m+2,p}(\mathbb{R}^n) \perp\perp \mathbb{P}_{[m-n/p']}) \times W_0^{-m+1,p}(\mathbb{R}^n))$. Moreover, the following estimate holds*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{-m+2,p}(\mathbb{R}^n)} + \|\pi\|_{W_0^{-m+1,p}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \left(\|\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{W}_0^{-m,p}(\mathbb{R}^n)} + \|h\|_{\widetilde{W}_0^{-m+1,p}(\mathbb{R}^n)} \right). \tag{5.9}$$

Proof of Theorem 5.6

The proof is again similar to that of the previous ones. Given $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_0^{-m,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}_{[m-n/p']}$ and $h \in \widetilde{W}_0^{-m+1,p}(\mathbb{R}^n) \perp\perp \mathbb{P}_{[m+1-n/p']}$, then div $\boldsymbol{f} - Th \in \mathbf{W}_0^{-m-1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}_{[m+1-n/p']}$. Now using the isomorphism of the Laplace operator defined by

$$\Delta \ : \ W_0^{-m+1,p}(\mathbb{R}^n) \to W_0^{-m-1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}_{[m+1-n/p']},$$

there exists a unique function $\pi \in W_0^{-m+1,p}(\mathbb{R}^n)$ such that

$$\Delta\pi = \text{div } \boldsymbol{f} - Th.$$

Now since $\Delta\pi \in W_0^{-m-1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}_{[m+1-n/p']}$, we deduce that $\nabla\pi \in \mathbf{W}_0^{-m,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}_{[m-n/p']}$ which implies that $\boldsymbol{f} - \nabla\pi \in \mathbf{W}_0^{-m,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{P}_{[m-n/p']}$. Hence using Theorem 4.7, there exists a unique vector field $\boldsymbol{u} \in \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{-m+2,p}(\mathbb{R}^n) \perp\perp \mathbb{P}_{[m-n/p']})$ such that

$$-\Delta \boldsymbol{u} + 2\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} = \boldsymbol{f} - \nabla\pi.$$

Finally, since the space $\mathbf{W}_0^{-m+1,p}(\mathbb{R}^n)$ does not contain polynomials, we easily deduce that div $\boldsymbol{u} = h$ which ends the proof. ■

Appendix A. Proof of Proposition 3.2.

Suppose that $n \geq 3$

(a) We have

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{O}(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} \quad = \quad \int_{|\boldsymbol{x}| \geq 2x_1} |\mathcal{O}(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} + \int_{|\boldsymbol{x}| \leq 2x_1} |\mathcal{O}(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x}$$

If $|\boldsymbol{x}| \geq 2x_1$, then (2.1) gives

$$|\mathcal{O}(\boldsymbol{x})| \leq c\frac{(1+|\boldsymbol{x}|)^{(n-3)/2}}{|\boldsymbol{x}|^{n-2}} e^{x_1 - |\boldsymbol{x}|} \leq c\frac{(1+|\boldsymbol{x}|)^{(n-3)/2}}{|\boldsymbol{x}|^{n-2}} e^{-|\boldsymbol{x}|/2},$$

Thus,

$$\int_{|\boldsymbol{x}|\geq 2x_1} |\mathcal{O}(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+|\boldsymbol{x}|)^{(n-3)/2}}{|\boldsymbol{x}|^{p(n-2)}} e^{-p|\boldsymbol{x}|/2} dx < +\infty,$$

if $p(n-2) < n$. Now, let α be a real, $0 < \alpha < 1$. Using (2.1) in each region $\{\boldsymbol{x};\ (1+\alpha^{k+1})x_1 \leq |\boldsymbol{x}| \leq (1+\alpha^k)x_1\}$ gives

$$\begin{aligned}
&\int_{|\boldsymbol{x}|\leq 2x_1} |\mathcal{O}(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{(1+\alpha^{k+1})x_1\leq|\boldsymbol{x}|\leq(1+\alpha^k)x_1} |\mathcal{O}(\boldsymbol{x})|^p dx. \\
&\leq c_2 \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\int_{[(1+\alpha^{k+1})^2-1]^{1/2}x_1}^{[(1+\alpha^k)^2-1]^{1/2}x_1} \rho_1^{n-2} d\rho_1 \right) \frac{(1+x_1)^{(n-3)/2} e^{-p\alpha^{k+1}x_1}}{x_1^{(n-2)p}} dx_1, \\
&\leq c_3(\alpha) \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k \int_0^{+\infty} \frac{(1+x_1)^{(n-3)/2} e^{-p\alpha^{k+1}x_1}}{x_1^{(n-2)p-n+1}} dx_1, \\
&\leq c_4(\alpha) \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^{[(n-1)p/2-n+1](k+1)} \int_0^{+\infty} \frac{(1+t)^{(n-3)/2} e^{-pt}}{t^{(n-2)p-n+1}} dt,
\end{aligned}$$

where $\rho_1 = (x_2^2 + ... + x_n^2)^{1/2}$. Hence,

$$\int_{|\boldsymbol{x}|\leq 2x_1} |\mathcal{O}(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} < +\infty$$

if $2 < p < n/(n-2)$. This condition is possible only if $n = 3$, and this ends the proof of part (a).

(b) If $|\boldsymbol{x}| \geq 2x_1$, then (2.1) gives again

$$|\mathcal{O}(\boldsymbol{x}) - g_2(\boldsymbol{x})| \leq c \frac{(1+|\boldsymbol{x}|)^{(n-3)/2}}{|\boldsymbol{x}|^{n-2}} e^{x_1-|\boldsymbol{x}|} |1-e^{-x_1}| \leq c \frac{(1+|\boldsymbol{x}|)^{(n-3)/2}}{|\boldsymbol{x}|^{n-3}} e^{-|\boldsymbol{x}|/2},$$

Similarly, in each region $\{\boldsymbol{x};\ (1+\alpha^{k+1})x_1 \leq |\boldsymbol{x}| \leq (1+\alpha^k)x_1\}$, we have

$$\begin{aligned}
|\mathcal{O}(\boldsymbol{x}) - g_2(\boldsymbol{x})| &\leq c_1(\alpha) \frac{(1+x_1)^{(n-3)/2}}{x_1^{n-2}} e^{x_1-|\boldsymbol{x}|} |1-e^{-x_1}| \\
&\leq c_2(\alpha) \frac{(1+x_1)^{(n-5)/2}}{x_1^{n-3}} e^{-\alpha^{k+1}x_1},
\end{aligned}$$

where we used the inequality $(1+x_1)|1-e^{-x_1}| \leq cx_1$. The constants c_1 and c_2 do not depend on k. We prove similarly that

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{O}(\boldsymbol{x}) - g_2|^p d\boldsymbol{x} < +\infty,$$

if $2 < p < n/(n-3)$, which is only possible if $3 \leq n \leq 5$. If $n = 3$, we have clearly $\mathcal{O}(\boldsymbol{x}) - g_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Appendix B. Proof of Corollary 3.4.

Part (a) follows from Proposition 3.2 and Young's inequality

$$\|\mathcal{O} * f\|_{L^r(\mathbb{R}^3)} \lesssim \|\mathcal{O}\|_{L^\theta(\mathbb{R}^3)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)},$$

with

$$\frac{1}{\theta} = 1 + \frac{1}{r} - \frac{1}{p} \text{ (hence } 2 < \theta < 3) \ .$$

When $r = p_2^*$, $1 < p < 3/2$, one can use the inequality $|\mathcal{O} * f| \leq I_2(|f|)$, where $I_2(f)$ is the Riesz potential of f defined by (cf. [24])

$$I_2(f)(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^{n-2}}. \tag{5.10}$$

Part (b) comes also from Proposition 3.2 and Young's inequality.

Part (c) follows from the following lemma combined with Marcinkiewicz interpolation theorem (see for instance [24], Appendix B).

Lemma 5.7. *Suppose that $1 < p < 3/2$ and $n = 3$. If $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ then*

$$m(\{\boldsymbol{x};\ |(\mathcal{O}(\boldsymbol{x}) - g_2) * f| > \lambda\} \leq \left(A_p \frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}}{\lambda} \right)^q,$$

where m denotes the Lebesgue measure and

$$q = \frac{p(p+3)}{(3-2p)}.$$

Proof. Following Stein (see [24], Chap. V. 1.2 Theorem 1), we set

$$\begin{array}{rclrcl} K_1(\boldsymbol{x}) & = & \mathcal{O}(\boldsymbol{x}) - g_2(\boldsymbol{x}) \text{ if } |\boldsymbol{x}| \leq \mu, & K_1(\boldsymbol{x}) & = & 0 \text{ if } |\boldsymbol{x}| > \mu \\ K_2(\boldsymbol{x}) & = & \mathcal{O}(\boldsymbol{x}) - g_2(\boldsymbol{x}) \text{ if } |\boldsymbol{x}| > \mu, & K_2(\boldsymbol{x}) & = & 0 \text{ if } |\boldsymbol{x}| \leq \mu \end{array}$$

We suppose without loss of generality that $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 1$. Then,

$$|K_1(\boldsymbol{x})| \leq c \frac{|e^{x_1 - |\boldsymbol{x}|} - e^{-|\boldsymbol{x}|}|}{|\boldsymbol{x}|} \leq c \frac{|x_1|}{|\boldsymbol{x}|} \leq c,$$

and we deduce that $K_1 \in L^1(\mathbb{R}^3)$, Moreover,

$$\|K_1\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \leq c \int_{|\boldsymbol{x}| \leq \mu} d\boldsymbol{x} = \mu^3.$$

On the other hand,

$$\|K_2 * f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \|K_2\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^3)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}.$$

We have also $|K_2(\boldsymbol{x})| \leq \dfrac{c}{|\boldsymbol{x}|}$. Thus,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |K_2(\boldsymbol{x})|^{p'} d\boldsymbol{x} \quad \leq \quad c \int_{|\boldsymbol{x}| \geq \mu} \frac{1}{|\boldsymbol{x}|^{p'}} dx = \mu^{3-p'}.$$

We choose $\mu = \lambda^{p'/(3-p')}$. Hence,

$$\|K_2 * f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \|K_2\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^3)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq \lambda,$$

and

$$m(\{\boldsymbol{x};\ |K_2 * f| > \lambda\}) = 0.$$

Moreover,

$$\|K_1\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \leq \lambda^{3p'/(3-p')}.$$

We get

$$\frac{\|K_1 * f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^2)}}{\lambda^p} \leq \lambda^{3qp/(3-q)-p} = \lambda^{-(p+3)p/(3-2p)}.$$

Thus,

$$\begin{aligned} m(\{\boldsymbol{x};\ |(\mathcal{O}(\boldsymbol{x}) - g_2) * f| > \lambda\}) &\leq m(\{\boldsymbol{x};\ |K_1 * f| > \lambda\}) + m(\{\boldsymbol{x};\ |K_2 * f| > \lambda\}). \\ &\lesssim \lambda^{-p} \|K_1 * f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)} \\ &\lesssim \lambda^{-p} \|K_1\|^p_{L^1(\mathbb{R}^3)} \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)} \\ &\lesssim \lambda^{3p'p/(3-p')-p} = \lambda^{-(p+3)p/(3-2p)}. \end{aligned}$$

■

REFERENCES

[1] F. Alliot and C. Amrouche. Problème de Stokes dans $\mathbf{R}^n$ et espaces de Sobolev avec poids. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 325(12):1247–1252, 1997.

[2] F. Alliot and C. Amrouche. The Stokes problem in $\mathbf{R}^n$: an approach in weighted Sobolev spaces. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 9(5):723–754, 1999.

[3] C. Amrouche, V. Girault, and J. Giroire. Weighted Sobolev spaces for Laplace's equation in $\mathbf{R}^n$. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 73(6):579–606, 1994.

[4] C Amrouche and U. Razafison. The stationary Oseen equations in $\mathbf{R}^3$. an approach in weighted sobolev spaces. *(submitted)*.

[5] C Amrouche and U. Razafison. Weighted sobolev spaces for a scalar model of the stationary Oseen equations in $\mathbf{R}^3$. *(submitted)*.

[6] Ch. Amrouche and U. Razafison. Espaces de sobolev avec poids et équation scalaire d'Oseen equation dans $\mathbf{R}^n$. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I, 337:761–766, 2003.

[7] T. Z. Boulmezaoud. On the Stokes system and on the biharmonic equation in the half-space: an approach via weighted Sobolev spaces. *Math. Methods Appl. Sci.*, 25(5):373–398, 2002.

[8] T. Z. Boulmezaoud. On the Laplace operator and on the vector potential problems in the half-space: an approach using weighted spaces. *Math. Methods Appl. Sci.*, 26(8):633–669, 2003.

[9] A.-P. Calderón. Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions. In *Proc. Sympos. Pure Math., Vol. IV*, pages 33–49. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1961.

[10] R. Farwig. The stationary exterior 3D-problem of Oseen and Navier-Stokes equations in anisotropically weighted Sobolev spaces. *Math. Z.*, 211(3):409–447, 1992.

[11] Reinhard Farwig. A variational approach in weighted Sobolev spaces to the operator $-\Delta + \partial/\partial x_1$ in exterior domains of $\mathbf{R}^3$. *Math. Z.*, 210(3):449–464, 1992.

[12] Reinhard Farwig. The stationary Navier-Stokes equations in a 3D-exterior domain. In *Recent topics on mathematical theory of viscous incompressible fluid (Tsukuba, 1996)*, volume 16 of *Lecture Notes Numer. Appl. Anal.*, pages 53–115. Kinokuniya, Tokyo, 1998.

[13] Robert Finn. On the exterior stationary problem for the Navier-Stokes equations, and associated perturbation problems. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 19:363–406, 1965.

[14] G. P. Galdi. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations. Vol. I*, volume 38 of *Springer Tracts in Natural Philosophy.* Springer-Verlag, New York, 1994.

[15] V. Girault. The divergence, curl and Stokes operators in exterior domains of $\mathbf{R}^3$. In *Recent developments in theoretical fluid mechanics (Paseky, 1992)*, volume 291 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 34–77. Longman Sci. Tech., Harlow, 1993.

[16] V. Girault, J. Giroire, and A. Sequeira. Formulation variationnelle en fonction courant-tourbillon du problème de Stokes extérieur dans des espaces de Sobolev à poids. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 313(8):499–502, 1991.

[17] V. Girault and A. Sequeira. A well-posed problem for the exterior Stokes equations in two and three dimensions. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 114(4):313–333, 1991.

[18] B. Hanouzet. Espaces de Sobolev avec poids application au problème de Dirichlet dans un demi espace. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 46:227–272, 1971.

[19] Stanislav Kračmar, Antonín Novotný, and Milan Pokorný. Estimates of Oseen kernels in weighted L^p spaces. *J. Math. Soc. Japan*, 53(1):59–111, 2001.

[20] A. Kufner. *Weighted Sobolev spaces.* A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons Inc., New York, 1985.

[21] P. I. Lizorkin. (L_p, L_q)-multipliers of Fourier integrals. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 152:808–811, 1963.

[22] J. W. Oseen. *Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik.* Leipzig: Akademishe Verlagsgesellschaft. 1927.

[23] M. Pokorný. *Asymptotic behaviour of some equations describing the flow of fluids in unbounded domains.* PhD thesis, Charles University Prague and University of Toulon, 1999.

[24] E. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton Mathematical Series, No. 30. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

Chapitre 5

Le problème stationnaire d'Oseen dans un domaine extérieur

5.1 Introduction et notations

Soit Ω un domaine extérieur de $\mathbb{R}^3$ que l'on supposera connexe et de frontière au moins lipschitzienne. L'objectif de ce chapitre est d'étudier le problème d'Oseen suivant : étant donnés $\boldsymbol{f}$ et g, on cherche un couple $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)$ vérifiant

$$
\begin{aligned}
-\Delta \boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi = \boldsymbol{f} \quad \text{dans } \Omega,\\
\operatorname{div} \boldsymbol{u} = g \quad \text{dans } \Omega,\\
\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_* \quad \text{sur } \partial\Omega.
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Cela revient à étendre le résultat d'existence du théorème 3.34 dans le cas d'un domaine extérieur. Notre approche est basée sur l'idée suivante : pour résoudre un problème linéaire dans un domaine extérieur, il suffit de combiner les résultats obtenus dans l'espace tout entier avec ceux obtenus dans un domaine borné. Cette idée a été proposée par Giroire dans [32], reprise ensuite dans [7] et [3]. Nous commençons donc par étudier le problème d'Oseen dans un domaine borné. Nous analysons ensuite le problème (5.1) d'abord dans le cas hilbertien puis dans le cas général. Nous introduisons l' espace

$$\widetilde{L}^p(\mathbb{R}^3) = \left\{ \tilde{g} \in L^p(\mathbb{R}^3), \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_1} \in W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3) \right\},$$

muni de la norme

$$\|\tilde{g}\|_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R}^3)} = \|\tilde{g}\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_1} \right\|_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3)},$$

et on pose

$$Z_p(\Omega) = \left\{ \tilde{g}|_\Omega, \;\; \tilde{g} \in \widetilde{L}^p(\mathbb{R}^3), \forall \lambda \in \mathbb{P}_{[2-3/p']}, \;\langle \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_1}, \lambda \rangle_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{2,p'}(\mathbb{R}^3)} = 0 \right\} \subset L^p(\Omega).$$

L'espace $Z_p(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|g\|_{Z_p(\Omega)} = \inf_{\{\tilde{g} \in \widetilde{L}^p(\mathbb{R}^3),\, \tilde{g}|_\Omega = g\}} \|\tilde{g}\|_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R}^3)}.$$

Nous introduisons aussi l'espace suivant

$$\mathbf{V}(\Omega) = \{ \boldsymbol{v} \in \overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_0^{1,2}(\Omega), \;\; \text{div } \boldsymbol{v} = 0 \text{ dans } \Omega \}.$$

Nous définissons à présent l'opérateur

$$\mathbf{T} \; : \; (\boldsymbol{u}, \pi) \longrightarrow \left(-\Delta \boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi, -\text{div } \boldsymbol{u} \right).$$

Définition 5.1 On pose,
1) si $1 < p < 4$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{N}}_0^p(\Omega) = \{ (\boldsymbol{u}, \pi) \in (\boldsymbol{L}^{r_2}(\Omega) \cap \;\overset{\circ}{\widetilde{\boldsymbol{W}}}{}_0^{1,p}(\Omega)) \times L^p(\Omega), \\ -\Delta \boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi = \boldsymbol{0}, \; \text{div } \boldsymbol{u} = 0 \text{ dans } \Omega \}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

où r_2 est donné par la définition 3.7.

2) Si $p \geq 4$,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_0^p(\Omega) = \{(\boldsymbol{u}, \pi) \in \overset{\circ}{\widetilde{\boldsymbol{W}}}{}_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega), \\ -\Delta \boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi = \mathbf{0},\ \operatorname{div}\ \boldsymbol{u} = 0 \text{ dans } \Omega\}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

On suppose que R est un réel strictement positif fixé. Nous introduisons la partition de l'unité suivante : soient deux fonctions $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ telle que :

$$\begin{aligned} & 0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq 1, \quad \varphi_1 + \varphi_2 = 1 \text{ dans } \mathbb{R}^3, \\ & \varphi_2 = 1 \text{ dans } B_R, \quad \text{Supp } \varphi_2 \subset B_{R+1}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

5.2 Résultats préliminaires

Ce paragraphe est consacré au problème (5.1) lorsque celui-ci est posé dans un domaine borné. Par une application directe du théorème de Lax-Migram, nous obtenons facilement le résultat suivant :

Proposition 5.2 *Soit Ω' un ouvert borné. On suppose $g = 0$, $\boldsymbol{u}_* = \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega')$. Alors le problème* (5.1) *possède une unique solution* $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{H}^1(\Omega') \times (L^2(\Omega')/\mathbb{R})$ *satisfaisant la relation*

$$\|\nabla \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega')} + \inf_{K \in \mathbb{R}} \|\pi + K\|_{L^2(\Omega')} \leq C \|\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega')}.$$

Nous rappelons à présent un résultat sur le problème de Stokes. Le lecteur pourra consulter une preuve dans [5].

Théorème 5.3 *Soit Ω' un ouvert borné à frontière $\mathcal{C}^{1,1}$. Soient $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}^{-1,p}(\Omega')$, $g \in L^p(\Omega)$ et $\boldsymbol{u}_* \in \boldsymbol{W}^{1/p',p}(\partial\Omega')$ satisfaisant la condition de compatibilité suivante*

$$\int_{\Omega'} g(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega'} \boldsymbol{u}_* . \boldsymbol{n}\, ds. \tag{5.5}$$

Alors, le problème de Stokes suivant

$$-\Delta \boldsymbol{u} + \nabla \pi = \boldsymbol{f},\ \operatorname{div}\ \boldsymbol{u} = g \text{ dans } \Omega',\ \ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_* \text{ sur } \partial\Omega',$$

possède une unique solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega') \times (L^p(\Omega')/\mathbb{R})$. *De plus nous avons l'estimation suivante :*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega')} + \inf_{K\in\mathbb{R}} \|\pi + K\|_{L^p(\Omega')} \leq C\left(\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}^{-1,p}(\Omega')} + \|g\|_{L^p(\Omega')} + \|\boldsymbol{u}_*\|_{\boldsymbol{W}^{1/p',p}(\partial\Omega')}\right).$$

Grâce au théorème 5.3 et à la proposition 5.2, nous pouvons montrer la proposition suivante :

Proposition 5.4 *Soit* Ω' *un ouvert borné à frontière* $\mathcal{C}^{1,1}$. *On suppose* $p > 2$, $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}^{-1,p}(\Omega')$, $g = 0$ *et* $\boldsymbol{u}_* = \boldsymbol{0}$. *Alors, le problème* (5.1) *possède une unique solution* $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega') \times (L^p(\Omega')/\mathbb{R})$ *satisfaisant la relation*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega')} + \inf_{K\in\mathbb{R}} \|\pi + K\|_{L^p(\Omega')} \leq C\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}^{-1,p}(\Omega')},$$

où $C > 0$ *dépend de* Ω' *et* p.

Preuve : Comme $p > 2$ et $\boldsymbol{f}$ appartenant à $\boldsymbol{W}^{-1,p}(\Omega')$, alors $\boldsymbol{f}$ appartient à $\mathbf{H}^{-1}(\Omega')$. Par la proposition 5.2, le problème (5.1) possède alors une unique solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{H}^1(\Omega') \times (L^2(\Omega')/\mathbb{R})$. Cela implique donc que $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega')$. Par les injections de Sobolev, nous obtenons

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega') \subset \boldsymbol{W}^{-1,q}(\Omega'), \quad \forall q \in]1, 6].$$

(i) si $2 < p \leq 6$, $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1}$ appartient à $\boldsymbol{W}^{-1,p}(\Omega')$ et par conséquent $\boldsymbol{f} - \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1}$ appartient aussi à $\boldsymbol{W}^{-1,p}(\Omega')$. D'après le théorème 5.3, Il existe donc un unique couple $(\boldsymbol{v}, \eta) \in \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega') \times (L^p(\Omega')/\mathbb{R})$ solution de

$$-\Delta \boldsymbol{v} + \nabla \eta = \boldsymbol{f} - \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1}, \text{ div } \boldsymbol{v} = 0 \text{ dans } \Omega', \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \text{ sur } \partial\Omega'.$$

Nous en déduisons que $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega')$ et $\pi = \eta \in L^p(\Omega')/\mathbb{R}$ ce qui établit le résultat.
(ii) Si $6 < p < \infty$, comme $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}^{-1,p}(\Omega')$, alors $\boldsymbol{f}$ appartient aussi à $\boldsymbol{W}^{-1,6}(\Omega')$. On utilise alors le résultat précedent pour en déduire qu'il existe un unique couple $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{W}_0^{1,6}(\Omega') \times (L^6(\Omega')/\mathbb{R})$ solution de (5.1). Cela entraîne que $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{L}^6(\Omega')$,

et, par les injections de Sobolev, nous en déduisons que

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{L}^6(\Omega') \subset \boldsymbol{W}^{-1,q}(\Omega') \quad 1 < q < \infty.$$

Nous procédons ensuite comme précédemment pour finir la preuve. ■

En utilisant le lemme 3.3 de [5], le problème non homogène est immédiatement résolvable.

Proposition 5.5 *Soit Ω' un ouvert borné à frontière $\mathcal{C}^{1,1}$. On suppose $p \geq 2$, $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}^{-1,p}(\Omega')$, $g \in L^p(\Omega)$ et $\boldsymbol{u}_* \in \boldsymbol{W}^{1/p',p}(\partial\Omega')$ satisfaisant la condition de compatibilité* (5.5)*. Alors, le problème* (5.1) *possède une unique solution* $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega') \times (L^p(\Omega')/\mathbb{R})$*. De plus nous avons l'estimation suivante :*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega')} + \inf_{K\in\mathbb{R}} \|\pi + K\|_{L^p(\Omega')} \leq C \left(\|\boldsymbol{f}\,\|_{\boldsymbol{W}^{-1,p}(\Omega')} + \|g\|_{L^p(\Omega')} + \|\boldsymbol{u}_*\|_{\boldsymbol{W}^{1/p',p}(\partial\Omega')} \right).$$

En particulier cette proposition montre que si $p \geq 2$, l'opérateur $\mathbf{T}$

$$\mathbf{T} \ : \ \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega') \times (L^p(\Omega')/\mathbb{R}) \longrightarrow \boldsymbol{W}^{-1,p}(\Omega') \times (L^p(\Omega')\bot\mathbb{R})$$

est un isomorphisme. Maintenant par dualité, nous en déduisons que si $1 < p \leq 2$, l'opérateur $\mathbf{T}^*$

$$\mathbf{T}^* \ : \ \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega') \times (L^p(\Omega')/\mathbb{R}) \longrightarrow \boldsymbol{W}^{-1,p}(\Omega') \times (L^p(\Omega')\bot\mathbb{R})$$

est un isomorphisme. Ce résultat nous permet d'établir l'équivalent de la proposition 5.4 pour le cas $1 < p < 2$.

Proposition 5.6 *Soit Ω' un ouvert borné à frontière $\mathcal{C}^{1,1}$. On suppose $1 < p < 2$, $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}^{-1,p}(\Omega')$, $g = 0$ et $\boldsymbol{u}_* = \mathbf{0}$. Alors, le problème* (5.1) *possède une unique solution* $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega') \times (L^p(\Omega')/\mathbb{R})$ *satisfaisant la relation*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega')} + \inf_{K\in\mathbb{R}} \|\pi + K\|_{L^p(\Omega')} \leq C\|\boldsymbol{f}\,\|_{\boldsymbol{W}^{-1,p}(\Omega')}.$$

Preuve : On définit Ω'' le symétrique de Ω par rapport à l'origine des coordonnées. Maintenant, si $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}^{-1,p}(\Omega')$ alors pour tout $\ell = 1, 2, 3$, on peut écrire $f_\ell = \operatorname{div} \mathbf{F}_\ell$

avec $\mathbf{F}_\ell \in \boldsymbol{L}^p(\Omega')$. Pour tout $\ell = 1, 2, 3$ et pour presque tout $\boldsymbol{x} \in \Omega'$, on pose $\mathbf{H}_\ell(-\boldsymbol{x}) = -\mathbf{F}_\ell(\boldsymbol{x})$ et $h_\ell = \operatorname{div} \mathbf{H}_\ell$. Nous avons alors $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{W}^{-1,p}(\Omega'')$. De plus, pour tout $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega')$, $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega'')$ telles que $\forall \boldsymbol{x} \in \Omega'$, $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\psi}(-\boldsymbol{x})$, nous avons $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{D}}'(\Omega') \times \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega')} = \langle \boldsymbol{h}, \boldsymbol{\psi} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{D}}'(\Omega'') \times \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega'')}$. D'après l'isomorphisme de l'opérateur $\mathbf{T}^*$, ci-dessus, il existe un unique couple $(\boldsymbol{v}, q) \in \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega'') \times (L^p(\Omega'')/\mathbb{R})$ solution de

$$-\Delta \boldsymbol{v} - \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_1} + \nabla q = \boldsymbol{h}, \ \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \text{ dans } \Omega'', \ \ \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega''.$$

Il suffit ensuite de poser, pour presque tout $\boldsymbol{x} \in \Omega'$, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}(-\boldsymbol{x})$ et $\pi(\boldsymbol{x}) = -q(-\boldsymbol{x})$. Le couple $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega') \times (L^p(\Omega')/\mathbb{R})$ satisfait alors (5.1). ■

Nous pouvons donc établir le résultat suivant

Proposition 5.7 *Soit Ω' un ouvert borné à frontière $\mathcal{C}^{1,1}$. On suppose de plus que $1 < p < \infty$, $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}^{-1,p}(\Omega')$, $g \in L^p(\Omega')$ et $\boldsymbol{u}_* \in \boldsymbol{W}^{1/p',p}(\partial\Omega')$ satisfaisant la condition de compatibilité* (5.5). *Alors, le problème* (5.1) *possède une unique solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega') \times (L^p(\Omega')/\mathbb{R})$. De plus nous avons l'estimation*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega')} + \inf_{K \in \mathbb{R}} \|\pi + K\|_{L^p(\Omega')} \leq C \left(\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}^{-1,p}(\Omega')} + \|g\|_{L^p(\Omega')} + \|\boldsymbol{u}_*\|_{\boldsymbol{W}^{1/p',p}(\partial\Omega')} \right).$$

Remarque 5.8 Il est bien sûr immédiat que tous les arguments utilisés pour obtenir le résultat général de la proposition 5.7 peuvent être utilisés pour le modèle scalaire. Cette fois-ci, ce sont les résultats sur le problème de Dirichlet pour le laplacien (voir par exemple [33] ou [39]) qu'on utilise. Plus précisément on peut montrer que si $1 < p < \infty$, $f \in W^{-1,p}(\Omega')$ et $u_* \in W^{1/p',p}(\partial\Omega')$, le problème

$$-\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x_1} = f \text{ dans } \Omega', \ \ u = u_* \text{ sur } \partial\Omega'$$

possède une unique solution $u \in W^{1,p}(\Omega')$ satisfaisant l'estimation

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega')} \leq C \left(\|f\|_{W^{-1,p}(\Omega')} + \|u_*\|_{W^{1/p',p}(\partial\Omega')} \right).$$

5.3 Le cas hilbertien

Nous commençons tout d'abord par montrer l'existence de solutions faibles du problème (5.1). Cette notion de solutions faibles a déjà été introduite par Finn [25] et reprise ensuite par Galdi [27].

Définition 5.9 Un champ de vecteurs $\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ est appelé solution faible du problème d'Oseen (5.1) si

1. $\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, tel que $\nabla \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ et $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ sur $\partial\Omega$;

2. div $\boldsymbol{u} = 0$ dans Ω ;

3. Pour tout $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}(\Omega) = \{\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega),\ \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} = 0\}$:

$$\int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} \nabla \boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \boldsymbol{u}\, \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_1} d\boldsymbol{x} = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{D}}'(\Omega) \times \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)}. \tag{5.6}$$

Proposition 5.10 *Soit Ω un domaine extérieur de frontière lipschitzienne. On suppose $g = 0$, $\boldsymbol{u}_* = \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\Omega)$. Alors (5.1) possède une solution faible $\boldsymbol{u} \in \overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_0^{1,2}(\Omega)$. De plus, nous avons*

$$\|\nabla \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \leq C \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\Omega)}.$$

Preuve : On considère une suite croissante de réels $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $R_0 > 0$ et $\lim_{n\to\infty} R_n = +\infty$. Comme $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\Omega)$, alors sa restriction à Ω_{R_n} appartient à $\mathbf{H}^{-1}(\Omega_{R_n})$. De plus, nous avons

$$\|\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega_{R_n})} \leq \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\Omega)}. \tag{5.7}$$

Nous approchons le problème (5.1) par une suite de problèmes posés dans les domaines bornés Ω_{R_n} : Chercher $\boldsymbol{u}_n \in \mathbf{V}(\Omega_{R_n})$ telle que

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}(\Omega_{R_n}),\ \int_{\Omega_{R_n}} \nabla \boldsymbol{u}_n \nabla \boldsymbol{\varphi}\, d\boldsymbol{x} + \int_{\Omega_{R_n}} \frac{\partial \boldsymbol{u}_n}{\partial x_1} \boldsymbol{\varphi}\, d\boldsymbol{x} = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega_{R_n}) \times \mathbf{H}^1_0(\Omega_{R_n})}. \tag{5.8}$$

Le théorème de Lax-Milgram nous fournit l'existence d'un unique vecteur $\boldsymbol{u}_n$ appartenant à $\mathbf{V}(\Omega_{R_n})$ solution de (5.8) et vérifiant

$$\|\nabla \boldsymbol{u}_n\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega_{R_n})} \leq \|\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega_{R_n})}. \tag{5.9}$$

Soit maintenant $\tilde{\boldsymbol{u}}_n$ l'extension par zéro de $\boldsymbol{u}_n$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}_{R_n}$. Alors $\tilde{\boldsymbol{u}}_n \in \mathbf{V}(\Omega)$ et de (5.7), (5.9), on obtient

$$\|\nabla \tilde{\boldsymbol{u}}_n\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \leq \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\Omega)}. \tag{5.10}$$

La suite $(\tilde{\boldsymbol{u}}_n)$ est donc bornée dans $\mathbf{V}(\Omega)$ qui est un espace de Hilbert, donc réflexif. Nous pouvons donc en extraire une sous-suite, que nous noterons encore $\tilde{\boldsymbol{u}}_n$, qui converge faiblement vers un élément $\boldsymbol{u}$ dans $\mathbf{V}(\Omega)$. De plus, nous avons

$$\|\nabla \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|\nabla \tilde{\boldsymbol{u}}_n\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \leq \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\Omega)}. \tag{5.11}$$

Il nous reste maintenant à montrer que $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}(\Omega)$ est bien solution faible de (5.1), autrement dit, que $\boldsymbol{u}$ satisfait (5.6). Soit un entier $N > 0$ et $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}(\Omega)$ telle que son support soit inclus dans Ω_{R_N}. De (5.8), pour tout $n \geq N$, nous avons

$$\int_\Omega \nabla \tilde{\boldsymbol{u}}_n \nabla \boldsymbol{\varphi}\, d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}_n}{\partial x_1} \boldsymbol{\varphi}\, d\boldsymbol{x} = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\Omega) \times \mathring{\boldsymbol{W}}_0^{1,2}(\Omega)}. \tag{5.12}$$

Puisque $\tilde{\boldsymbol{u}}_n$ tend faiblement vers $\boldsymbol{u}$ dans $\mathring{\boldsymbol{W}}{}_0^{1,2}(\Omega)$, nous pouvons passer à la limite dans (5.12). Ainsi $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}(\Omega)$ satisfait

$$\int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} \nabla \boldsymbol{\varphi}\, d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \boldsymbol{\varphi}\, d\boldsymbol{x} = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\Omega) \times \mathring{\boldsymbol{W}}_0^{1,2}(\Omega)}. \quad \blacksquare$$

Remarque 5.11 A partir de la proposition 5.10 et par un théorème de G. de Rham [19], nous en déduisons l'existence d'une pression $\pi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $(\boldsymbol{u}, \pi)$ soit solution de (5.1) au sens des distributions. De plus, comme Ω est connexe, π est unique à une constante additive près. Maintenant, comme $\boldsymbol{f} + \Delta \boldsymbol{u} - \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \mathbf{H}^{-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, grâce à un résultat de Tartar [60], nous pouvons montrer que, finalement, $\pi \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Ainsi, le couple $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathring{\boldsymbol{W}}{}_0^{1,2}(\Omega) \times L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ est une solution de (5.1) au sens des distributions.

Notre prochain objectif est de montrer l'équivalent des estimations du théorème 3.34. Autrement dit, nous allons montrer que $(\boldsymbol{u}, \pi)$ appartient à $(\boldsymbol{L}^4(\Omega) \cap \boldsymbol{L}^6(\Omega) \cap \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,2}(\Omega)) \times L^2(\Omega)$. Nous allons, tout d'abord, caractériser l'espace $\boldsymbol{\mathcal{N}}_0^2(\Omega)$.

Proposition 5.12 *Soit Ω un ouvert extérieur de $\mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^2$. On a la caractéristation*

$$\boldsymbol{\mathcal{N}}_0^2(\Omega) = \{(\mathbf{0}, 0)\}.$$

Preuve : Soit $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{\mathcal{N}}_0^2(\Omega)$. Remarquons que d'après le théorème VII.1.1 page 353 de [27], le couple $(\boldsymbol{u}, \pi)$ appartient à $\mathbf{H}^2_{\text{loc}}(\overline{\Omega}) \times H^1_{\text{loc}}(\overline{\Omega})$. Par conséquent la trace normale $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}}$ existe et appartient à $\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ et la restriction de π sur $\partial\Omega$ est un élément de $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Maintenant, pour tout $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$, nous avons

$$\langle -\Delta \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\Omega) \times \mathring{\boldsymbol{W}}_0^{1,2}(\Omega)} + \langle \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1}, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\Omega) \times \mathring{\boldsymbol{W}}_0^{1,2}(\Omega)} + \langle \nabla \pi, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\Omega) \times \mathring{\boldsymbol{W}}_0^{1,2}(\Omega)} = 0.$$

C'est-à-dire, pout tout $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$, nous avons

$$\int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} \nabla \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{x} + \langle \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1}, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\Omega) \times \mathring{\boldsymbol{W}}_0^{1,2}(\Omega)} - \int_\Omega \pi \text{div } \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{x} = 0.$$

Comme $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$ est dense dans $\mathring{\widetilde{\boldsymbol{W}}}{}_0^{1,2}(\Omega)$ (voir la proposition 2.8), la relation précédente est donc vraie pout tout $\boldsymbol{v} \in \mathring{\widetilde{\boldsymbol{W}}}{}_0^{1,2}(\Omega)$. En prenant $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$, nous obtenons

$$\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{u}|^2 d\boldsymbol{x} = 0.$$

Comme $\boldsymbol{u}$ appartient à $\mathring{\boldsymbol{W}}{}_0^{1,2}(\Omega)$, nous en déduisons que $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$. De plus, comme Ω est connexe, cela entraîne que $\nabla \pi = \mathbf{0}$, c'est-à-dire π est une constante de $L^2(\Omega)$, donc $\pi = 0$, ce qui termine la preuve. ■

Théorème 5.13 *Soit Ω un ouvert extérieur de classe C^2. On suppose $g = 0$, $\boldsymbol{u}_* = \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\Omega)$. Alors, le problème (5.1) admet une unique solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in (\boldsymbol{L}^4(\Omega) \cap \boldsymbol{L}^6(\Omega) \cap \mathring{\widetilde{\boldsymbol{W}}}{}_0^{1,2}(\Omega)) \times L^2(\Omega)$. De plus nous avons*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^4(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^6(\Omega)} + \|\nabla \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \right\|_{\boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\Omega)} + \|\pi\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\Omega)}. \quad (5.13)$$

Preuve : Il suffit de montrer que l'opérateur $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T}\ :\ (\boldsymbol{L}^4(\Omega)\cap\boldsymbol{L}^6(\Omega)\cap\ \widetilde{\overset{\circ}{\boldsymbol{W}}}{}^{1,2}_0(\Omega))\times L^2(\Omega)\longrightarrow\boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\Omega)\times\{0\}$$

est un isomorphisme. L'opérateur $\mathbf{T}$ est clairement linéaire et continu. D'après la proposition 5.12, il est aussi injectif. Montrons sa surjection. Soit $\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\Omega)$, alors d'après la remarque 5.11, le problème (5.1) possède une solution $(\boldsymbol{u},\pi)\in\overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}^{1,2}_0(\Omega)\times L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. On étend $\boldsymbol{u}$ et π par zéro dans $\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}$ et on note encore $\boldsymbol{u}$ et π les extensions. Nous avons alors $(\boldsymbol{u},\pi)\in\boldsymbol{W}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)\times L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$. Montrons à présent que $(\boldsymbol{u},\pi)\in(\boldsymbol{L}^4(\Omega)\cap\boldsymbol{L}^6(\Omega))\times L^2(\Omega)$. Nous allons, pour cela, utiliser le théorème 3.34 et il nous faut donc nous ramener à tout l'espace. On suppose que R est un réel suffisamment grand pour que $\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}$ soit inclus dans B_R et nous introduisons la partition de l'unité (5.4). Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}&=\boldsymbol{u}\varphi_1+\boldsymbol{u}\varphi_2=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2\\ \pi&=\pi\varphi_1+\pi\varphi_2=\pi_1+\pi_2.\end{aligned}$$

Le support de φ_2 étant inclus dans Ω_{R+1} et puisque $\boldsymbol{u}_2$ est étendu par zéro dans $\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}$, $\boldsymbol{u}_2$ appartient à $\mathbf{H}^1_0(\Omega_{R+1})$. Par les injections de Sobolev, $\boldsymbol{u}_2$ appartient à $\boldsymbol{L}^6(\Omega_{R+1})$ et nous pouvons conclure que

$$\boldsymbol{u}_2\in(\boldsymbol{L}^4(\Omega)\cap\boldsymbol{L}^6(\Omega))\cap\ \overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}^{1,2}_0(\Omega).$$

De même, comme $\pi\in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, nous avons immédiatement

$$\pi_2\in L^2(\Omega).$$

A présent, un calcul immédiat nous montre qu'au sens des distributions, le couple $(\boldsymbol{u}_1,\pi_1)$ vérifie

$$-\Delta\boldsymbol{u}_1+\frac{\partial\boldsymbol{u}_1}{\partial x_1}+\nabla\pi_1=\tilde{\boldsymbol{f}},\quad\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_1=\tilde{g}\ \text{ dans }\mathbb{R}^3,\tag{5.14}$$

où

$$\tilde{\boldsymbol{f}}=\varphi_1\boldsymbol{f}+\boldsymbol{u}\Delta\varphi_2+2\nabla\boldsymbol{u}\nabla\varphi_2-\boldsymbol{u}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}-\pi\nabla\varphi_2$$

et

$$\tilde{g} = -\boldsymbol{u}_2 \nabla \varphi_2.$$

Puisque $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\Omega)$ et $0 \leq \varphi_1 \leq 1$, nous en déduisons que $\varphi_1 \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3)$. Par ailleurs, puisque $\boldsymbol{u} \in \mathring{\boldsymbol{W}}_0^{1,2}(\Omega)$, $\pi \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ et que le support de φ_2 est inclus dans B_{R+1} , les termes $\boldsymbol{u}\Delta\varphi_2$, $\nabla \boldsymbol{u} \nabla \varphi_2$, $\boldsymbol{u}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}$ et $\pi \nabla \varphi_2$ appartiennent à $\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^3)$. Nous pouvons donc conclure que $\tilde{\boldsymbol{f}} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3)$. Maintenant, par un raisonnement similaire, nous avons $\tilde{g} = -\boldsymbol{u}_2 \nabla \varphi_2 \in L^2(\Omega_{R+1})$. Il est ensuite facile de voir que $\tilde{g} \in L^2(\Omega_{R+1}) \cap H^{-1}(\Omega_{R+1})$ et donc $\tilde{g} \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap W_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3)$. Cela implique que $\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_1} \in W_0^{-2,2}(\mathbb{R}^3)$ et

$$\langle \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_1}, 1 \rangle_{W_0^{-2,2}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{2,2}(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Le théorème 3.34 nous donne alors l'existence d'un unique couple $(\boldsymbol{v}, \eta) \in (\boldsymbol{L}^4(\mathbb{R}^3) \cap \boldsymbol{L}^6(\mathbb{R}^3) \cap \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)) \times L^2(\mathbb{R}^3)$ solution de

$$-\Delta \boldsymbol{v} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_1} + \nabla \eta = \tilde{\boldsymbol{f}}, \quad \text{div } \boldsymbol{v} = \tilde{g}, \text{ dans } \mathbb{R}^3.$$

En posant à présent $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_1 \in \boldsymbol{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^3)$ et $\tau = \eta - \pi_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, il vient

$$-\Delta \boldsymbol{w} + \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x_1} + \nabla \tau = 0, \quad \text{div } \boldsymbol{w} = 0, \text{ dans } \mathbb{R}^3. \tag{5.15}$$

En prenant la divergence de la première équation de (5.15), nous obtenons $\Delta \tau = 0$. Cela entraine que $-\Delta \boldsymbol{w} + \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x_1}$ est harmonique. Par un raisonnement analogue à la preuve de la proposition 3.30, nous obtenons que $\boldsymbol{w}$ est un champ de vecteurs dont chaque composante est un polynôme . Mais l'espace $W_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ ne contenant pas de polynômes nous en déduisons que $\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$. D'où, $\boldsymbol{u}_1$ appartient à $\boldsymbol{L}^4(\Omega) \cap \boldsymbol{L}^6(\Omega) \cap \mathring{\boldsymbol{W}}_0^{1,2}(\Omega)$. De plus nous en déduisons aussi $\nabla \tau = \mathbf{0}$. Ainsi $\tau = c \in \mathbb{R}$ et $\pi_1 = \eta + c$. Nous pouvons donc prendre comme représentant $\pi = \pi_2 + \eta \in L^2(\Omega)$. Nous avons donc montrer que la solution $(\boldsymbol{u}, \pi)$ appartient à $(\boldsymbol{L}^4(\Omega) \cap \boldsymbol{L}^6(\Omega) \cap \mathring{\boldsymbol{W}}_0^{1,2}(\Omega)) \times L^2(\Omega)$. Par ailleurs, de la première équation de (5.1) et par différence nous en déduisons que $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\Omega)$. D'où, $(\boldsymbol{u}, \pi)$ appartient à $(\boldsymbol{L}^4(\Omega) \cap \boldsymbol{L}^6(\Omega) \cap \mathring{\widetilde{\boldsymbol{W}}}_0^{1,2}(\Omega)) \times L^2(\Omega)$ vérifie $\mathbf{T}(\boldsymbol{u}, \pi) = (\boldsymbol{f}, 0)$. ■

Remarque 5.14 Pour la fin de la preuve du théorème 5.13, nous ne pouvions pas utiliser directement la proposition 3.30 car τ appartient à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ et non à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$.

Pour étudier le problème non homogène d'Oseen, nous commençons par montrer l'existence d'un relèvement du terme de bord. Ce résultat s'inspire de celui obtenu par Finn [25]. Le lecteur pourra aussi consulter Galdi [27].

Lemme 5.15 *Soit Ω un ouvert extérieur de frontière lipschitzienne. Soit $\boldsymbol{u}_* \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$. Alors, il existe un vecteur $\boldsymbol{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ telle que*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0 \ \textit{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}_* \ \textit{sur } \partial\Omega \end{aligned} \tag{5.16}$$

et

$$\|\boldsymbol{w}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C\|\boldsymbol{u}_*\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)}. \tag{5.17}$$

Preuve : Pour tout $i = 1, 2, 3$, nous posons

$$\begin{aligned} \sigma_i(\boldsymbol{x}) &= \frac{\partial \mathcal{E}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{u}_* \cdot \boldsymbol{n} \, ds \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{x_i}{|\boldsymbol{x}|^3} \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{u}_* \cdot \boldsymbol{n} \, ds, \end{aligned}$$

Où nous rappelons que $\mathcal{E}$ est la solution fondamentale du Laplacien. Remarquons que nous avons div $\boldsymbol{\sigma} = 0$, $\Delta\boldsymbol{\sigma} = 0$ dans Ω et

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} \, ds = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{u}_* \cdot \boldsymbol{n} \, ds.$$

De plus, comme $\boldsymbol{\sigma} = O(1/r^2)$, il est facile de voir que $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$. Par conséquent, la restriction de $\boldsymbol{\sigma}$ sur la frontière $\partial\Omega$ appartient à $\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$. Posons à présent $\boldsymbol{v}_* = \boldsymbol{u}_* - \boldsymbol{\sigma}$. Nous avons alors

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{v}_* \cdot \boldsymbol{n} \, ds = 0.$$

D'après le lemme 3.1 de [31], il existe un vecteur $\boldsymbol{u}_0 \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ à support compact satisfaisant

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u}_0 = 0 \text{ dans } \Omega, \tag{5.18}$$

$$\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{v}_* \text{ sur } \partial\Omega \tag{5.19}$$

et

$$\|\boldsymbol{u}_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C\|\boldsymbol{v}_*\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)} \leq C\|\boldsymbol{u}_*\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)}$$

Soit maintenant $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{\sigma}$, alors $\boldsymbol{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ vérifie (5.16) et (5.17). ■

Remarque 5.16 Par ce relèvement qui appartient à $\mathbf{H}^1(\Omega)$, nous pouvons facilement montrer que si Ω est un ouvert extérieur de classe $\mathcal{C}^2$, $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\Omega)$, $\boldsymbol{u}_* \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ et $g = 0$, alors le problème (5.1) possède une unique solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in (\boldsymbol{L}^4(\Omega) \cap \boldsymbol{L}^6(\Omega) \cap \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,2}(\Omega)) \times L^2(\Omega)$. De plus nous avons

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^4(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^6(\Omega)} + \|\nabla \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1}\right\|_{\boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\Omega)} + \|\pi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C\left(\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}_*\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)}\right). \end{aligned} \tag{5.20}$$

Nous sommes maintenant en mesure de résoudre le problème d'Oseen (5.1) dans le cas hilbertien.

Théorème 5.17 *On suppose que Ω est un ouvert extérieur de classe $\mathcal{C}^2$. Soient $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\Omega)$, $g \in Z_2(\Omega)$ et $\boldsymbol{u}_* \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$. Alors le problème (5.1) possède une unique solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in (\boldsymbol{L}^4(\Omega) \cap \boldsymbol{L}^6(\Omega) \cap \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,2}(\Omega)) \times L^2(\Omega)$. De plus nous avons l'estimation*

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^4(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^6(\Omega)} + \|\nabla \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1}\right\|_{\boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\Omega)} + \|\pi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C\left(\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\Omega)} + \|g\|_{Z_2(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}_*\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)}\right). \end{aligned} \tag{5.21}$$

Preuve : Soient $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\Omega)$, $g \in Z_2(\Omega)$ et $\boldsymbol{u}_* \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$. Nous allons tout d'abord résoudre le problème dans $\mathbb{R}^3$ et, pour cela, nous allons étendre les données. Grâce au théorème 2.1 2) et du théorème du graphe fermé, pour tout $\ell = 1, 2, 3$, nous pouvons écrire $f_\ell = \operatorname{div} \mathbf{F}_\ell$, où $\mathbf{F}_\ell \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$. Nous étendons $\mathbf{F}_\ell$ par zéro dans

$\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ et l'extension $\tilde{\mathbf{F}}_\ell$ appartient à $\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^3)$. Nous obtenons ainsi une extension $\tilde{\boldsymbol{f}}$ de $\boldsymbol{f}$ qui appartient à $\boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3)$. Par définition de l'espace $Z_2(\Omega)$, il existe une extension $\tilde{g} \in \widetilde{L}^2(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant

$$\langle \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_1}, 1 \rangle_{W_0^{-2,2}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{2,2}(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Le théorème 3.34 nous donne alors l'existence d'un unique couple $(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\pi}) \in (\boldsymbol{L}^4(\mathbb{R}^3) \cap \boldsymbol{L}^6(\mathbb{R}^3) \cap \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)) \times L^2(\mathbb{R}^3)$, solution de

$$-\Delta \tilde{\boldsymbol{u}} + \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial x_1} + \nabla \tilde{\pi} = \tilde{\boldsymbol{f}}, \quad \text{div } \tilde{\boldsymbol{u}} = \tilde{g} \text{ dans } \mathbb{R}^3. \tag{5.22}$$

Nous avons alors $\tilde{\boldsymbol{u}}|_{\partial\Omega} - \boldsymbol{u}_* \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ et d'après la remarque 5.16, il existe un unique couple $(\boldsymbol{v}, \eta) \in (\boldsymbol{L}^4(\Omega) \cap \boldsymbol{L}^6(\Omega) \cap \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,2}(\Omega)) \times L^2(\Omega)$ solution de

$$\begin{aligned} -\Delta \boldsymbol{v} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_1} + \nabla \eta = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega \\ \text{div } \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega \\ \boldsymbol{v} = \tilde{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u}_* \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

En posant à présent $\boldsymbol{u} = \tilde{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{v}$ et $\pi = \tilde{\pi} - \eta$, le couple $(\boldsymbol{u}, \pi)$ appartient à $(\boldsymbol{L}^4(\Omega) \cap \boldsymbol{L}^6(\Omega) \cap \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,2}(\Omega)) \times L^2(\Omega)$ et est solution(5.1). L'estimation (5.21) est une conséquence de théorème 3.34 et de (5.20). ■

5.4 Le cas général

Nous allons étendre le résultat du théorème 5.17 au cas $p \neq 2$. Nous commençons pour cela par le cas homogène et lorsque les données ont un support compact.

Lemme 5.18 *Soient Ω un ouvert extérieur de classe $\mathcal{C}^2$, $p > 2$ et r_2 le réel donné dans la définition 3.7. On suppose $\boldsymbol{u}_* = \mathbf{0}$. Soient $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\Omega)$ à support compact et $g \in Z_p(\Omega)$ à support compact. Alors le problème* (5.1) *admet une unique solution*

$$(\boldsymbol{u}, \pi) \in (\boldsymbol{L}^4(\Omega) \cap \boldsymbol{L}^6(\Omega) \cap \overset{\circ}{\widetilde{\boldsymbol{W}}}{}_0^{1,2}(\Omega)) \times L^2(\Omega). \tag{5.23}$$

De plus,

(i) *Si* $2 < p < 4$, *alors* $(\boldsymbol{u}, \pi) \in (\boldsymbol{L}^{r_2}(\Omega) \cap \overset{\circ}{\widetilde{\boldsymbol{W}}}{}_0^{1,p}(\Omega)) \times L^p(\Omega)$.

(ii) *Si* $p \geq 4$, *alors* $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \overset{\circ}{\widetilde{\boldsymbol{W}}}{}_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)$.

Preuve : Puisque $p > 2$ et $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\Omega)$ a un support compact, nous en déduisons que $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\Omega)$. De même, puisque $g \in Z_p(\Omega)$ a un support compact, alors il existe une extension $\tilde{g} \in \tilde{L}^p(\mathbb{R}^3)$ de g qui soit à support compact. Nous avons alors $\tilde{g} \in \tilde{L}^2(\mathbb{R}^3)$ et $g \in Z_2(\Omega)$. Le théorème 5.17 nous donne alors l'existence d'un unique couple $(\boldsymbol{u}, \pi) \in (\boldsymbol{L}^4(\Omega) \cap \boldsymbol{L}^6(\Omega) \cap \overset{\circ}{\widetilde{\boldsymbol{W}}}{}_0^{1,2}(\Omega)) \times L^2(\Omega)$, solution de

$$-\Delta \boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi = \boldsymbol{f}, \ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = g \text{ dans } \Omega, \ \ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \text{ sur } \partial\Omega. \tag{5.24}$$

Il nous reste à montrer (i) et (ii) en utilisant le théorème 3.34. Nous étendons pour cela $\boldsymbol{u}$ et π par zéro en dehors de $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ et nous continuons à noter $\boldsymbol{u}$ et π les extensions. Nous définissons aussi les deux distribution suivantes :

$$\tilde{\boldsymbol{f}} = -\Delta \boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi \ \text{ et } \tilde{g} = \operatorname{div} \boldsymbol{u} \ \text{ dans } \mathbb{R}^3.$$

Le couple $(\tilde{\boldsymbol{f}}, \tilde{g})$ appartient à $\boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3) \times \tilde{L}^2(\mathbb{R}^3)$. Soit maintenant un réel $R > 0$ suffisamment grand pour que les supports de $\tilde{\boldsymbol{f}}$ et $\tilde{g}$ ainsi que $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ soient inclus dans B_R. Nous introduisons la partition de l'unité (5.4) et nous pouvons donc écrire

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\varphi_1 + \boldsymbol{u}\varphi_2 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \quad \text{et} \quad \pi = \pi\varphi_1 + \pi\varphi_2 = \pi_1 + \pi_2.$$

Puisque les supports de $\tilde{\boldsymbol{f}}$ et $\tilde{g}$ sont inclus dans B_R, nous pouvons observer que $\varphi_1 \tilde{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{0}$ et $\varphi_1 \tilde{g} = 0$. Ainsi, un simple calcul au sens des distributions montre alors que le couple $(\boldsymbol{u}_1, \pi_1)$ vérifient

$$-\Delta \boldsymbol{u}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial x_1} + \nabla \pi_1 = \mathbf{F}, \ \operatorname{div} \boldsymbol{u}_1 = G \text{ dans } \mathbb{R}^3, \tag{5.25}$$

où $\mathbf{F} = \boldsymbol{u}\Delta\, \varphi_2 + 2\nabla \boldsymbol{u} \nabla \varphi_2 - \boldsymbol{u}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} - \pi \nabla \varphi_2$ et $G = -\boldsymbol{u}\nabla\varphi_2$. Il est facile de vérifier que $(\mathbf{F}, G) \in \boldsymbol{L}^2(B_{R+1}) \times H^1(B_{R+1})$. Par les injections de Sobolev, nous en déduisons que $(\mathbf{F}, G) \in \boldsymbol{W}^{-1,q}(B_{R+1}) \times L^q(B_{R+1})$ pour tout $q \in]1, 6]$. Nous allons supposer,

dans un premier temps, $p \in]2, 6]$.
Si $2 < p \leq 6$.
Nous avons alors

$$(\mathbf{F}, G) \in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times (L^p(\mathbb{R}^3) \cap W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)).$$

Cela entraîne que $\frac{\partial G}{\partial x_1} \in W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3)$ et satisfait

$$\langle \frac{\partial G}{\partial x_1}, 1 \rangle_{W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3) \times W_0^{2,p'}(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Nous allons distinguer deux cas.
• Si $2 < p < 4$, d'après le théorème 3.34, il existe un unique couple $(\boldsymbol{v}, \eta) \in (\boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3) \cap \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)) \times L^p(\mathbb{R}^3)$, solution de

$$-\Delta \boldsymbol{v} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_1} + \nabla \eta = \mathbf{F}, \text{ div } \boldsymbol{v} = G \text{ dans } \mathbb{R}^3. \tag{5.26}$$

Par (5.25), (5.26) et grâce à la proposition 3.30, nous en déduisons que $\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{v}$ et $\pi_1 - \eta$ sont des polynômes. Mais comme $\boldsymbol{u}_1 \in \boldsymbol{L}^4(\mathbb{R}^3) \cap \boldsymbol{L}^6(\mathbb{R}^3)$ et $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)$, alors nécessairement $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}$, et donc $\boldsymbol{u}_1 \in \boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3) \cap \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$. Par un même raisonnement, $\pi_1 = \eta \in L^p(\mathbb{R}^3)$. Maintenant, comme $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus B_{R+1}$, la restriction de $\boldsymbol{u}$ sur ∂B_{R+1} est dans $\boldsymbol{W}^{1/p',p}(\partial B_{R+1})$ et le couple $(\boldsymbol{u}, \pi)$ satisfait

$$-\Delta \boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi = \boldsymbol{f}, \text{ div } \boldsymbol{u} = g \text{ dans } B_{R+1}, \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 \text{ sur } \partial B_{R+1}.$$

La proposition 5.7 montre que $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{W}^{1,p}(B_{R+1}) \times L^p(B_{R+1})$. Par les injections de Sobolev, si $1 < p < 3$, $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^q(B_{R+1})$ pour tout $1 \leq q < \frac{3p}{3-p}$ et, si $3 \leq p < 4$, $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^q(B_{R+1})$ pour tout $1 \leq q < \infty$. Nous en déduisons donc que $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^{r_2}(B_{R+1})$. Par conséquent, $\boldsymbol{u}_2 \in \boldsymbol{L}^{r_2}(B_{R+1})$, $\nabla \boldsymbol{u}_2 \in \boldsymbol{L}^p(B_{R+1})$. De plus nous avons aussi $\pi_2 \in L^p(B_{R+1})$. Ce qui implique que $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{L}^{r_2}(\Omega) \times L^p(\Omega)$ et $\nabla \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^p(\Omega)$. Comme $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} = \boldsymbol{f} + \Delta \boldsymbol{u} - \nabla \pi$, nous en déduisons que $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\Omega)$.
• Si $4 \leq p \leq 6$, alors, en utilisant le théorème 3.34, il existe un couple $(\boldsymbol{v}, \eta) \in \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \times L^p(\mathbb{R}^3)$ solution de (5.26). Nous en déduisons que chaque composante de $\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{v}$ est un polynôme. Mais comme $\nabla \boldsymbol{u}_1 \in \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^3)$ et $\nabla \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$, alors nécessairement, $\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{v} = \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$. Par ailleurs les constantes appartiennent à

$\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ lorque $p \geq 4$. Cela implique donc que $\boldsymbol{u}_1 \in \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$. En procédant de la manière que pour le cas $2 < p < 4$, nous pouvons montrer que $\boldsymbol{u}_2 \in \boldsymbol{W}^{1,p}(B_{R+1})$ et, par conséquent, $\boldsymbol{u} \in \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$.

Si $p > 6$.

Alors $(\boldsymbol{f}, g) \in \boldsymbol{W}_0^{-1,6}(\Omega) \times Z_6(\Omega)$ et le cas précédent nous montre qu'il existe un unique couple $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \overset{\circ}{\widetilde{\boldsymbol{W}}}{}_0^{1,6}(\Omega) \times L^6(\Omega)$ solution de (5.1). Ensuite, en procédant comme précédemment, nous avons $(\mathbf{F}, G) \in \boldsymbol{L}^6(B_{R+1}) \times W^{1,6}(B_{R+1})$. Grâce aux injections de Sobolev, $(\mathbf{F}, G)$ appartient à $\boldsymbol{W}^{-1,q}(B_{R+1}) \times L^q(B_{R+1}) \cap W^{-1,q}(B_{R+1})$ pour tout $1 \leq q \leq \infty$. Ainsi pour tout $p > 6$, nous avons

$$(\mathbf{F}, G) \in \boldsymbol{W}^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \times (L^p(B_{R+1}) \cap W^{-1,p}(\mathbb{R}^3)).$$

Nous terminons la preuve de façon analogue au cas $2 < p \leq 6$. ∎

Corollaire 5.19 *On suppose que Ω est un ouvert exterieur de $\mathbb{R}^3$ à frontière $\mathcal{C}^2$, $p > 2$ et r_2 le réel donné dans la définition 3.7. Soit $\boldsymbol{u}_* \in \boldsymbol{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)$. Alors le problème*

$$-\Delta \boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi = \mathbf{0}, \ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \ \textit{dans } \Omega, \ \ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_* \ \textit{sur } \partial\Omega \tag{5.27}$$

admet une unique solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in (\boldsymbol{L}^4(\Omega) \cap \boldsymbol{L}^6(\Omega) \cap \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,2}(\Omega)) \times L^2(\Omega)$. De plus
(i) *Si $2 < p < 4$, alors $(\boldsymbol{u}, \pi) \in (\boldsymbol{L}^{r_2}(\Omega) \cap \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\Omega)) \times L^p(\Omega)$.*
(ii) *Si $p \geq 4$, alors $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\Omega) \times \boldsymbol{L}^p(\Omega)$.*

Preuve : Soit un réel $R > 0$ suffisamment grand tel que $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ soit inclus dans B_R. D'après la remarque 5.8, il existe un unique vecteur $\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega_R)$ tel que

$$-\Delta \boldsymbol{u}_0 + \frac{\partial \boldsymbol{u}_0}{\partial x_1} = 0 \text{ dans } \Omega_R, \ \ \boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}_* \text{ sur } \partial\Omega, \ \ \boldsymbol{u}_0 = \mathbf{0} \text{ sur } \partial B_R.$$

Soit maintenant $\tilde{\boldsymbol{u}}_0$ l'extension par zéro de $\boldsymbol{u}_0$ en dehors de $\overline{B}_R$ alors $\tilde{\boldsymbol{u}}_0$ appartient à $\boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Comme $p > 2$, alors $\tilde{\boldsymbol{u}}_0 \in \boldsymbol{W}_0^{1,2}(\Omega)$ et, par les injections de Sobolev, $\tilde{\boldsymbol{u}}_0$ appartient à $\boldsymbol{L}^4(\Omega) \cap \boldsymbol{L}^6(\Omega) \cap \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,2}(\Omega)$. De plus, si $2 < p < 4$, alors $\tilde{\boldsymbol{u}}_0$ appartient à

$\boldsymbol{L}^{r_2}(\Omega) \cap \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\Omega)$ et si $4 \leq p < \infty$, alors $\tilde{\boldsymbol{u}}_0$ appartient à $\widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\Omega)$. Par ailleurs,

$$-\Delta \tilde{\boldsymbol{u}}_0 + \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}_0}{\partial x_1} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\Omega) \text{ et a un support compact dans } \Omega.$$

De la même manière, nous avons

$$\text{div } \tilde{\boldsymbol{u}}_0 \in L^p(\Omega) \cap W_0^{-1,p}(\Omega) \text{ et a un support compact dans } \Omega.$$

Alors le lemme précédent nous montre l'existence d'un unique couple $(\boldsymbol{v}, \pi) \in (\boldsymbol{L}^4(\Omega) \cap \boldsymbol{L}^6(\Omega) \cap \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,2}(\Omega)) \times L^2(\Omega)$ solution de

$$-\Delta \boldsymbol{v} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_1} + \nabla \pi = -\Delta \tilde{\boldsymbol{u}}_0 + \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}_0}{\partial x_1}, \text{ div } \boldsymbol{v} = \text{div } \tilde{\boldsymbol{u}}_0 \text{ dans } \Omega, \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \text{ sur } \partial\Omega.$$

De plus, si $2 < p < 4$, alors $(\boldsymbol{v}, \pi)$ appartient à $\boldsymbol{L}^{r_2}(\Omega) \cap \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)$ et si $p \geq 4$, alors $(\boldsymbol{v}, \pi)$ appartient à $\widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)$. Il suffit alors de poser $\boldsymbol{u} = \tilde{\boldsymbol{u}}_0 - \boldsymbol{v}$, et le couple $(\boldsymbol{u}, \pi)$ est l'unique solution de (5.27) recherchée. ■

Nous allons maintenant caractériser le noyau $\boldsymbol{\mathcal{N}}_0^p(\Omega)$. Nous avons besoin pour cela d'un résultat préliminaire.

Lemme 5.20 *Soit* $u \in \overset{\circ}{\widetilde{W}}{}_0^{1,p}(\Omega)$. *On pose*

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \textit{dans } \Omega \\ \\ 0 & \textit{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Alors $\tilde{u} \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$ *et*

$$\|\tilde{u}\|_{\widetilde{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|u\|_{\widetilde{W}_0^{1,p}(\Omega)}.$$

Preuve : Remarquons tout d'abord que comme $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^p(\Omega) \cap W_0^{-1,p}(\Omega)$, on peut écrire :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle \frac{\partial u}{\partial x_1}, \varphi \rangle_{W_0^{-1,p}(\Omega), \overset{\circ}{W}{}_0^{1,p'}(\Omega)} = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1} \varphi \, d\boldsymbol{x}. \tag{5.28}$$

D'autre part, il est facile de voir que $\tilde{u} \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)$. Il reste donc à montrer que $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$. Soit $R > 0$ un réel fixé, en introduisant la partition de l'unité

(5.4), on peut écrire
$$\tilde{u} = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 = \tilde{u}\varphi_1 + \tilde{u}\varphi_2.$$

Comme $\tilde{u}_2 \in L^p(B_{R+1})$, on a facilement $\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_1} \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$. Par ailleurs, pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1}, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} &= -\int_{B'_R} \tilde{u}\varphi_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1}\, d\boldsymbol{x} \\
&= -\int_{B'_R} \tilde{u}\frac{\partial(\varphi_1\psi)}{\partial x_1}\, d\boldsymbol{x} + \int_{B'_R\cap B_{R+1}} \tilde{u}\psi\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\, d\boldsymbol{x} \\
&= \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1}\,\varphi_1\psi\, d\boldsymbol{x} + \int_{B'_R\cap B_{R+1}} u\psi\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\, d\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

Comme $\varphi_1\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, en utilisant (5.28), on aboutit à

$$\langle \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1}, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} = \langle \frac{\partial u}{\partial x_1}, \varphi_1\psi \rangle_{W_0^{-1,p}(B'_R)\times \overset{\circ}{W}{}_0^{1,p'}(B'_R)} - \int_{B_R\cap B_{R+1}} \tilde{u}\,\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\,\psi\, d\boldsymbol{x}.$$

on obtient donc

$$\left|\langle \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1}, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)}\right| \leq \left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{W_0^{-1,p}(\Omega)} \|\nabla(\varphi_1\psi)\|_{\boldsymbol{L}^{p'}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(B'_R\cap B_{R+1})}\|\psi\|_{L^{p'}(B'_R\cap B_{R+1})}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
\|\nabla(\varphi_1\psi)\|_{\boldsymbol{L}^{p'}(\Omega)} &\leq \|\nabla(\varphi_1\psi)\|_{\boldsymbol{L}^{p'}(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq \|\nabla\psi\|_{\boldsymbol{L}^{p'}(\mathbb{R}^3)} + C\|\psi\|_{L^{p'}(B'_R\cap B_{R+1})} \\
&\leq C\|\psi\|_{W_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\left|\langle \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1}, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)}\right| \leq \left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{W_0^{-1,p}(\Omega)} \|\psi\|_{W_0^{1,p'}(\mathbb{R}^3)},$$

ce qui achève la preuve. ■

Proposition 5.21 *Soient Ω un ouvert extérieur de $\mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^2$ et r_2 le réel*

donné dans la définition 3.7.
(i) *Si* $2 < p < 4$, *alors* $\boldsymbol{\mathcal{N}}_0^p(\Omega) = \{(\mathbf{0}, 0)\}$.
(ii) *Si* $p \geq 4$, *alors* $\boldsymbol{\mathcal{N}}_0^p(\Omega) = \{(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{\lambda}, \eta(\boldsymbol{\lambda}),\ \ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^3)\}$ *où le couple* $(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\lambda}), \eta(\boldsymbol{\lambda}))$ *est l'unique solution de*

$$-\Delta \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\lambda}) + \frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\lambda})}{\partial x_1} + \nabla \eta(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}, \ \text{div } \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\lambda}) = 0 \ \ \textit{dans} \ \ \Omega, \ \ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda} \ \ \textit{sur} \ \ \partial\Omega, \tag{5.29}$$

donnée par le corollaire 5.19.

Preuve : Notons tout d'abord que le couple $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{\mathcal{N}}_0^p(\Omega)$ satisfait la formule de Green : pour tout $(\boldsymbol{\psi}, \xi) \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{D}(\overline{\Omega})$,

$$\int_\Omega \left\{ \left(-\Delta \boldsymbol{\psi} - \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x_1} + \nabla \xi \right) \boldsymbol{u} - \pi \text{div } \boldsymbol{\psi} \right\} d\boldsymbol{x} = \langle (\nabla \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \boldsymbol{e}_1^t - \pi I).\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\psi} \rangle_{\partial\Omega}, \tag{5.30}$$

où $\langle , \rangle_{\partial\Omega}$ représente le crochet de dualité entre $\boldsymbol{W}^{-1/p,p}(\partial\Omega)$ et $\boldsymbol{W}^{1/p,p'}(\partial\Omega)$. On étend à présent $\boldsymbol{u}$ et π par zéro en dehors de Ω. En notant toujours $\boldsymbol{u}$ et π ces extensions, nous obtenons alors (voir le lemme 5.20) $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3) \times L^p(\mathbb{R}^3)$. Nous avons donc

$$-\Delta \boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi \in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3), \quad \text{div } \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3.$$

Soit $\boldsymbol{h}$ la distribution définie par $-\Delta \boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} + \nabla \pi$. Par la relation (5.30), pour tout $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^3)$, on a

$$\langle \boldsymbol{h}, \boldsymbol{\psi} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{D}}'(\mathbb{R}^3) \times \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^3)} = \langle (\nabla \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \boldsymbol{e}_1^t - \pi I).\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\psi} \rangle_{\partial\Omega}.$$

Ainsi, $\boldsymbol{h}$ a son support compact contenu dans $\partial\Omega$. La distribution $\boldsymbol{h}$ appartient donc à $\boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3) \cap \boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\mathbb{R}^3)$ et la proposition 3.39 nous donne alors l'existence d'un unique couple $(\boldsymbol{w}, \eta) \in (\boldsymbol{L}^4(\mathbb{R}^3) \cap \boldsymbol{L}^6(\mathbb{R}^3) \cap \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)) \times L^2(\mathbb{R}^3)$ solution de

$$-\Delta \boldsymbol{w} + \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x_1} + \nabla \eta = \boldsymbol{h}, \ \text{div } \boldsymbol{w} = 0 \ \text{ dans } \ \mathbb{R}^3.$$

De plus
(i) Si $2 < p < 4$, alors $(\boldsymbol{w}, \eta) \in (\boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3) \cap \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3))) \times L^p(\mathbb{R}^3)$. Nous en déduisons

que le couple $(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}, \pi-\eta)$ est un polynôme de $\boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3)\times L^p(\mathbb{R}^3)$, donc $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$ sur $\partial\Omega$ et $\pi=\eta$. Par ailleurs, la restriction de $(\boldsymbol{w},\eta)$ sur Ω satisfait

$$-\Delta\boldsymbol{w}+\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial x_1}+\nabla\eta=0,\ \ \mathrm{div}\ \boldsymbol{w}=0\ \ \text{dans}\ \ \Omega,\ \ \boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}\ \ \text{sur}\ \ \partial\Omega.$$

Le lemme 5.18 nous permet de conclure que $(\boldsymbol{w},\eta)=(\boldsymbol{0},0)$ et, par conséquent $(\boldsymbol{u},\pi)=(\boldsymbol{0},0)$.
(ii) Si $p\geq 4$, alors $(\boldsymbol{w},\eta)\in\widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)\times L^p(\mathbb{R}^3)$. En procédant comme dans le cas (i), on en déduit que chaque composante de $\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}$ est un polynôme et que $\pi=\eta$. Mais comme $\nabla\boldsymbol{u}\in L^p(\mathbb{R}^3)$ et $\nabla\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^3)\cap\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^3)$, nous en concluons que nécessairement $\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^3$. Ainsi, le couple $(\boldsymbol{w},\eta)$ est l'unique solution de (5.29). ■

Nous sommes maintenant en mesure d'établir un résultat d'existence pour le problème exterieur d'Oseen dans le cas général.

Théorème 5.22 *Soient Ω un ouvert extérieur de $\mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^2$ et r_2 le réel donné dans la définition 3.7 . Soient $\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\Omega)$, $g\in Z_p(\Omega)$ et $\boldsymbol{u}_*\in\boldsymbol{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)$.*
(i) *Si $2<p<4$, alors le problème* (5.1) *admet une unique solution $(\boldsymbol{u},\pi)\in\boldsymbol{L}^{r_2}(\Omega)\cap\widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\Omega)\times L^p(\Omega)$. De plus nous avons l'estimation*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^{r_2}(\Omega)}+\|\boldsymbol{u}\|_{\widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\Omega)}+\|\pi\|_{L^p(\Omega)}\leq C\left(\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\Omega)}+\|g\|_{Z_p(\Omega)}+\|\boldsymbol{u}_*\|_{\boldsymbol{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)}\right). \tag{5.31}$$

(ii) *Si $p\geq 4$, alors le problème* (5.1) *admet une solution $(\boldsymbol{u},\pi)\in\widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\Omega)\times L^p(\Omega)$, unique à un élément de $\boldsymbol{\mathcal{N}}_0^p(\Omega)$ près. De plus, nous avons*

$$\begin{aligned}&\inf_{(\boldsymbol{v},\eta)\in\boldsymbol{\mathcal{N}}_0^p(\Omega)}\left(\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|_{\widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\Omega)}+\|\pi+\eta\|_{L^p(\Omega)}\right)\\&\leq C\left(\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\Omega)}+\|g\|_{Z_p(\Omega)}+\|\boldsymbol{u}_*\|_{\boldsymbol{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)}\right).\end{aligned} \tag{5.32}$$

Preuve : 1) On suppose d'abord $\boldsymbol{u}_*=\boldsymbol{0}$. Alors, par les mêmes méthodes que précédemment, nous pouvons étendre $\boldsymbol{f}$ en dehors de Ω et l'extension $\tilde{\boldsymbol{f}}\in\boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^3)$. Par ailleurs, par définition de l'espace $Z_p(\Omega)$, il existe une extension $\tilde{g}\in L^p(\mathbb{R}^3)$ de

g telle que $\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_1} \in W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant

$$\forall \lambda \in \mathbb{P}_{[2-3/p']}, \quad \langle \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_1}, \lambda \rangle_{\mathrm{W}_0^{-2,\mathrm{p}}(\mathbb{R}^3)\times \mathrm{W}_0^{2,\mathrm{p}'}(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Nous séparons la discussion en deux cas :
(i) Si $2 < p < 4$, alors d'après le théorème 3.34, il existe un unique couple $(\boldsymbol{w}, \eta) \in (\boldsymbol{L}^{r_2}(\mathbb{R}^3) \cap \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\mathbb{R}^3)) \times L^p(\mathbb{R}^3)$ solution de

$$-\Delta \boldsymbol{w} + \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x_1} + \nabla \eta = \tilde{\boldsymbol{f}}, \ \text{ div } \boldsymbol{w} = \tilde{g} \text{ dans } \mathbb{R}^3.$$

Par conséquent, nous avons $\boldsymbol{w}|_{\partial\Omega} \in \boldsymbol{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)$. Le corollaire 5.19 nous donne l'existence d'un unique couple $(\boldsymbol{z}, \tau) \in (\boldsymbol{L}^4(\Omega) \cap \boldsymbol{L}^6(\Omega) \cap \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,2}(\Omega)) \times (L^2(\Omega)$ solution de

$$-\Delta \boldsymbol{z} + \frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial x_1} + \nabla \tau = 0, \ \text{ div } \boldsymbol{z} = 0 \text{ dans } \Omega, \ \ \boldsymbol{z} = -\boldsymbol{w} \text{ sur } \partial\Omega.$$

De plus $(\boldsymbol{z}, \tau))$ est aussi un élément de $(\boldsymbol{L}^{r_2}(\Omega) \cap \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\Omega)) \times L^p(\Omega)$. On pose $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{z}$ et $\pi = \eta + \tau$, alors le couple $(\boldsymbol{u}, \pi) \in (\boldsymbol{L}^{r_2}(\Omega) \cap \ \overset{\circ}{\widetilde{\boldsymbol{W}}}{}_0^{1,p}(\Omega)) \times L^p(\Omega)$ est solution du problème (5.1).
(ii) Si $p \geq 4$, nous procédons de la même manière.
2) On suppose maintenant $\boldsymbol{u}_* \neq \boldsymbol{0}$. Soit un réel $R > 0$ fixé tel que $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ soit inclus dans B_R. Grâce à la remarque 5.8, comme $\boldsymbol{u}_* \in \boldsymbol{W}^{1/p',p}(\partial\Omega)$, il existe un unique vecteur $\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega_R)$ solution de

$$-\Delta \boldsymbol{u}_0 + \frac{\partial \boldsymbol{u}_0}{\partial x_1} = \boldsymbol{0} \text{ dans } \Omega_R, \ \ \boldsymbol{u}_0 = -\boldsymbol{u}_* \text{ sur } \partial\Omega, \ \ \boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{0} \text{ sur } \partial B_R.$$

Nous étendons $\boldsymbol{u}_0$ par zéro dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}_R$ et on continue à noter $\boldsymbol{u}_0$ l'extension. Ainsi, $\boldsymbol{f}_0 = \boldsymbol{f} + \Delta \boldsymbol{u}_0 - \frac{\partial \boldsymbol{u}_0}{\partial x_1} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\Omega)$ ce qui implique que $(\boldsymbol{f}_0, g + \text{div } \boldsymbol{u}_0) \in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\Omega) \times Z_p(\Omega)$. En utilisant 1) il existe un unique couple $(\boldsymbol{w}, \pi) \in \overset{\circ}{\widetilde{\boldsymbol{W}}}{}_0^{1,p}(\Omega)) \times L^p(\Omega)$ satisfaisant

$$-\Delta \boldsymbol{w} + \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x_1} + \nabla \pi = \boldsymbol{f}_0, \ \text{ div } \boldsymbol{w} = g + \text{div } \boldsymbol{u}_0 \ \ \text{ dans } \ \ \Omega, \ \ \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0} \ \ \text{ sur } \ \ \partial\Omega.$$

En posant $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}_0 \in \widetilde{\boldsymbol{W}}_0^{1,p}(\Omega)$, alors le couple$(\boldsymbol{u}, \pi)$ est l'unique solution de (5.1). $\blacksquare$

Références bibliographiques

[1] R. A. Adams. *Sobolev spaces.* Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975.

[2] F. Alliot and C. Amrouche. The Stokes problem in $\mathbb{R}^n$: an approach in weighted Sobolev spaces. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **9**(5):723–754, 1999.

[3] F. Alliot and C. Amrouche. Weak solutions for the exterior Stokes problem in weighted Sobolev spaces. *Math. Methods Appl. Sci.*, **23**(6):575–600, 2000.

[4] C. Amrouche. Inégalités de Caldéron-Zygmund, potentiels et transformées de Riesz dans des espaces de Sobolev avec poids. *(submitted)*.

[5] C. Amrouche and V. Girault. Decomposition of vector spaces and application to the Stokes problem in arbitrary dimension. *Czechoslovak Math. J.*, **44**(119)(1):109–140, 1994.

[6] C. Amrouche, V. Girault, and J. Giroire. Weighted Sobolev spaces for Laplace's equation in $\mathbb{R}^n$. *J. Math. Pures Appl. (9)*, **73**(6):579–606, 1994.

[7] C. Amrouche, V. Girault, and J. Giroire. Dirichlet and Neumann exterior problems for the n-dimensional Laplace operator: an approach in weighted Sobolev spaces. *J. Math. Pures Appl. (9)*, **76**(1):55–81, 1997.

[8] C. Amrouche and U. Razafison. Anisotropically weighted Hardy inequalities; Application to the Oseen problem. *(submitted)*.

[9] C. Amrouche and U. Razafison. The stationary Oseen equations in $\mathbb{R}^3$. An approach in weighted Sobolev spaces. *(submitted)*.

[10] C. Amrouche and U. Razafison. Weighted Sobolev spaces for a scalar model of the stationary Oseen equations in $\mathbb{R}^3$. *(submitted)*.

[11] C. Amrouche and U. Razafison. Espaces de Sobolev avec poids et équation scalaire d'Oseen dans $\mathbb{R}^n$. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **337**(12):761–766, 2003.

[12] C. Amrouche and U. Razafison. Study of the scalar Oseen equation. In *VII Jornadas Zaragoza-Pau de Matemática Aplicada y Estadística (Jaca, 2001)*, volume 27 of *Monogr. Semin. Mat. García Galdeano*, pages 57–64. Univ. Zaragoza, Zaragoza, 2003.

[13] K.I. Babenko. On stationary solutions of the problem of flow past a body of a viscous incompressible fluid. *Math. USSR, Sb.*, **20**:1–25, 1973.

[14] P. Bolley and J. Camus. Quelques résultats sur les espaces de Sobolev avec poids. In *Publications des Séminaires de Mathématiques (Univ. Rennes, Rennes, année 1968-1969), Fasc. 1: Séminaires d'analyse fonctionnelle, Exp. No. 1*, page 70. Dép. Math. et Informat., Univ. Rennes, Rennes, 1969.

[15] T. Z. Boulmezaoud. On the Stokes system and on the biharmonic equation in the half-space: an approach via weighted Sobolev spaces. *Math. Methods Appl. Sci.*, **25**(5):373–398, 2002.

[16] T. Z. Boulmezaoud. On the Laplace operator and on the vector potential problems in the half-space: an approach using weighted spaces. *Math. Methods Appl. Sci.*, **26**(8):633–669, 2003.

[17] H. Brézis. *Analyse fonctionelle. Théorie et applications.* Collection Mathématiques Appliquées pour la Maitrise. Paris etc.: Masson. XIV, 233 p. FF 125. 00, 1983.

[18] M. Cantor. Spaces of functions with asymptotic conditions on R^n. *Indiana Univ. Math. J.*, **24**:897–902, 1974/75.

[19] G. de Rham. *Variétés différentiables. Formes, courants, formes harmoniques.* Actualités Sci. Ind., no. 1222 = Publ. Inst. Math. Univ. Nancago III. Hermann et Cie, Paris, 1955.

[20] R. Farwig. The stationary exterior 3D-problem of Oseen and Navier-Stokes equations in anisotropically weighted Sobolev spaces. *Math. Z.*, **211**(3):409–447, 1992.

[21] R. Farwig. A variational approach in weighted Sobolev spaces to the operator $-\Delta + \partial/\partial x_1$ in exterior domains of $\mathbb{R}^3$. *Math. Z.*, **210**(3):449–464, 1992.

[22] R. Farwig. The stationary Navier-Stokes equations in a 3D-exterior domain. In *Recent topics on mathematical theory of viscous incompressible fluid (Tsukuba, 1996)*, volume 16 of *Lecture Notes Numer. Appl. Anal.*, pages 53–115. Kinokuniya, Tokyo, 1998.

[23] R. Farwig and H. Sohr. Weighted estimates for the Oseen equations and the Navier-Stokes equations in exterior domains. In *Theory of the Navier-Stokes equations*, volume 47 of *Ser. Adv. Math. Appl. Sci.*, pages 11–30. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1998.

[24] H. Faxén. Fredholm'sche Integralgleichungen zu der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten. *Ark. Mat. Astr. Fys. (14)*, **21**:1–20, 1929.

[25] R. Finn. On the exterior stationary problem for the Navier-Stokes equations, and associated perturbation problems. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **19**:363–406, 1965.

[26] G. P. Galdi. On the Oseen boundary value problem in exterior domains. In *The Navier-Stokes equations II—theory and numerical methods (Oberwolfach, 1991)*, volume 1530 of *Lecture Notes in Math.*, pages 111–131. Springer, Berlin, 1992.

[27] G. P. Galdi. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations. Vol. I*, volume 38 of *Springer Tracts in Natural Philosophy*. Springer-Verlag, New York, 1994.

[28] G. P. Galdi. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations. Vol. II*, volume 39 of *Springer Tracts in Natural Philosophy*. Springer-Verlag, New York, 1994.

[29] V. Girault. The gradient, divergence, curl and Stokes operators in weighted Sobolev spaces of $\mathbb{R}^3$. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **39**(2):279–307, 1992.

[30] V. Girault. The Stokes problem and vector potential operator in three-dimensional exterior domains: an approach in weighted Sobolev spaces. *Differential Integral Equations*, **7**(2):535–570, 1994.

[31] V. Girault and A. Sequeira. A well-posed problem for the exterior Stokes equations in two and three dimensions. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **114**(4):313–333, 1991.

[32] J. Giroire. *Etude de quelques problèmes aux limites extérieurs et résolution par équations intégrales.* Thèse de Doctorat d'Etat. Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1987.

[33] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*, volume 24 of *Monographs and Studies in Mathematics*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.

[34] B. Hanouzet. Espaces de Sobolev avec poids application au problème de Dirichlet dans un demi espace. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **46**:227–272, 1971.

[35] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities.* Cambridge, at the University Press, 1952.

[36] S. Kračmar, A. Novotný, and M. Pokorný. Estimates of Oseen kernels in weighted L^p spaces. *J. Math. Soc. Japan*, **53**(1):59–111, 2001.

[37] L. D. Kudryavcev. Direct and inverse imbedding theorems. Applications to the solution of elliptic equations by variational methods. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, **55**:182 pp. (Russian), 1959.

[38] A. Kufner. *Weighted Sobolev spaces.* A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons Inc., New York, 1985.

[39] J.-L. Lions and E. Magenes. Problemi ai limiti non omogenei. V. *Ann. Scuola Norm Sup. Pisa (3)*, **16**:1–44, 1962.

[40] P. I. Lizorkin. (L_p, L_q)-multipliers of Fourier integrals. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **152**:808–811, 1963.

[41] B. Muckenhoupt. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **165**:207–226, 1972.

[42] B. Muckenhoupt. The equivalence of two conditions for weight functions. *Studia Math.*, **49**:101–106, 1973/74.

[43] C.L.M.H. Navier. Mémoire sur les Lois du Mouvement des fluides. *Mem. Acad. Sci. Inst. de France (2)*, **6**:389–440, 1827.

[44] J. Nečas. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques.* Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1967.

[45] F.K.G. Odqvist. Über die Randwertaufgaben der Hydrodynamik Zäher Flüssigkeiten. *Math. Z.*, **32**:329–375, 1930.

[46] B. Opic and A. Kufner. *Hardy-type inequalities*, volume 219 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series.* Longman Scientific & Technical, Harlow, 1990.

[47] C. W. Oseen. Über die Stokessesche Formel und Über eine Verwandte aufgabe in der Hydrodynamik. *Ark. Mat. Astron. Fys.(29)*, **6**:1–20, 1910.

[48] C. W. Oseen. *Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik.* XXIV + 337 S. mit 7 Fig. Leipzig, Akadem. Verlagsgesellschaft (Mathematik und ihre Anwendungen in Monographien und Lehrbüchern Bd. 1). , 1927.

[49] L. E. Payne and H. F. Weinberger. Note on a lemma of Finn and Gilbarg. *Acta Math.*, **98**:297–299, 1957.

[50] C. Pérez. Two weighted norm inequalities for Riesz potentials and uniform L^p-weighted Sobolev inequalities. *Indiana Univ. Math. J.*, **39**(1):31–44, 1990.

[51] M. Pokorný. *Asymptotic behaviour of some equations describing the flow of fluids in unbounded domains.* PhD thesis, Charles University Prague and University of Toulon, 1999.

[52] E. Sawyer and R.L. Wheeden. Weighted inequalities for fractional integrals on Euclidean and homogeneous spaces. *Am. J. Math.*, **114**(4):813–874, 1992.

[53] L. Schwartz. *Théorie des distributions.* Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, No. IX-X. Nouvelle édition, entiérement corrigée, refondue et augmentée. Hermann, Paris, 1966.

[54] C. G. Simader and H. Sohr. *The Dirichlet problem for the Laplacian in bounded and unbounded domains*, volume 360 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Longman, Harlow, 1996.

[55] V.A. Solonnikov. Estimates of Oseen's potentials in weighted Hölder spaces. *Math. Nachr.*, **177**:307–321, 1996.

[56] M Specovius-Neugebauer. Exterior Stokes problems and decay at infinity. *Math. Methods Appl. Sci.*, **8**(3):351–367, 1986.

[57] M Specovius-Neugebauer. Weak solutions of the Stokes problem in weighted Sobolev spaces. *Acta Appl. Math.*, **37**(1-2):195–203, 1994.

[58] M Specovius-Neugebauer. The two-dimensional exterior Stokes problem, existence, regularity and decay properties. *Math. Methods Appl. Sci.*, **19**(7):507–528, 1996.

[59] G. G. Stokes. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, **9**:8–106, 1851.

[60] L. Tartar. *Topics in nonlinear analysis*, volume 13 of *Publications Mathématiques d'Orsay 78*. Université de Paris-Sud Département de Mathématique, Orsay, 1978.

[61] R. Temam. *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1977.

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'analyse théorique des équations d'Oseen posées dans des régions non bornées. Le modèle d'Oseen est une version linéarisée des équations de Navier-Stokes décrivant un écoulement de fluides visqueux incompressibles autour d'un obstacle borné. On choisit de poser le problème dans un cadre fonctionnel faisant intervenir des poids anisotropes, qui permettent de décrire le comportement à l'infini des solutions et de tenir compte de la zone paraboloïdale, appelée le sillage, apparaîssant derrière l'obstacle durant l'écoulement. Dans un premier temps, dans ce nouveau cadre, nous démontrons des résultats de densité et des inégalités de Hardy. Dans un deuxième temps, nous montrons l'existence, l'unicité et la régularité de solutions. Les résultats sont d'abord établis dans l'espace entier, puis dans un domaine extérieur.

Mots-Clés : Equations d'Oseen, Mécanique des fluides, Espaces avec poids, Domaines non bornés, Inégalités de Hardy.

Weighted L^p theory for the Oseen equations in unbounded domains

---

Abstract

This thesis is devoted to the study of the Oseen equations in unbounded domains. The Oseen model is a linearized version of the Navier-Stokes equations describing the flow of a viscous and incompressible fluid past a bounded body. To describe the behavior at infinity of solutions and to take into account the paraboloidal region, the so-called wake, which appears behind the body during the flow, we choose to set the problem in a functional framework which uses anisotropic weights. In a first step, we prove density results and Hardy inequalities. In a second step, we prove existence, uniqueness and regularity of solutions. The results are first established in the whole space, then in an exterior domain.

Keywords: Oseen equations, Fluids mechanic, Weighted spaces, Unbounded domains, Hardy Inequalities.

Laboratoire de Mathématiques Appliqueés
Université de Pau et des Pays de l'Adour
I.P.R.A., Avenue de l'Université
64000 PAU