Journée des jeunes chercheurs

Introduction aux méthodes éléments finis

Raphael Bulle

31 mars 2017

Introduction

Ca sert à quoi ?

Introduction

Ca sert à quoi ?

Les méthodes éléments finis servent à discrétiser une EDP de sorte à pouvoir approcher sa solution par une fonction *calculable*.

Introduction

Ca sert à quoi ?

Les méthodes éléments finis servent à discrétiser une EDP de sorte à pouvoir approcher sa solution par une fonction *calculable*.
Ces méthodes sont utilisées :

Introduction

Ca sert à quoi ?

Les méthodes éléments finis servent à discrétiser une EDP de sorte à pouvoir approcher sa solution par une fonction *calculable*.
Ces méthodes sont utilisées :

- dans l'industrie automobile, aéronautique, nucléaire...

Introduction

Ca sert à quoi ?

Les méthodes éléments finis servent à discrétiser une EDP de sorte à pouvoir approcher sa solution par une fonction *calculable*.
Ces méthodes sont utilisées :

- dans l'industrie automobile, aéronautique, nucléaire...
- en médecine,

Introduction

Ca sert à quoi ?

Les méthodes éléments finis servent à discrétiser une EDP de sorte à pouvoir approcher sa solution par une fonction *calculable*.
Ces méthodes sont utilisées :

- dans l'industrie automobile, aéronautique, nucléaire...
- en médecine,
- en géologie,

Introduction

Ca sert à quoi ?

Les méthodes éléments finis servent à discrétiser une EDP de sorte à pouvoir approcher sa solution par une fonction *calculable*.

Ces méthodes sont utilisées :

- dans l'industrie automobile, aéronautique, nucléaire...
- en médecine,
- en géologie,
- en économie,

Introduction

Ca sert à quoi ?

Les méthodes éléments finis servent à discrétiser une EDP de sorte à pouvoir approcher sa solution par une fonction *calculable*.

Ces méthodes sont utilisées :

- dans l'industrie automobile, aéronautique, nucléaire...
- en médecine,
- en géologie,
- en économie,
- $\cdots$

bref un peu partout où il y a des EDP.

Considérons un exemple classique

Cadre

- On se place dans $\mathbb{R}^2$,

Considérons un exemple classique

Cadre

- On se place dans $\mathbb{R}^2$,
- Ω désignera un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^2$,

Considérons un exemple classique

Cadre

- On se place dans $\mathbb{R}^2$,
- Ω désignera un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^2$,
- les fonctions seront définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$,

Considérons un exemple classique

Cadre

- On se place dans $\mathbb{R}^2$,
- Ω désignera un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^2$,
- les fonctions seront définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$,
- $\partial\Omega$ désignera la frontière de l'ensemble Ω,

Considérons un exemple classique

Cadre

- On se place dans $\mathbb{R}^2$,
- Ω désignera un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^2$,
- les fonctions seront définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$,
- $\partial\Omega$ désignera la frontière de l'ensemble Ω,
- $||\cdot||$ désignera la norme de l'espace de Lebesgue $L^2(\Omega)$ associée au produit scalaire habituel noté $(\cdot,\cdot)$,

Considérons un exemple classique

Cadre

- On se place dans $\mathbb{R}^2$,
- Ω désignera un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^2$,
- les fonctions seront définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$,
- $\partial\Omega$ désignera la frontière de l'ensemble Ω,
- $||\cdot||$ désignera la norme de l'espace de Lebesgue $L^2(\Omega)$ associée au produit scalaire habituel noté $(\cdot,\cdot)$,
- Δ désignera l'opérateur Laplacien, défini pour une fonction $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}.$$

Considérons un exemple classique

Problème (de Dirichlet)

Trouver une fonction u telle que :

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= f & \text{sur } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

où f est une fonction donnée appartenant à $L^2(\Omega)$.

Considérons un exemple classique

Problème (de Dirichlet)

Trouver une fonction u telle que :

$$(\mathcal{P}) \qquad \left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f & \text{sur } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

où f est une fonction donnée appartenant à $L^2(\Omega)$.

Considérons un exemple classique

Problème (de Dirichlet)

Trouver une fonction u telle que :

$$(\mathcal{P}) \qquad \left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f & \text{sur } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

où f est une fonction donnée appartenant à $L^2(\Omega)$.

Considérons un exemple classique

Considérons un exemple classique

Comment trouver une solution ?

Considérons un exemple classique

Comment trouver une solution ?

Problème :

Il n'est pas toujours possible d'attaquer le problème de manière directe.

Considérons un exemple classique

La recette secrète des EDPistes :

Considérons un exemple classique

La recette secrète des EDPistes :

- On reformule notre problème en un problème (qu'on espère) plus simple,

Considérons un exemple classique

La recette secrète des EDPistes :

- On reformule notre problème en un problème (qu'on espère) plus simple,
- on cherche une solution à ce nouveau problème dans un espace mieux adapté,

Considérons un exemple classique

La recette secrète des EDPistes :

- On reformule notre problème en un problème (qu'on espère) plus simple,
- on cherche une solution à ce nouveau problème dans un espace mieux adapté,
- on essaie de "remonter".

Reformulons notre problème

Reformulons notre problème

Problème (Formulation faible)

Trouver une fonction u appartenant à un certain espace H_0 et telle que pour toute fonction v dans H_0 :

$$(\mathcal{P}_f) \qquad \int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega fv.$$

L'espace H_0

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega f v$$

L'espace H_0

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega f v$$

Définition (L'espace H_0)

L'espace H_0 sera défini comme le sous-espace de $L^2(\Omega)$ des fonctions nulles sur $\partial\Omega$, dont les dérivées partielles d'ordre 1 sont encore dans $L^2(\Omega)$.

L'espace H_0

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega fv$$

Définition (L'espace H_0)

L'espace H_0 sera défini comme le sous-espace de $L^2(\Omega)$ des fonctions nulles sur $\partial\Omega$, dont les dérivées partielles d'ordre 1 sont encore dans $L^2(\Omega)$.

L'espace H_0

Proposition

L'espace H_0 est un espace de Hilbert

L'espace H_0

Proposition

L'espace H_0 est un espace de Hilbert et la forme bilinéaire :

$$\begin{aligned} a : H \times H &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u\ ,\ v) &\longmapsto \int_\Omega \nabla u \nabla v, \end{aligned}$$

est continue et H_0-elliptique.

Existence et unicité de la solution

Problème (Formulation faible)

Trouver $u \in H$ telle que $\forall v \in H$:

$$(\mathcal{P}_f) \qquad a\left(u, v\right) = \int_\Omega fv = L(v).$$

Existence et unicité de la solution

Problème (Formulation faible)

Trouver $u \in H$ telle que $\forall v \in H$:

$$(\mathcal{P}_f) \qquad a(u,v) = \int_\Omega fv = L(v).$$

Théorème

Par le Théorème de Lax-Milgram, le problème $(\mathcal{P}_f)$ admet une unique solution notée u appartenant à H_0.

Existence et unicité de la solution

Problème (Formulation faible)

Trouver $u \in H$ *telle que* $\forall v \in H$ *:*

$$(\mathcal{P}_f) \qquad a\,(u, v) = \int_\Omega fv = L(v).$$

Théorème

Par le Théorème de Lax-Milgram, le problème $(\mathcal{P}_f)$ *admet une unique solution notée* u *appartenant à* H_0*.*

Et après ?

Existence et unicité de la solution

Problème (Formulation faible)

Trouver $u \in H$ telle que $\forall v \in H$:

$$(\mathcal{P}_f) \qquad a(u,v) = \int_\Omega fv = L(v).$$

Théorème

Par le Théorème de Lax-Milgram, le problème $(\mathcal{P}_f)$ admet une unique solution notée u appartenant à H_0.

Et après ?

Après on laisse travailler les EDPistes.

On s'intéresse au problème $(\mathcal{P}_f)$.

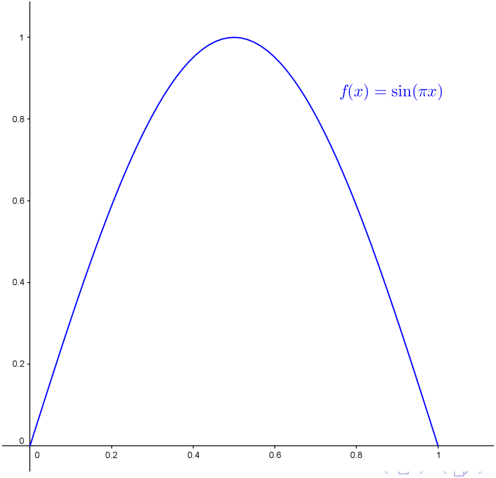
But des méthodes éléments finis

On s'intéresse au problème $(\mathcal{P}_f)$.

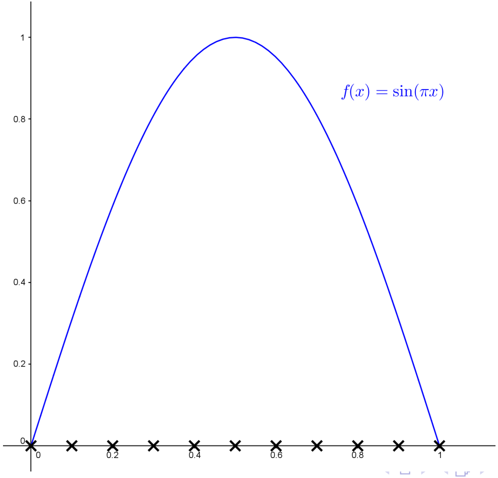
But des méthodes éléments finis

Approcher la solution u du Problème $(\mathcal{P}_f)$, dite solution *faible* du Problème initial $(\mathcal{P})$.

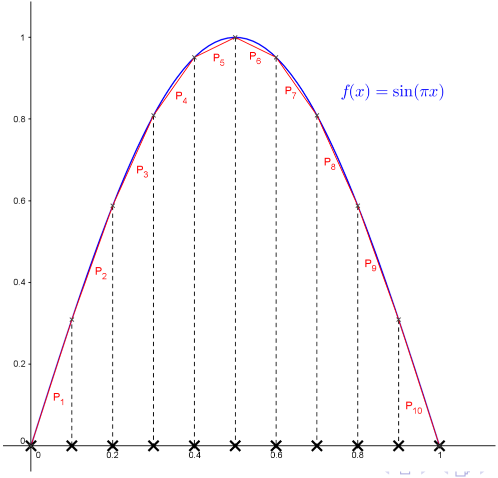
Petit rappel sur l'interpolation de Lagrange



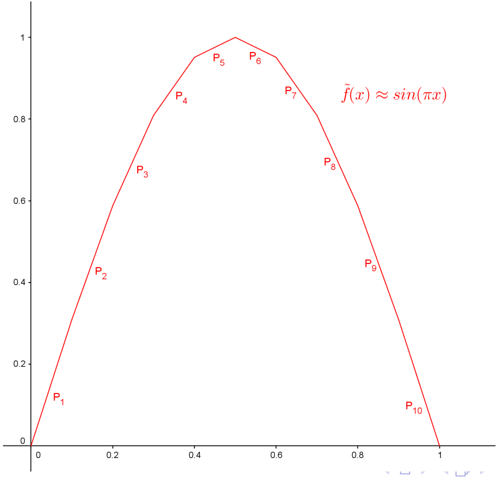
Petit rappel sur l'interpolation de Lagrange



Petit rappel sur l'interpolation de Lagrange

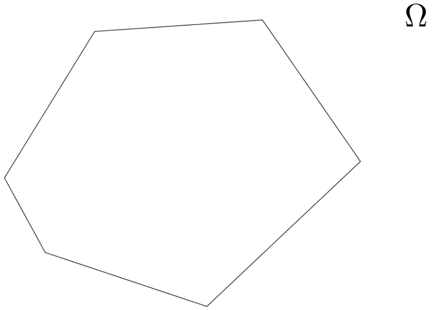


Petit rappel sur l'interpolation de Lagrange



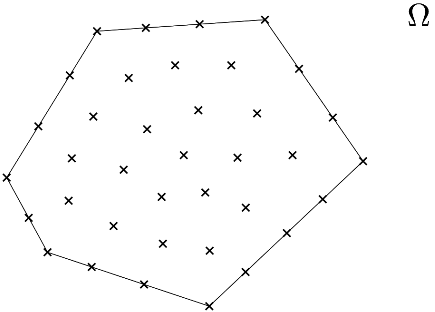
Le maillage

Généralisons cette idée en dimension 2.



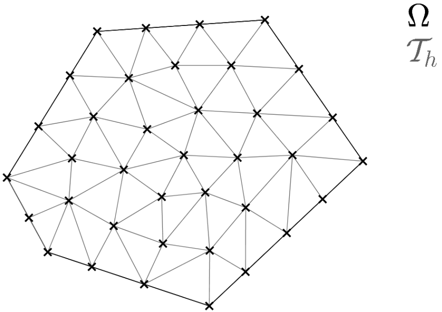
Le maillage

Généralisons cette idée en dimension 2.



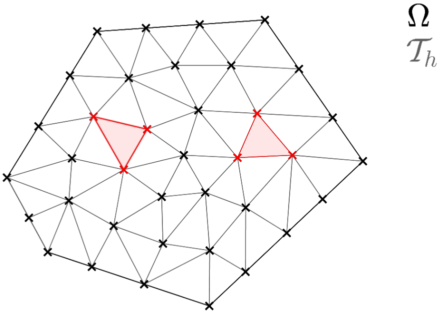
Le maillage

Généralisons cette idée en dimension 2.



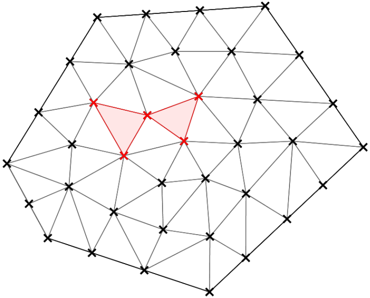
Le maillage

Généralisons cette idée en dimension 2.



Le maillage

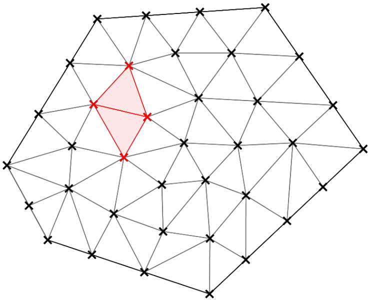
Généralisons cette idée en dimension 2.



Ω
$\mathcal{T}_h$

Le maillage

Généralisons cette idée en dimension 2.

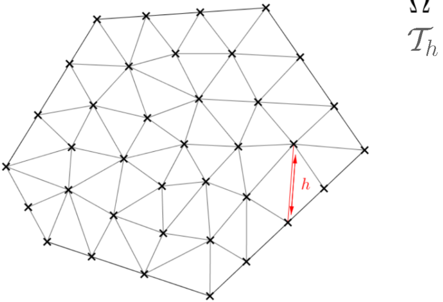


Ω

$\mathcal{T}_h$

Le maillage

Généralisons cette idée en dimension 2.



Les espaces éléments finis

Définition

Les espaces éléments finis

Définition

On appelle espace éléments finis associé au maillage $\mathcal{T}_h$ et noté V_h, l'espace vectoriel défini par :

$$V_h = \{v_h \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \text{ t.q. } v_{h|_T} \in \mathbb{P}_k, \ \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

où $\mathbb{P}_k$ est l'ensemble des polynômes de deux variables et de degré inférieur ou égal à $k \in \mathbb{N}$.

Les espaces éléments finis

Définition

On appelle espace éléments finis associé au maillage $\mathcal{T}_h$ et noté V_h, l'espace vectoriel défini par :

$$V_h = \{v_h \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \ t.q. \ v_{h|_T} \in \mathbb{P}_k, \ \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

où $\mathbb{P}_k$ est l'ensemble des polynômes de deux variables et de degré inférieur ou égal à $k \in \mathbb{N}$.
On définit également l'espace V_h^0 comme l'ensemble des fonctions de V_h nulles sur $\partial\Omega$.

Les espaces éléments finis

Définition

On appelle espace éléments finis associé au maillage $\mathcal{T}_h$ et noté V_h, l'espace vectoriel défini par :

$$V_h = \{v_h \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \ t.q. \ v_{h|_T} \in \mathbb{P}_k, \ \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

où $\mathbb{P}_k$ est l'ensemble des polynômes de deux variables et de degré inférieur ou égal à $k \in \mathbb{N}$.
On définit également l'espace V_h^0 comme l'ensemble des fonctions de V_h nulles sur $\partial\Omega$.
On a en particulier $V_h^0 \subset H_0$.

Les espaces éléments finis

Proposition

Soit V_h l'espace éléments finis $\mathbb{P}_k$. Pour déterminer de manière unique une fonction v_h de V_h sur un triangle T du maillage, on a besoin de spécifier ses valeurs en $\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$ points du triangle T.

Les espaces éléments finis

Proposition

Soit V_h l'espace éléments finis $\mathbb{P}_k$. Pour déterminer de manière unique une fonction v_h de V_h sur un triangle T du maillage, on a besoin de spécifier ses valeurs en $\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$ points du triangle T.

Exemple :

Pour les éléments finis $\mathbb{P}_1$ on doit spécifier les valeurs de v_h en 3 points de T, on choisit donc ses 3 sommets.

Cas des éléments finis $\mathbb{P}_1$

Proposition

Si V_h est un espace éléments finis $\mathbb{P}_1$ associé au maillage $\mathcal{T}_h$ sur Ω et si on note $\mathcal{N}_h$ l'ensemble des noeuds du maillage, de cardinal N, alors $\dim(V_h) = N$.

Cas des éléments finis $\mathbb{P}_1$

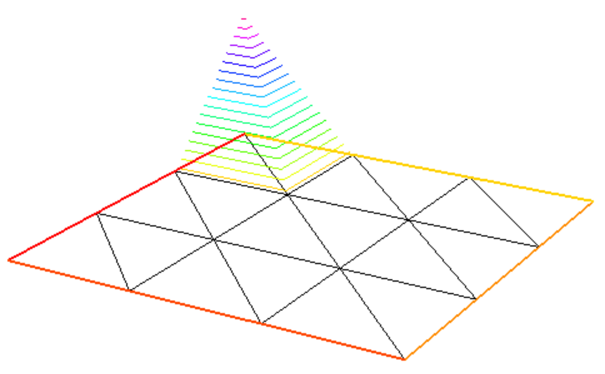
Proposition

Si V_h est un espace éléments finis $\mathbb{P}_1$ associé au maillage $\mathcal{T}_h$ sur Ω et si on note $\mathcal{N}_h$ l'ensemble des noeuds du maillage, de cardinal N, alors $\dim(V_h) = N$.
De plus, l'espace vectoriel V_h est engendré par la famille des fonctions chapeaux notée $(\varphi_i)_{1\leqslant i\leqslant N} \subset V_h$ et définies par :

$$\forall x_j \in \mathcal{N}_h,\ \varphi_i(x_j) = \delta_{i,j}.$$

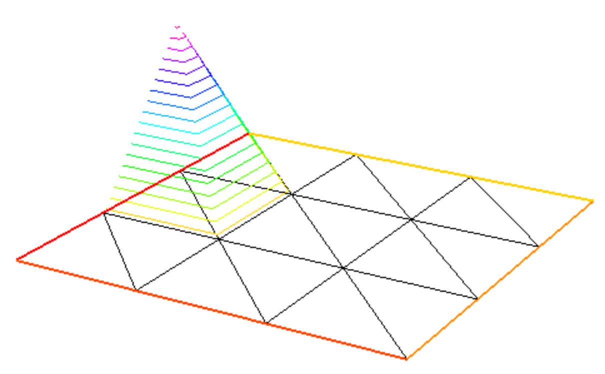
Cas des éléments finis $\mathbb{P}_1$

Exemple de fonctions chapeaux sur $\Omega =]0,1[^2$



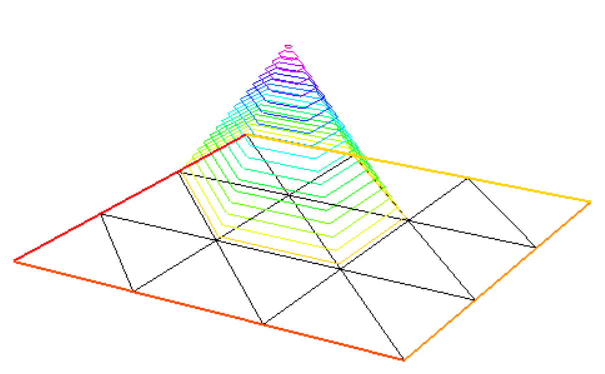
Cas des éléments finis $\mathbb{P}_1$

Exemple de fonctions chapeaux sur $\Omega =]0,1[^2$



Cas des éléments finis $\mathbb{P}_1$

Exemple de fonctions chapeaux sur $\Omega =]0,1[^2$



Discrétisation de Galerkin

Problème

Trouver une fonction u appartenant à l'espace H_0 et telle que pour toute fonction v dans H_0 :

$$(\mathcal{P}_f) \qquad a\,(u, v) = L(v).$$

Discrétisation de Galerkin

Problème

Trouver une fonction u appartenant à l'espace H_0 et telle que pour toute fonction v dans H_0 :

$$(\mathcal{P}_f) \qquad a\,(u,v) = L(v).$$

Problème (discrétisé)

Soit V_h^0 l'espace éléments finis $\mathbb{P}_1$ associé au maillage $\mathcal{T}_h$ sur Ω. Trouver u_h fonction de V_h^0 telle que pour toute fonction v_h de V_h^0 :

$$(\mathcal{P}_h) \qquad a\,(u_h,v_h) = L(v_h).$$

Discrétisation de Galerkin

Problème

Trouver une fonction u appartenant à l'espace H_0 et telle que pour toute fonction v dans H_0 :

$(\mathcal{P}_f)$ $$a(u, v) = L(v).$$

Problème (discrétisé)

Soit V_h^0 l'espace éléments finis $\mathbb{P}_1$ associé au maillage $\mathcal{T}_h$ sur Ω. Trouver u_h fonction de V_h^0 telle que pour toute fonction v_h de V_h^0 :

$(\mathcal{P}_h)$ $$a(u_h, v_h) = L(v_h).$$

Proposition

Par Lax-Milgram, le problème discrétisé admet une unique solution u_h appartenant à V_h^0.

Discrétisation de Galerkin

Problème (discrétisé)

Trouver u_h fonction de V_h^0 telle que pour toute fonction v_h de V_h^0 :

$$(\mathcal{P}_h) \qquad \int_\Omega \nabla u_h \nabla v_h = \int_\Omega f v_h.$$

Discrétisation de Galerkin

Problème (discrétisé)

Trouver u_h fonction de V_h^0 telle que pour toute fonction v_h de V_h^0 :

$$(\mathcal{P}_h) \qquad \int_\Omega \nabla u_h \nabla v_h = \int_\Omega f v_h.$$

Problème (discrétisé)

Trouver u_h fonction de V_h^0 telle que pour toute fonction chapeau φ_j :

$$(\mathcal{P}_h) \qquad \int_\Omega \nabla u_h \nabla \varphi_j = \int_\Omega f \varphi_j.$$

Discrétisation de Galerkin

Ecrivons u_h dans la base des fonctions chapeaux : $u_h = \sum_{i=1}^{N} u_i \varphi_i$.

Discrétisation de Galerkin

Ecrivons u_h dans la base des fonctions chapeaux : $u_h = \sum_{i=1}^{N} u_i \varphi_i$.

On peut donc associer à cette fonction le vecteur
$\overline{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_N)$

Discrétisation de Galerkin

Ecrivons u_h dans la base des fonctions chapeaux : $u_h = \sum_{i=1}^{N} u_i \varphi_i$.

On peut donc associer à cette fonction le vecteur $\overline{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_N)$ et réécrire $(\mathcal{P}_h)$:

$$\int_\Omega \nabla \left(\sum_{i=1}^{N} u_i \varphi_i \right) \nabla \varphi_j = \int_\Omega f \varphi_j, \ \forall j \in \{1, \ldots, N\}$$

Discrétisation de Galerkin

Ecrivons u_h dans la base des fonctions chapeaux : $u_h = \sum_{i=1}^{N} u_i \varphi_i$.

On peut donc associer à cette fonction le vecteur $\overline{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_N)$ et réécrire $(\mathcal{P}_h)$:

$$\int_\Omega \nabla \left(\sum_{i=1}^{N} u_i \varphi_i \right) \nabla \varphi_j = \int_\Omega f \varphi_j, \ \forall j \in \{1, \ldots, N\}$$

i.e.

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\int_\Omega \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j \right) u_i = \int_\Omega f \varphi_j, \ \forall j \in \{1, \ldots, N\}.$$

Discrétisation de Galerkin

Autrement dit, on obtient le système linéaire :

$$(\mathcal{S}) \qquad A\overline{u} = \overline{f},$$

Discrétisation de Galerkin

Autrement dit, on obtient le système linéaire :

$$(\mathcal{S}) \qquad A\overline{u} = \overline{f},$$

où $\overline{f} = \left(\int_\Omega f \varphi_i \right)_{1 \leqslant i \leqslant N}$

Discrétisation de Galerkin

Autrement dit, on obtient le système linéaire :

$$(\mathcal{S}) \qquad\qquad A\overline{u} = \overline{f},$$

où $\overline{f} = \left(\int_\Omega f\varphi_i\right)_{1\leqslant i\leqslant N}$ et
$A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant N} = \left(\int_\Omega \nabla\varphi_i \nabla\varphi_j\right)_{1\leqslant i,j\leqslant N}.$

Discrétisation de Galerkin

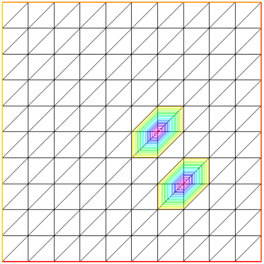
Remarque

La matrice A possède un grand nombre de coefficients $a_{i,j} = \int_\Omega \nabla\varphi_i \nabla\varphi_j$ qui sont en fait nuls.

Discrétisation de Galerkin

Remarque

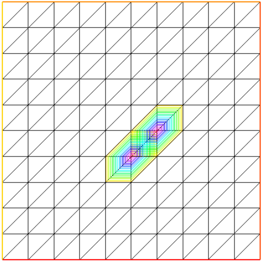
La matrice A possède un grand nombre de coefficients $a_{i,j} = \int_\Omega \nabla\varphi_i \nabla\varphi_j$ qui sont en fait nuls.



Discrétisation de Galerkin

Remarque

La matrice A possède un grand nombre de coefficients $a_{i,j} = \int_\Omega \nabla\varphi_i \nabla\varphi_j$ qui sont en fait nuls.



Estimation d'erreur a priori

Théorème

Soit u la solution du problème $(\mathcal{P}_f)$ et u_h la solution éléments finis du problème discret $(\mathcal{P}_h)$. Alors il existe une constante C qui dépend uniquement de la forme du maillage $\mathcal{T}_h$ (mais indépendante du pas h) telle que :

$$||\nabla(u - u_h)|| \leqslant Ch|u|_2, \tag{1}$$

Estimation d'erreur a priori

Théorème

Soit u la solution du problème $(\mathcal{P}_f)$ et u_h la solution éléments finis du problème discret $(\mathcal{P}_h)$. Alors il existe une constante C qui dépend uniquement de la forme du maillage $\mathcal{T}_h$ (mais indépendante du pas h) telle que :

$$||\nabla(u - u_h)|| \leqslant Ch|u|_2, \tag{1}$$

De plus, si Ω est convexe il existe une constante C qui dépend de la forme du maillage $\mathcal{T}_h$ et de Ω (mais indépendant de h) telle que :

$$||u - u_h|| \leqslant Ch^2|u|_2. \tag{2}$$

où $|\cdot|_2$ est une semi-norme faisant intervenir les dérivées partielles secondes de u.

Estimation d'erreur a posteriori

Théorème

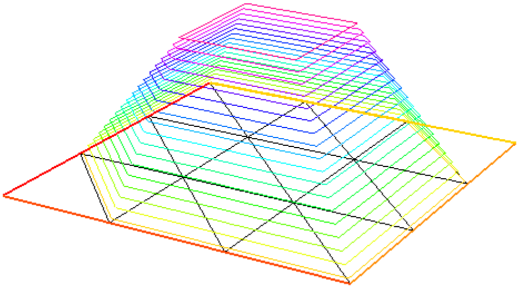
Soit u la solution du problème $(\mathcal{P}_f)$ et u_h la solution éléments finis du problème discret $(\mathcal{P}_h)$. Alors il existe une constante C qui dépend uniquement de la forme du maillage $\mathcal{T}_h$ (mais indépendante du pas h) telle que :

$$||\nabla(u - u_h)|| \leqslant C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 ||f + \Delta u_h||^2_{L^2(T)} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left|\left| \left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right] \right|\right|^2_{L^2(E)} \right)^{1/2},$$

où $\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]$ est le saut de la dérivée normale de u_h et $\mathcal{E}_h$ est l'ensemble de toutes les arêtes du maillage.

Exemple numérique

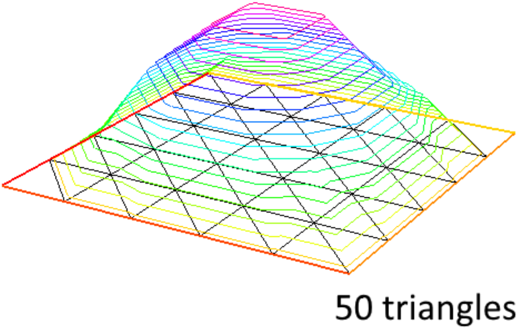
Approximation éléments finis $\mathbb{P}_1$ avec $\Omega =]0,1[^2$,
$f(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ et $u(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x)\sin(\pi y)$.



18 triangles

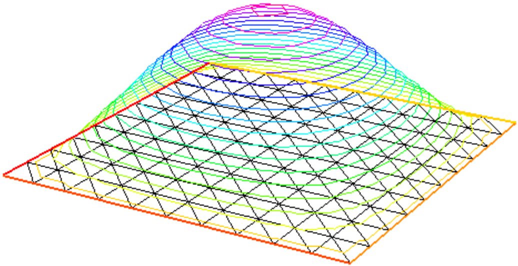
Exemple numérique

Approximation éléments finis $\mathbb{P}_1$ avec $\Omega =]0,1[^2$,
$f(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ et $u(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x)\sin(\pi y)$.



Exemple numérique

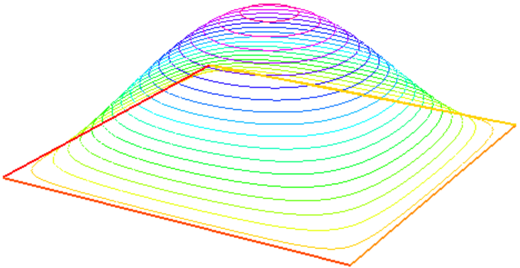
Approximation éléments finis $\mathbb{P}_1$ avec $\Omega =]0,1[^2$,
$f(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ et $u(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x)\sin(\pi y)$.



200 triangles

Exemple numérique

Approximation éléments finis $\mathbb{P}_1$ avec $\Omega =]0,1[^2$,
$f(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ et $u(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x)\sin(\pi y)$.



20 000 triangles

Merci de votre attention !