Mathématiques pour la modélisation
Dynamique des populations

B. Andreianov, C. Caldini, C. Donadello, P. Klein

Université de Franche-Comté

14 novembre 2012

Introduction

Population : ensemble fini d'objets (les individus ou unités statistiques) sur lesquels porte une étude et dont les éléments répondent à une ou plusieurs caractéristiques communes. (Source : Wikipedia)

Exemples : une colonie d'animaux (on peut compter les individus ou les couples), une forêt, une tumeur (individus : cellules).

Hypothèse raisonnable : le nombre d'individus (ou d'unités statistiques) est un nombre entier.

Variation d'une population dans le temps

- Evénements qui augmentent la population : . . . ;
- Evénements qui diminuent la population : . . . ;
- Temps écoulé entre deux mesures successives : modèles continus ou discrets ?

Modèle malthusien

Modèle de Malthus

En 1798, Thomas Malthus publie la première version de son essai sur la dynamique de la population humaine. Son œuvre fait une grande clameur.

En 1944, 29 rennes ont été introduits sur l'île de St Matthew en mer de Béring. En l'absence de prédateur, et en présence de ressources alimentaires abondantes, la population a explosé, atteignant 6000 individus dans l'été 1963, soit une croissance de 30% *par an. Six mois plus tard toute la population sauf 42 femelles était morte de faim, et la végétation gravement et durablement dégradée.*
(Source : `http://dieoff.org/page80.htm`)

Modèle structuré par tranches d'âge

Les lapins de Fibonacci (1202)

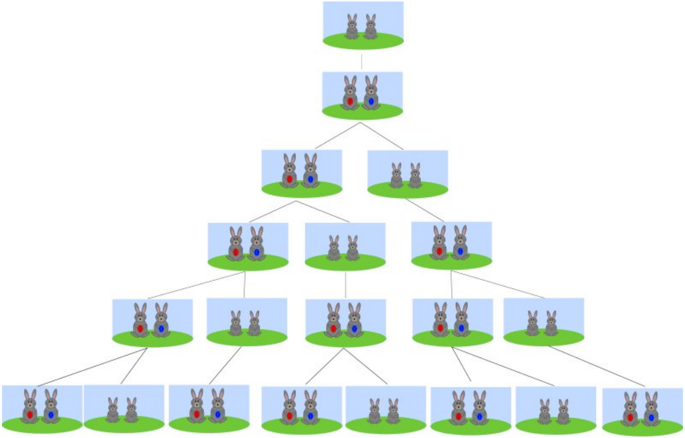


Figure:
http://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:FibonacciRabbit.svg

Du modèle à la population

Une population de rongeurs est décrite par le modèle suivant, où P_n est la population totale à l'instant $n \cdot \Delta t$, et B_n, A_n et V_n sont trois classes d'âges de cette population au même instant.

$$
\begin{aligned}
P_n &= B_n + A_n + V_n, \\
B_{n+1} &= 3A_n + V_n, \\
A_{n+1} &= \frac{2}{3} B_n, \\
V_{n+1} &= \frac{5}{6} A_n.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Ce modèle est utilisé (avec discernement) pour la population humaine

Les données de l'INSEE

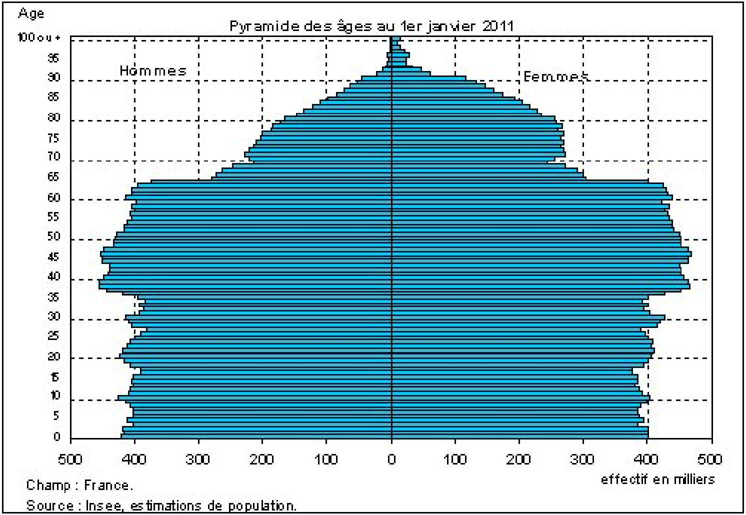


Figure: http://www.insee.fr/fr/themes/tableau.asp?reg_id=0&ref_id=ccc&page=graph

Indice de fécondité par classe d'âge

	Nombre de naissances pour 100 femmes					Âge moyen des mères (en années) (1)
	15-24 ans	25-29 ans	30-34 ans	35-39 ans	40 ans ou plus	
1994	3,4	12,9	9,4	3,8	0,4	28,8
1995	3,3	13,2	10,0	4,0	0,4	28,9
1996	3,2	13,1	10,4	4,2	0,4	29,0
1997	3,1	12,8	10,5	4,3	0,4	29,1
1998	3,1	12,9	10,9	4,6	0,5	29,3
1999	3,1	12,9	11,1	4,8	0,5	29,3
2000	3,3	13,4	11,7	5,0	0,5	29,3
2001	3,4	13,2	11,7	5,1	0,5	29,3
2002	3,3	13,0	11,6	5,2	0,6	29,4
2003	3,3	12,9	11,9	5,3	0,6	29,5
2004	3,3	12,9	12,0	5,4	0,6	29,5
2005	3,2	12,8	12,3	5,6	0,6	29,6
2006	3,3	13,1	12,7	6,0	0,7	29,7
2007	3,2	12,8	(r) 12,6	6,1	0,7	29,8
2008 (p)	3,3	12,9	(r) 12,9	6,2	0,7	29,8
2009 (p)	3,2	(r) 12,8	13,0	6,3	0,7	29,9
2010 (p)	3,1	12,7	13,3	6,4	0,7	30,0

p : données provisoires.

r : données révisées.

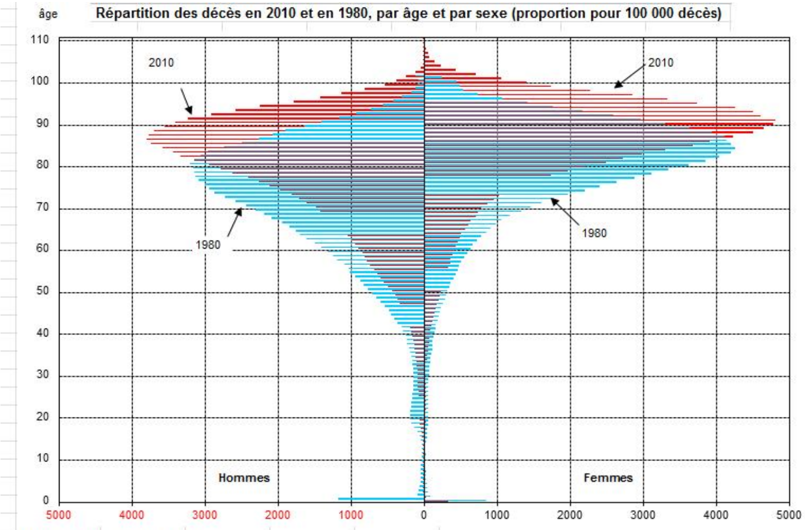
(1) : âge calculé pour une génération fictive de femmes qui auraient à chaque âge la fécondité observée pour les femmes du même âge l'année considérée.

Champ : France.

Source : Insee, estimation de population et statistiques de l'état civil.

Figure: `http://www.insee.fr/fr/themes/tableau.asp?reg_id=0&ref_id=NATTEF02235`

Répartition des décès par âge et par sexe



Champ : France métropolitaine

Sources : Insee, estimations de population et statistiques de l'état civil.

Modèle logistique

Influence de l'environnement

Limitation de la population par l'environnement :

- nourriture à disposition,
- espace nécessaire à l'espèce.

Un exemple : Les mouches

Supposons que l'on mette 10 mouches dans un espace limité.

- Au bout d'une heure, on peut en voir 20.
- Au bout de 12 heures, il y en a environ 80.
- Au bout de 24 heures, il y en a toujours environ 80.

La taille de la population semble se "stabiliser" autour d'une taille limite.

Modélisation

On modélise ce phénomène à l'aide de l'équation logistique.

$$N_{n+1} - N_n = N_n \left[a \underbrace{- b N_n}_{\text{régulation}} \right]$$

- a : taux d'accroissement de la population sans interaction.
- b : facteur de diminution de l'accroissement en fonction de la taille de la population.

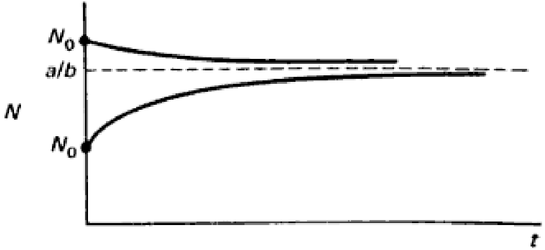


Figure: Évolution de la population selon le modèle logistique.

Source : *Mathematical models: mechanical vibrations, population dynamics, and traffic flow*, Richard Haberman.

Introduction d'un délai

On considère une population de cerfs, mesurée tous les ans ($\Delta t = 1$ an).
L'accroissement dans une zone donnée dépend de la végétation disponible.
La végétation disponible est celle qui n'a pas été mangée par les cerfs l'année d'avant.
Il y a donc un délai d'un an à considérer.

Modélisation

On modélise ce phénomène à l'aide de l'équation logistique avec délai en temps.

$$N_{n+1} - N_n = N_n \left[a \underbrace{- b\, N_{n-1}}_{\text{délai}} \right]$$

On voit intervenir 3 niveaux de temps : $n-1$, n, et $n+1$.

Exemple

Prenons $N_0 = 10$, $a = 1/5$, $b = 1/400$.

Que veulent dire ces valeurs?

Mise en évidence de la convergence

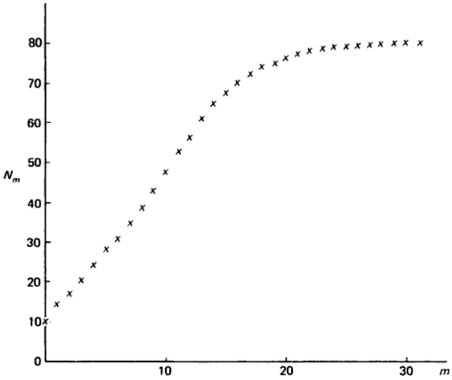


Figure: Simulation numérique : N_n en fonction de n.

Source : *Mathematical models: mechanical vibrations, population dynamics, and traffic flow*, Richard Haberman.

Modèle proie-prédateur

Interactions entre deux espèces de population

L'évolution conjointe de deux espèces en interaction peut suivre différents principes :

neutralisme	$0\ /\ 0$	
compétition	$-\ /\ -$	pour la même nourriture
coopération	$+\ /\ +$	
mutualisme	$+\ /\ +$	anémone de mer / poisson clown
commensalisme	$+\ /\ 0$	tire parti de son hôte sans l'endommager
symbiose	$+\ /\ +$	bactéries digérant la cellulose (termites, vaches)
parasitisme	$+\ /\ -$	le parasite endommage l'hôte mais ne le tue pas
prédation	$+\ /\ -$	le prédateur tire parti de sa proie en la tuant

...

Interactions obligatoires ou non-obligatoires.

Modèle de prédation

Exemple

En mer Adriatique,

$$\text{plancton} \xleftarrow{\text{mangé par}} \text{sardines} \xleftarrow{\text{mangé par}} \text{requins}$$

- Avant la première guerre mondiale, la pêche intensive des sardines établissait un équilibre entre ces populations.
- Pendant la guerre, il n'y a pas eu de pêche.
  Les sardines se sont développées.
- A la fin de la guerre, les pêcheurs reviennent.

$\Rightarrow$ Qu'observe-t-on ?

Modèle de prédation

Exemple

En mer Adriatique,

$$\text{plancton} \quad \xleftarrow{\text{mangé par}} \quad \text{sardines} \quad \xleftarrow{\text{mangé par}} \quad \text{requins}$$

- Avant la première guerre mondiale, la pêche intensive des sardines établissait un équilibre entre ces populations.
- Pendant la guerre, il n'y a pas eu de pêche.
  Les sardines se sont développées.
- A la fin de la guerre, les pêcheurs reviennent.

$\Rightarrow$ Qu'observe-t-on ?

Peu de sardines !

Explication

Début de la guerre

Pas de pêche

$$\Downarrow$$

Pop. sardines $\nearrow$

Explication

Début de la guerre

Pas de pêche

$\Downarrow$

Pop. sardines $\nearrow$

$\searrow$

Pop. requins $\nearrow$

Explication

Début de la guerre

Pas de pêche

$\Downarrow$

Pop. sardines $\nearrow$

$\Searrow$

Pop. requins $\nearrow$

$\Swarrow$

Pop. sardines décimée, $\searrow$

Fin de la guerre

Explication

Début de la guerre

Pas de pêche

$\Downarrow$

Pop. sardines $\nearrow$

$\Searrow$

Pop. requins $\nearrow$

$\Swarrow$

Pop. sardines décimée, $\searrow$

Fin de la guerre

$\Nwarrow$

Pop. requins affamée, $\searrow$

Explication

Début de la guerre

Pas de pêche

Variations périodiques !

$\Downarrow$

Pop. sardines $\nearrow$

$\searrow$

Pop. requins $\nearrow$

$\swarrow$

Pop. sardines décimée, $\searrow$

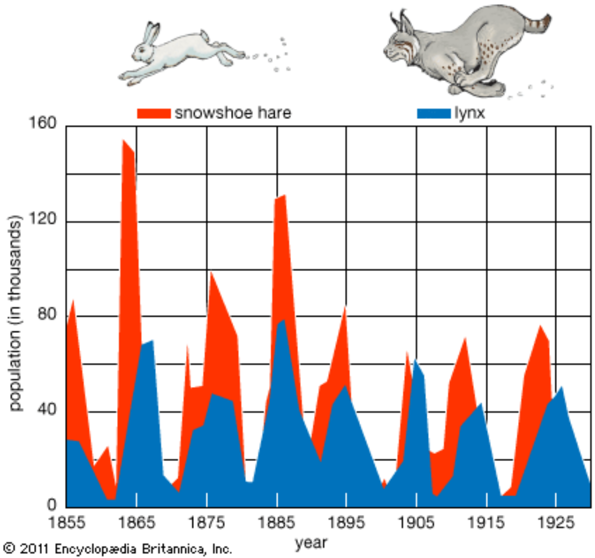
Fin de la guerre

$\nwarrow$

Pop. requins affamée, $\searrow$

$\nearrow$

Autre observation : lièvre / lynx (Canada)



Modélisation

Principes

- Une espèce *proie* et une espèce *prédateur*
  Ex. : mouton/loup, lapin/renard, sardine/requin, ...
- Migrations négligeables
- La variation de chacune des deux espèces de population ne dépend que de la population précédente pour les deux espèces

Notations

- S_n = nombre de sardines au temps n
- R_n = nombre de requins au temps n

On cherche à décrire l'évolution de chaque population :

$$S_{n+1} - S_n, \qquad R_{n+1} - R_n$$

Population de sardines en l'absence de requins

- En l'absence de requins, les sardines se multiplient (natalité > mortalité naturelle)

$\Rightarrow$ Si la nourriture (plancton) est illimitée, accroissement naturel a constant.

$$S_{n+1} - S_n = a\, S_n \qquad (a > 0)$$

La population de sardines croît de manière exponentielle.

Population de sardines en l'absence de requins

- En l'absence de requins, les sardines se multiplient (natalité > mortalité naturelle)

$\Rightarrow$ Si la nourriture (plancton) est illimitée, accroissement naturel a constant.

$$S_{n+1} - S_n = a\, S_n \qquad (a > 0)$$

La population de sardines croît de manière exponentielle.

Population de requins en l'absence de sardines

- En l'absence de sardines, les requins n'ont pas de nourriture.

$\Rightarrow$ Taux de mortalité > taux de natalité (famine)

$$R_{n+1} - R_n = -k\, R_n \qquad (k > 0)$$

Dans ce cas, la population de requins tend vers l'extinction.

Requins et sardines

- La présence de requins décime la population de sardines, proportionnellement à la population de requins

$$S_{n+1} - S_n = a\, S_n - \underbrace{b\, R_n}_{\text{taux de mortalité par "chasse"}} \; S_n \qquad (b > 0)$$

Requins et sardines

- La présence de requins décime la population de sardines, proportionnellement à la population de requins

$$S_{n+1} - S_n = a\,S_n - \underbrace{b\,R_n}_{\substack{\text{taux de mortalité}\\ \text{par "chasse"}}}\,S_n \qquad (b > 0)$$

- La présence de sardines permet aux requins de se nourrir : le taux de natalité reprend, proportionnellement à la population de nourriture.

$$R_{n+1} - R_n = -k\,R_n + \underbrace{c\,S_n}_{\substack{\text{taux de natalité}\\ \text{"supplémentaire"}}}\,R_n \qquad (c > 0)$$

Requins et sardines

- La présence de requins décime la population de sardines, proportionnellement à la population de requins

$$S_{n+1} - S_n = a\,S_n - \underbrace{b\,R_n}_{\substack{\text{taux de mortalité} \\ \text{par "chasse"}}}\,S_n \qquad (b > 0)$$

- La présence de sardines permet aux requins de se nourrir : le taux de natalité reprend, proportionnellement à la population de nourriture.

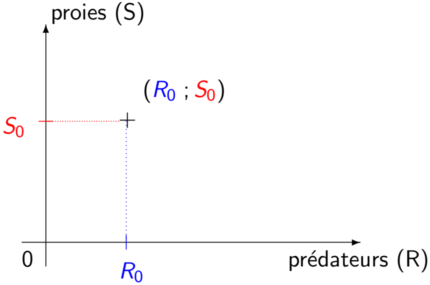
$$R_{n+1} - R_n = -k\,R_n + \underbrace{c\,S_n}_{\substack{\text{taux de natalité} \\ \text{"supplémentaire"}}}\,R_n \qquad (c > 0)$$

Modèle de Lotka-Volterra (1920)

$$\begin{cases} S_{n+1} - S_n = S_n\,(a - b\,R_n) \\ R_{n+1} - R_n = R_n\,(-k + c\,S_n) \end{cases}$$

Etude du modèle de Lotka-Volterra

$$\begin{cases} S_{n+1} - S_n = S_n\,(a - b\,R_n) \\ R_{n+1} - R_n = R_n\,(-k + c\,S_n) \end{cases}$$

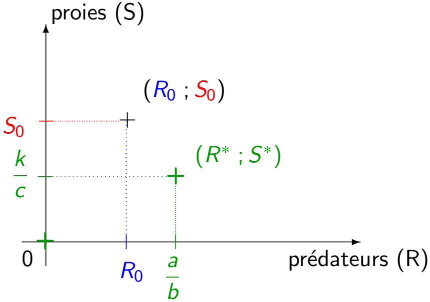


Recherche d'une situation d'équilibre

Stabilisation des populations ? $\begin{cases} S_{n+1} - S_n = 0 \\ R_{n+1} - R_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \dots$

Etude du modèle de Lotka-Volterra

$$\begin{cases} S_{n+1} - S_n = S_n\,(a - b\,R_n) \\ R_{n+1} - R_n = R_n\,(-k + c\,S_n) \end{cases}$$



Recherche d'une situation d'équilibre

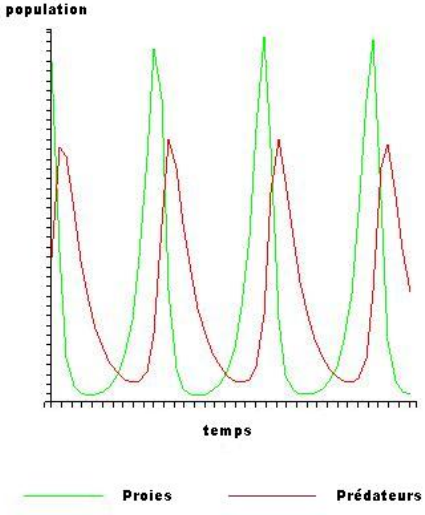
Stabilisation des populations ? $\begin{cases} S_{n+1} - S_n = 0 \\ R_{n+1} - R_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \dots$

$\Rightarrow$ Deux points d'équilibre :

- $R^* = 0$ et $S^* = 0$
- $R^* = \dfrac{a}{b}$ et $S^* = \dfrac{k}{c}$

Solutions du modèle de Lotka-Volterra

- Variations périodiques
- Retour à l'effectif initial
- Prédateur en retard d'un quart de période



Source :
`http://fr.wikipedia.org/wiki/Equations_de_Lotka-Volterra`

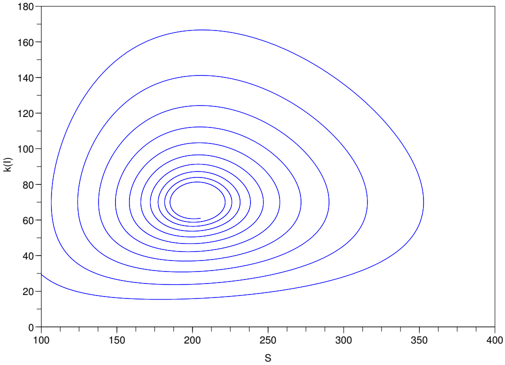
Portrait de phase

Etude de la propagation d'une maladie contagieuse

- Individus S susceptibles d'être infectés
- Individus I infectés

La spirale "s'enroule"

$\Rightarrow$ convergence vers un point d'équilibre entre les deux populations.



Simulation : U. Razafison