Convergence L^p des séries de Fourier

par A. Nou

1 Rappels et définitions

1.1 Rappels et notations

Pour $1 \leqslant p < +\infty$, on note $L^p(\mathbb{T})$ l'ensemble des (classes modulo l'égalité presque partout de) fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ boréliennes, 2π-périodiques et telles que $|f|^p$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}$ (pour la mesure de Lebesgue).
On note $L^\infty(\mathbb{T})$ l'ensemble des (classes modulo l'égalité presque partout de) fonctions boréliennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodiques et qui sont essentiellement bornées sur $\mathbb{R}$ (pour la mesure de Lebesgue).
Pour $p \in [1, +\infty]$, les espaces $L^p(\mathbb{T})$ sont des espaces de Banach lorsqu'on les munit de la norme $\|.\|_p$ définie par

$$\forall f \in L^p(\mathbb{T}) \quad \|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_0^{2\pi} |f|^p \frac{d\lambda}{2\pi}\right)^{1/p} & \text{si } 1 \leqslant p < +\infty \\ \operatorname{supess}|f| & \text{si } p = +\infty \end{cases}.$$

L'espace $L^2(\mathbb{T})$ est un espace de Hilbert et la norme $\|.\|_2$ dérive du produit scalaire défini par

$$\forall f, g \in L^2(\mathbb{T}) \quad \langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f\overline{g}\frac{d\lambda}{2\pi}.$$

On note $C(\mathbb{T})$ l'algèbre des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et $\mathscr{P}$ la sous-algèbre des polynômes trigonométriques, i.e.

$$\mathscr{P} = \operatorname{Vect}\{e_n,\ n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{où} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \ \ e_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{inx} \end{array}.$$

On rappelle que $\mathscr{P}$ est dense dans $(C(\mathbb{T}), \|.\|_\infty)$ (Stone-Weierstrass) et est dense dans tous les $L^p(\mathbb{T})$ pour $1 \leqslant p < +\infty$ (par densité de $C(\mathbb{T})$ dans $L^p(\mathbb{T})$). En particuler pour $p = 2$, la famille orthonormale $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.

Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{Z}$, le n-ème coefficient de Fourier de f est

$$\widehat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\frac{dx}{2\pi}.$$

La série de Fourier de f est la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e_n$. Les sommes partielles $S_n(f) := \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k)e_k$ de cette série s'écrivent aussi

$$S_n(f) = D_n * f \quad \text{où} \quad D_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k,$$

est le noyau de Dirichlet et la convolée de deux fonctions mesurables 2π-périodiques f et g est définie en un point $x \in \mathbb{R}$ par

$$(f * g)(x) = \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\frac{dt}{2\pi} \quad \text{dès que} \quad f(x-\cdot)g \in L^1(\mathbb{T}).$$

Le but premier de cet exposé est d'étudier, pour $f \in L^p$, la convergence de $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ dans L^p. Il est relativement facile de montrer la convergence des moyennes de Césaro. Plus précisément, pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, on note

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f) = F_n * f \quad \text{où} \quad F_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k,$$

est le noyau de Fejér. On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le noyau F_n est positif et $\|F_n\|_1 = 1$.

Théorème I.1 (Fejér-Lebesgue)

1. Soit $1 \leqslant p < +\infty$. Pour tout $f \in L^p(\mathbb{T})$, la suite $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{T})$.
2. Pour tout $f \in C(\mathbb{T})$, la suite $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $C(\mathbb{T})$.
3. Pour tout $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, la suite $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge préfaiblement vers f.

Preuve
Soit $1 \leqslant p < +\infty$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in L^p(\mathbb{T})$. Par l'inégalité de Young, on a

$$\|\sigma_n(f)\|_p = \|F_n * f\|_p \leqslant \|F_n\|_1 \cdot \|f\|_p \leqslant \|f\|_p.$$

On a donc $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|\sigma_n\|_{L^p\to L^p} \leqslant 1$. La famille d'applications linéaires $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc équicontinue.
Si $f \in \mathscr{P}$, pour tout $n \geqslant \deg(f)$ on a $S_n(f) = f$ et donc par le lemme de Césaro $\sigma_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ dans $L^p(\mathbb{T})$. La suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement vers l'identité sur $\mathscr{P}$ qui est un sous-ensemble dense de $L^p(\mathbb{T})$. Par équicontinuité, on en déduit que $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers l'identité sur $L^p(\mathbb{T})$ tout entier.
La preuve du second point s'écrit à l'identique en remplaçant partout $L^p(\mathbb{T})$ par $C(\mathbb{T})$ et $\|.\|_p$ par $\|.\|_\infty$.
Pour le dernier point, observons que pour tout $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ et $g \in L^1(\mathbb{T})$, on a

$$\langle S_n(f), g\rangle_{\infty,1} = \int_0^{2\pi} S_n(f) g \frac{d\lambda}{2\pi} = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) \int_0^{2\pi} g e_k \frac{d\lambda}{2\pi} = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\widehat{g}(-k) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(-k)\widehat{g}(k) = \langle f, S_n(g)\rangle_{\infty,1}.$$

La même propriété est aussi vraie pour σ_n, et a donc grâce au premier point (cas $p = 1$)

$$\langle \sigma_n(f) - f, g\rangle_{\infty,1} = \langle f, \sigma_n(g) - g\rangle_{\infty,1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Remarques.

- Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $g \in L^1(\mathbb{T})$ alors par le lemme de Césaro et le théorème I.1, on a $f = g$.
- Si $f \in L^\infty(\mathbb{T}) \setminus C(\mathbb{T})$ alors la suite $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente dans $L^\infty(\mathbb{T})$. En effet, supposons que $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ et que $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers g dans $L^\infty(\mathbb{T})$. Par le théorème I.1, la suite $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^1(\mathbb{T})$ donc $g = f$. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\sigma_n(f) \in \mathscr{P} \subset C(\mathbb{T})$. Comme $C(\mathbb{T})$ est fermé dans $L^\infty(\mathbb{T})$ on a donc $f \in C(\mathbb{T})$.
- A fortiori, par le lemme de Césaro, si $f \in L^\infty(\mathbb{T}) \setminus C(\mathbb{T})$ alors la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente dans $L^\infty(\mathbb{T})$.
- Profitons-en pour rappeler un fait classique : il existe $f \in C(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier diverge en 0 (il y a même un G_δ-dense de telles fonctions).

1.2 Projection de Riesz et transformée de Hilbert

Définition I.2

Soit $1 \leqslant p < +\infty$. Pour $f \in \mathscr{P}$, on note $P(f) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \widehat{f}(n) e_n \in \mathscr{P}$. L'opérateur P est appelé projection de Riesz. On dit que P est borné sur L^p lorsqu'il s'étend en une application linéaire continue de L^p dans lui-même.

Remarque. Grâce au théorème de prolongement des applications uniformément continues, P est borné sur L^p si et seulement si $\exists C > 0\ \forall f \in \mathscr{P} \quad \|P(f)\|_p \leqslant C\|f\|_p$.

On note sgn : $\mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}\ \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Définition I.3

Soit $1 \leqslant p < +\infty$. Pour $f \in \mathscr{P}$, on note $H(f) = -i\sum_{n\in\mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(n)\widehat{f}(n)e_n$. L'opérateur $H : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ qui à f associe $H(f)$, est appelé transformée de Hilbert (sur le tore). On dit que H est borné sur L^p lorsqu'il s'étend en une application linéaire continue de L^p dans lui-même.

Remarque. Puisque $\mathscr{P}$ est dense dans $C(\mathbb{T})$, on peut également s'intéresser au problème de la bornitude de H (ou P) sur $C(\mathbb{T})$.

2 Formulations équivalentes de la convergence L^p

Lemme II.1

Pour tout $f \in \mathscr{P}$, on a

1. $\widetilde{f} = -i\big(2P(f) - f - \widehat{f}(0)\big)$ ou encore $P(f) = \frac{1}{2}\big(f + i\widetilde{f} + \widehat{f}(0)\big)$.
2. $\forall n \geqslant \deg(f) \quad P(f) = e_nS_n(fe_{-n})$.
3. $\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n(f) = e_{-n}P(fe_n) - e_{n+1}P(fe_{-n-1})$.

Preuve

1) Soit $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e_n \in \mathscr{P}$. On a

$$\widetilde{f} = -i\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \widehat{f}(n)e_n - \sum_{n\in\mathbb{Z}^*_-} \widehat{f}(n)e_n\Big) = -i\big(P(f) - \widehat{f}(0) - (f - P(f))\big) = -i\big(2P(f) - f - \widehat{f}(0)\big).$$

2) Soit $n \geqslant \deg(f)$. On a $f = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e_k$ et donc

$$e_nS_n(fe_{-n}) = e_nS_n\Big(\sum_{k=-2n}^{0} \widehat{f}(k+n)e_k\Big) = e_n\sum_{k=-n}^{0} \widehat{f}(k+n)e_k = \sum_{k=0}^{n} \widehat{f}(k)e_k = P(f).$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e_n \in \mathscr{P}$. On a

$$e_{-n}P(fe_n) = e_{-n}P\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)e_{n+k}\Big) = e_{-n}\sum_{k\geqslant -n} \widehat{f}(k)e_{n+k} = \sum_{k\geqslant -n} \widehat{f}(k)e_k.$$

Pour la même raison, $e_{n+1}P(fe_{-n-1}) = \sum_{k\geqslant n+1} \widehat{f}(k)e_k$ et la formule annoncée s'en déduit par différence.

Remarque. Observons que $\forall f \in L^p$ et $n \in \mathbb{Z}$ on a $\|fe_n\|_p = \|f\|_p$. Ce fait élémentaire sera utilisé dans la suite.

Théorème II.2

Soit $1 \leqslant p < +\infty$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall f \in L^p \quad \lim_{n \to +\infty} \|S_n(f) - f\|_p = 0$.

(ii) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n\|_{L^p \to L^p} < +\infty$.

(iii) La projection de Riesz est bornée sur L^p.

(iv) La transformée de Hilbert est bornée sur L^p.

Preuve

(i) implique (ii) par le théorème de Banach-Steinhaus. Pour la réciproque, l'hypothèse garantit que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille équicontinue d'applications linéaires. Or la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers l'identité sur le sous-espace dense $\mathscr{P}$. Par équicontinuité, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers l'identité sur tout L^1.

(iii) est équivalent à (iv) grâce au 1) du lemme II.1 et au fait que $f \mapsto \widehat{f}(0)$ est une forme linéaire continue sur L^p.

Montrons que (ii) implique (iii). Soit $f \in \mathscr{P}$ et $n \geqslant \deg(f)$. Grâce au 2) du lemme II.1, on a

$$\|P(f)\|_p = \|e_n S_n(f e_{-n})\|_p = \|S_n(f e_{-n})\|_p \leqslant \sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n\|_{L^p \to L^p} \|f\|_p.$$

Donc P est bornée sur L^p et $\|P\|_{L^p \to L^p} \leqslant \sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n\|_{L^p \to L^p}$.

Montrons que (iii) implique (ii). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{P}$. Par 3) du lemme II.1, on a

$$\|S_n(f)\|_p \leqslant \|e_{-n} P(f e_n)\|_p + \|e_{n+1} P(f e_{-n-1})\|_p \leqslant 2\|P\|_{L^p \to L^p} \|f\|_p.$$

Donc $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n\|_{L^p \to L^p} \leqslant 2\|P\|_{L^p \to L^p}$.

Remarque. Le théorème précédent (et sa preuve) est encore vrai en remplaçant L^p par $C(\mathbb{T})$. Puisque (i) est en défaut pour $C(\mathbb{T})$ aucune des assertions du théorème II.2 n'est vraie pour $C(\mathbb{T})$.

Proposition II.3

On a $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n\|_{L^1 \to L^1} = +\infty$. Il existe donc $f \in L^1$ dont la série de Fourier ne converge pas vers f dans L^1.

Preuve

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $f \in L^1$ avec $\|f\|_1 \leqslant 1$ on a $\|S_n(f)\|_1 = \|D_n * f\|_1 \leqslant \|D_n\|_1$ par Fubini-Tonelli, donc $\|S_n\|_{L^1 \to L^1} \leqslant \|D_n\|_1$. De plus, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\|F_m\|_1 = 1$ et on a

$$S_n(F_m) = D_n * F_m = \sigma_m(D_n) \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} D_n \quad \text{dans} \quad L^1.$$

On a donc $\|S_n\|_{L^1 \to L^1} = \|D_n\|_1$. Or il est classique (en exercice) que $\|D_n\|_1 \sim \frac{4}{\pi^2} \ln(n)$ et on en déduit $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n\|_{L^1 \to L^1} = +\infty$. La dernière partie de la proposition résulte de l'équivalence entre (i) et (ii) dans le théorème II.2.

Remarque. En 1926, Andreï Kolmogorov a construit $f \in L^1$ telle que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \limsup_{n \to +\infty} S_n(f)(x) = +\infty$.

3 Étude de la transformée de Hilbert

Le théorème suivant, dû à Marcel Riesz en 1928, apporte la solution au problème de la convergence L^p des séries de Fourier.

Théorème III.1 (Théorème de M. Riesz)

Pour $1 \leqslant p < +\infty$, la transformée de Hilbert est bornée sur L^p si et seulement si $p \neq 1$.

Remarques.

- Grâce au théorème II.2 nous savons déjà que la transformée de Hilbert n'est pas bornée sur L^1 (cf. proposition II.3).
- Par conséquent, pour $1 < p < \infty$, la série de Fourier de $f \in L^p$ converge en norme L^p vers f. Ce n'est pas la fin de l'histoire car il est possible de montrer que la série de Fourier de f converge presque partout vers f. Ce résultat (toujours) très profond a été démontré dans le cas de L^2 par Lennart Carleson en 1966 et étendu par Richard Hunt en 1968 aux espaces L^p.
- Lorsque $p = 1$, le contre-exemple de Kolmogorov montre qu'il existe $f \in L^1$ dont la série de Fourier ne converge pas presque partout vers f. Le théorème de Carleson-Hunt est donc en défaut dans L^1.

La preuve du théorème de M. Riesz se déroulera en trois étapes. On partira de l'observation que la transformée de Hilbert est bornée sur L^2 puis par récurrence on montrera qu'elle est aussi bornée sur tout L^p où $p = 2^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Dans un second temps, on en déduira, par interpolation complexe, que la transformée de Hilbert est bornée sur L^p pour tout réel $p \geqslant 2$. On conclura par un argument de dualité. Avant de rentrer dans les détails de la preuve, on énonce deux ingrédients clefs.

Lemme III.2 (Identité de Cotlar)

Pour tout $f, g \in \mathscr{P}$ on a

$$H(f)H(g) - fg = H(H(f)g + fH(g)).$$

Preuve

Par bilinéarité, il suffit de prouver l'identité lorsque $f = e_n$ et $g = e_m$ où $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$. L'identité s'écrit alors

$$(\star) \quad (-\operatorname{sgn}(n)\operatorname{sgn}(m) - 1)e_{n+m} = H(-i(\operatorname{sgn}(m) + \operatorname{sgn}(n))e_{n+m})) = -\operatorname{sgn}(n+m)(\operatorname{sgn}(n) + \operatorname{sgn}(m))e_{n+m}.$$

Par symétrie, il suffit d'examiner les trois cas suivants :

- $n = 0$. L'identité $(\star)$ s'écrit $-e_m = H(H(e_m))$. Or $H(H(e_m)) = (-i\operatorname{sgn}(m))^2 e_m = -e_m$ ce qui prouve l'identité dans ce cas.
- $(n > 0$ et $m > 0)$ ou $(n < 0$ et $m < 0)$. Comme $\operatorname{sgn}(n) = \operatorname{sgn}(m) = \operatorname{sgn}(n+m) = \pm 1$, l'identité $(\star)$ s'écrit $(-\operatorname{sgn}(n)^2 - 1)e_{n+m} = -\operatorname{sgn}(n)(\operatorname{sgn}(n) + \operatorname{sgn}(n))e_{n+m}$ et elle est vraie.
- $n > 0$ et $m < 0$. Alors $\operatorname{sgn}(n)\operatorname{sgn}(m) = 1$ et $\operatorname{sgn}(n) + \operatorname{sgn}(m) = 0$ et donc l'identité est vraie dans ce cas.

Le théorème suivant est une conséquence du théorème des trois droites de l'analyse complexe, il est d'une grande utilité en analyse.

Théorème III.3 (Riesz-Thorin)

Soit $(X, \mathscr{B}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{T}, \nu)$ deux espaces mesurés. Notons S l'espace vectoriel des fonctions simples sur X et L^0 l'espace vectoriel des fonctions mesurables sur Y. Soit $T : S \to L^0$ une application linéaire. Soit $1 \leqslant p_0, p_1, q_0, q_1 \leqslant +\infty$, on suppose qu'il existe $M_0, M_1 > 0$ tel que

$$\forall f \in S \quad \|T(f)\|_{q_0} \leqslant M_0 \|f\|_{p_0} \quad \text{et} \quad \|T(f)\|_{q_1} \leqslant M_1 \|f\|_{p_1}.$$

Alors pour tout $\theta \in [0,1]$ on a

$$\forall f \in S \quad \|T(f)\|_q \leqslant M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_p \quad \text{où} \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Par densité, T s'étend alors en un opérateur borné de L^p dans L^q pour chaque couple (p,q) de la forme précédente.

Remarque. On rappelle qu'une fonction simple sur X est une fonction $f : X \to \mathbb{C}$ qui est combinaison linéaire d'indicatrices d'ensembles mesurables de mesure finie.

Preuve du théorème de M. Riesz

Étape 1 : on montre que H est bornée sur tout L^p où $p \geqslant 2$ est une puissance entière de 2.

Dans le cas $p = 2$, comme $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de L^2, il est clair que H est une contraction. Notons au passage que l'opérateur adjoint de H est $H^* = -H$ (en exercice).

Afin de conclure par récurrence, il suffit de montrer que si H est bornée sur L^p où $p > 1$ alors H est bornée sur L^{2p}. Soit $p > 1$ tel que H est borné sur L^p. Il est facile de voir que si $f \in \mathscr{P}$ alors $\overline{H(f)} = H(\overline{f})$. Appliquant l'identité de Cotlar à f et $\overline{f}$, on obtient donc :

$$\forall f \in \mathscr{P} \quad |H(f)|^2 = |f|^2 + H(H(f)\overline{f} + f\overline{H(f)}).$$

Pour $f \in \mathscr{P}$ tel que $\|f\|_{2p} = 1$, on a par inégalité triangulaire dans L^p :

$$\|H(f)\|_{2p}^2 \leqslant \|f\|_{2p}^2 + \|H(H(f)\overline{f} + f\overline{H(f)})\|_p \leqslant 1 + 2\|H\|_{L^p\to L^p} \|H(f)\overline{f}\|_p$$

Par l'inégalité de Hölder on en déduit

$$(\star) \quad \|H(f)\|_{2p}^2 \leqslant 1 + 2\|H\|_{L^p\to L^p} \|H(f)\|_{2p}\|f\|_{2p} \leqslant 1 + 2\|H\|_{L^p\to L^p}\|H(f)\|_{2p}.$$

H est donc nécessairement bornée sur L^{2p}.

Étape 2 : par interpolation, on prouve que H est bornée sur L^p pour tout réel $p \geqslant 2$.

Plus précisément, soit $p \geqslant 2$ et $q = 2^{\mathrm{E}(\log_2(p))}$, de sorte que $p \in [q, 2q]$. D'après la première étape, H est bornée sur L^q et L^{2q}. Puisque $\frac{1}{p} \in [\frac{1}{2q}, \frac{1}{q}]$, il existe $\theta \in [0,1]$ tel que $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{2q}$ (on a $\theta = \frac{2(p-q)}{p}$). Par le théorème de Riesz-Thorin on obtient que H est bornée sur L^p et que

$$\|H\|_{L^p\to L^p} \leqslant \|H\|_{L^q\to L^q}^{1-\theta} \|H\|_{L^{2q}\to L^{2q}}^{\theta} = \|H\|_{L^q\to L^q}^{\frac{2q-p}{p}} \|H\|_{L^{2q}\to L^{2q}}^{\frac{2(p-q)}{p}}.$$

Étape 3 : on raisonne par dualité pour montrer que H est bornée sur L^p pour $1 < p < 2$.

Soit $1 < p < 2$ et $p' > 2$ son exposant conjugué (i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$). Soit $f \in \mathscr{P}$, par la formule de dualité, on a

$$\|H(f)\|_p = \sup_{\substack{g\in\mathscr{P} \\ \|g\|_{p'}\leqslant 1}} \left| \int_0^{2\pi} H(f)(t)\overline{g(t)} \frac{dt}{2\pi} \right|.$$

Comme $H^* = -H$ sur L^2, on en déduit

$$\|H(f)\|_p = \sup_{\substack{g\in\mathscr{P} \\ \|g\|_{p'}\leqslant 1}} \left| \int_0^{2\pi} f(t)\overline{H(g)(t)} \frac{dt}{2\pi} \right|.$$

Utilisant le fait que H est bornée sur $L^{p'}$ ainsi que l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\|H(f)\|_p \leqslant \|f\|_p \|H\|_{L^{p'}\to L^{p'}}.$$

Donc H est bornée sur L^p et $\|H\|_{L^p\to L^p} \leqslant \|H\|_{L^{p'}\to L^{p'}}$ (avec en fait égalité puisqu'on peut a posteriori appliquer le même argument en permutant p et p').

Remarque. Notant $c_p = \|H\|_{L^p\to L^p}$, on déduit de $(\star)$ que c_{2p} est plus petit que la plus grand racine réelle du polynôme $t^2 - 2c_p t - 1$, i.e.

$$c_2 = 1 \quad \text{et} \quad \forall p > 1 \quad c_{2p} \leqslant c_p + \sqrt{c_p^2 + 1}.$$

Or il est facile de voir que la fonction cotangente vérifie

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\quad \operatorname{cotan} \frac{x}{2} = \operatorname{cotan} x + \sqrt{\operatorname{cotan}^2 x + 1}.$$

Puisque $c_2 = 1 = \operatorname{cotan} \frac{\pi}{4}$, on obtient facilement par récurrence que pour tout entier p de la forme $p = 2^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$c_p \leqslant \operatorname{cotan} \frac{\pi}{2p}.$$

Par dualité, pour tout réel p de la forme $p = \frac{2^n}{2^n-1}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ on a donc aussi

$$c_p = c_{p'} \leqslant \operatorname{cotan} \frac{\pi}{2p'} = \tan \frac{\pi}{2p}.$$

Stylianos Pichorides a montré (en 1972) que la norme de la transformée de Hilbert sur L^p est égale à $\tan(\frac{\pi}{2p})$ pour $1 < p \leqslant 2$ et $\operatorname{cotan}(\frac{\pi}{2p})$ pour $2 < p < \infty$. La preuve précédente fournit donc des estimations optimales de c_p pour $p = 2^n$ ou $\frac{2^n}{2^n-1}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, mais l'argument d'interpolation dégrade les estimations pour les autres valeurs de p.

Corollaire III.4

Pour $1 \leqslant p < +\infty$, la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base de Schauder de L^p si et seulement si $p \neq 1$.

Remarques.

- La notion de base de Schauder est définie pour les familles indexées par $\mathbb{N}$. Il convient donc de préciser ici de quelle manière on met $\mathbb{Z}$ en bijection avec $\mathbb{N}$. C'est d'autant plus nécessaire que si $p \neq 2$ alors $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas une base inconditionnelle de L^p (voir plus loin). L'énoncé précis est le suivant : soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ la bijection définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(n) = \mathrm{E}(\frac{(-1)^n n}{2})$, alors la famille $(e_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de Schauder de L^p si et seulement si $p \neq 1$. De manière plus explicite, l'énumération est

$$(e_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (e_0, e_{-1}, e_1, e_{-2}, e_2, e_{-3}, e_3, \ldots, e_{-n}, e_n, \ldots).$$

- Bien que $\mathscr{P}$ soit dense dans $C(\mathbb{T})$, la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas une base de Schauder de $C(\mathbb{T})$ (cf. dernière remarque de la partie I).

Preuve

Rappelons que $(e_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de Schauder de L^p si pour toute $f \in L^p$ il existe une unique suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n e_{\varphi(n)}$ où la série converge dans L^p. Remarquons que l'unicité est évidente : du fait de la continuité des formes linéaires $f \mapsto \widehat{f}(k)$ sur L^p, on a nécessairement $\forall n \in \mathbb{N} \quad \lambda_n = \widehat{f}(\varphi(n))$. Observons également que les sommes partielles de rang pair et impair de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(\varphi(n))e_{\varphi(n)}$ s'écrivent :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{2n} \widehat{f}(\varphi(k))e_{\varphi(k)} = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e_k = S_n(f) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{2n+1} \widehat{f}(\varphi(k))e_{\varphi(k)} = \sum_{k=-n-1}^{n} \widehat{f}(k)e_k = S_n(f)+\widehat{f}(-n-1)e_{-n-1}.$$

Par le lemme de Riemann-Lebesgue, $\widehat{f}(-n-1)e_{-n-1}$ tend vers 0 dans L^p, donc la convergence dans L^p de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(\varphi(n))e_{\varphi(n)}$ est équivalente à la convergence dans L^p de $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$. La conclusion s'en déduit via le théorème II.2 et le théorème de M. Riesz.

4 Conditionnalité de la base trigonométrique

Définition IV.1

Soit E un espace de Banach. Une base de Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est dite inconditionnelle lorsque pour tout $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n \in E$ la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$ converge inconditionnellement.

Remarques.

- Dans un espace de Hilbert séparable, toute base hilbertienne est une base inconditionnelle.
- Les bases de Schauder canoniques des ℓ^p sont inconditionnelles pour $p \in [1, +\infty[$.
- Une base de Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est inconditionnelle si et seulement si pour toute permutation $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la famille $(e_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de Schauder de E.

L'objet de cette partie est d'établir le résultat suivant.

Théorème IV.2

Pour $p \in]1, +\infty[$, la base de Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de L^p est inconditionnelle si et seulement si $p = 2$.

La caractérisation suivante nous sera utile.

Lemme IV.3

Soit E un espace de Banach possédant une base de Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Notons $\mathscr{E} = \mathrm{Vect}(\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\})$. Pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{\pm 1\}^{\mathbb{N}}$, on définit un opérateur $\mathfrak{M}_\varepsilon$: $\mathscr{E} \to \mathscr{E}$ par

$$\forall x = \sum_{n=0}^{N} x_n e_n \in \mathscr{E} \quad \mathfrak{M}_\varepsilon(x) = \sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n x_n e_n.$$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base inconditionnelle de E.

(ii) Les opérateurs $\mathfrak{M}_\varepsilon$ sont bornés sur E.

(iii) Les opérateurs $\mathfrak{M}_\varepsilon$ sont bornés sur E et il existe $C > 0$ tel que

$$\forall \varepsilon \in \{\pm 1\}^{\mathbb{N}} \quad \|\mathfrak{M}_\varepsilon\| \leqslant C.$$

Remarque. On utilise ici la même terminologie que celle déjà utilisée pour la projection de Riesz et la transformée de Hilbert : « $\mathfrak{M}_\varepsilon$ est borné sur E » signifie que $\mathfrak{M}_\varepsilon : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ se prolonge en une application linéaire continue de E dans E.

Preuve

(i) $\Rightarrow$ (ii). Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base inconditionnelle alors pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{\pm 1\}^{\mathbb{N}}$, l'opérateur $\mathfrak{M}_\varepsilon$ s'étend en un opérateur $\mathfrak{M}_\varepsilon : E \to E$ par $\forall x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n \quad \mathfrak{M}_\varepsilon(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n x_n e_n$. Le théorème du graphe fermé permet d'établir que ces opérateurs sont continus (détails en exercice).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Soit $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n \in E$ et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{\pm 1\}^{\mathbb{N}}$. Par hypothèse, pour tout $N \geqslant M \geqslant 0$, on a

$$\Big\| \sum_{n=M}^{N} \varepsilon_n x_n e_n \Big\| \leqslant \|\mathfrak{M}_\varepsilon\| \Big\| \sum_{n=M}^{N} x_n e_n \Big\|.$$

Par le critère de Cauchy, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n x_n e_n$ est donc convergente.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Soit $x \in E$. Puisque la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$ converge inconditionnellement, la famille $(x_n e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable. On en déduit (détails en exercice) qu'il existe $M_x > 0$ tel que pour toute partie finie $F \subset \mathbb{N} \quad \|\sum_{n\in F} x_n e_n\| \leqslant M_x$. On a alors pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{\pm 1\}^{\mathbb{N}}$

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \Big\| \sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n x_n e_n \Big\| \leqslant \Big\| \sum_{\substack{0\leqslant n\leqslant N \\ \varepsilon_n = 1}} x_n e_n \Big\| + \Big\| \sum_{\substack{0\leqslant n\leqslant N \\ \varepsilon_n = -1}} x_n e_n \Big\| \leqslant 2M_x.$$

On en déduit que $\|\mathfrak{M}_\varepsilon(x)\| \leqslant 2M_x$ et par le théorème de Banach-Steinhaus, il existe $C > 0$ tel que

$$\forall \varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{\pm 1\}^{\mathbb{N}} \quad \|\mathfrak{M}_\varepsilon\| \leqslant C.$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Évident.

Définition IV.4

On appelle suite de variables aléatoires de Rademacher toute suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles indépendantes, identiquement distribuées de loi $\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$ sur un même espace probabilisé.

Remarques.

- Toute suite de variables aléatoires de Rademacher est orthonormée dans L^2.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $r_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

  $$\forall x \in [0,1] \;\; r_n(x) = \operatorname{sgn}(\sin(2^n \pi x)).$$

  On peut montrer que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires de Rademacher sur l'espace probabilisé $([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$. Pour fixer les idées, c'est cette suite de variables aléatoires de Rademacher qui sera utilisée dans la suite.

Théorème IV.5 (Inégalités de Khintchin)

Pour tout $p \in [1, +\infty[$, il existe des constantes $A_p, B_p > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \; \forall (a_k)_{k=1}^{n} \in \mathbb{R}^n \quad A_p \Big\| \sum_{k=1}^{n} a_k r_k \Big\|_2 \leqslant \Big\| \sum_{k=1}^{n} a_k r_k \Big\|_p \leqslant B_p \Big\| \sum_{k=1}^{n} a_k r_k \Big\|_2.$$

Preuve
On commence par le cas $p \geqslant 2$. Puisqu'on est sur un espace probabilisé, la première inégalité est vraie si $p \geqslant 2$ avec $A_p = 1$. Pour la même raison, il suffit de démontrer la seconde inégalité pour tout entier pair supérieur ou égal à 2, afin de l'obtenir pour tout réel supérieur ou égal à 2. On va donc établir par récurrence sur $n \geqslant 1$:

$$(P_n) \quad \forall p \in \mathbb{N}^* \; \forall (a_k)_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n \quad \Big\| \sum_{k=1}^n a_k r_k \Big\|_{2p} \leqslant B_{2p} \Big\| \sum_{k=1}^n a_k r_k \Big\|_2 \quad \text{où} \quad B_{2p}^{2p} = \frac{(2p)!}{2^p p!}.$$

L'initialisation découle de $\|r_1\|_{2p} = 1$ et de $B_{2p} \geqslant 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel (P_n) est vraie. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(a_k)_{k=1}^{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Dans la suite, on note $S_n = \sum_{k=1}^n a_k r_k$; par indépendance on a

$$T := \int_0^1 (S_n + a_{n+1} r_{n+1})^{2p} d\lambda = \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} a_{n+1}^{2p-k} \int_0^1 S_n^k r_{n+1}^{2p-k} d\lambda = \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} a_{n+1}^{2p-k} \Big(\int_0^1 S_n^k d\lambda \Big) \Big(\int_0^1 r_{n+1}^{2p-k} d\lambda \Big).$$

Comme les moments d'ordre impair des Rademacher sont nuls, on obtient

$$T = \sum_{k=0}^{p} \binom{2p}{2k} a_{n+1}^{2(p-k)} \int_0^1 S_n^{2k} d\lambda,$$

puis par hypothèse de récurrence (et en posant $B_0 = 1$ pour $k = 0$)

$$T \leqslant \sum_{k=0}^{p} \binom{2p}{2k} a_{n+1}^{2(p-k)} B_{2k}^{2k} \Big(\int_0^1 S_n^2 d\lambda \Big)^k.$$

Or il est facile de voir que pour tout $0 \leqslant k \leqslant p$ on a $\binom{2p}{2k} B_{2k}^{2k} \leqslant \binom{p}{k} B_{2p}^{2p}$, et on en déduit

$$T \leqslant B_{2p}^{2p} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a_{n+1}^{2(p-k)} \Big(\int_0^1 S_n^2 d\lambda \Big)^k = B_{2p}^{2p} \Big(a_{n+1}^2 + \int_0^1 S_n^2 d\lambda \Big)^p = B_{2p}^{2p} \Big(\int_0^1 (S_n + a_{n+1} r_{n+1})^2 d\lambda \Big)^p.$$

Ceci établit (P_{n+1}) et achève la récurrence.
Dans le cas $1 \leqslant p < 2$, la seconde inégalité est vraie avec $B_p = 1$. Montrons la première inégalité. Il existe $\theta \in [0,1]$ tel que $\frac{1}{2} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{4}$ et par l'inégalité d'interpolation (conséquence de Hölder généralisé) :

$$\|S_n\|_2 \leqslant \|S_n\|_p^\theta \|S_n\|_4^{1-\theta}.$$

Or $\|S_n\|_4 \leqslant B_4 \|S_n\|_2$ d'après la première partie de la preuve (avec $B_4 = \sqrt[4]{3}$). On en déduit

$$\|S_n\|_2 \leqslant B_4^{\frac{1-\theta}{\theta}} \|S_n\|_p.$$

Ainsi $A_p = B_4^{\frac{\theta-1}{\theta}} = 3^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}$ convient.

Remarques.

- Soit $1 \leqslant p < \infty$ et notons $\mathscr{R}$ l'adhérence dans L^p de l'espace vectoriel engendré par les fonctions de Rademacher. L'espace $\mathscr{R}$ admet une norme équivalente qui fait de $\mathscr{R}$ un espace de Hilbert.
- Les inégalités de Khintchin sont également valables lorsque les coefficients sont complexes avec les mêmes constantes A_p, B_p. Dans la preuve ci-dessus, seule l'étape concernant la seconde inégalité du cas $p \geqslant 2$ utilise le fait que les coefficients sont réels. Il suffit donc d'examiner ce cas. Lorsque les coefficients $(a_k)_{k=1}^n$ sont complexes, on a

$$\|S_n\|_p^2 = \||S_n|^2\|_{p/2} = \|\operatorname{Re}(S_n)^2 + \operatorname{Im}(S_n)^2\|_{p/2} \leqslant \|\operatorname{Re}(S_n)^2\|_{p/2} + \|\operatorname{Im}(S_n)^2\|_{p/2} = \|\operatorname{Re}(S_n)\|_p^2 + \|\operatorname{Im}(S_n)\|_p^2.$$

Puisque $\operatorname{Re}(S_n) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}(a_k) r_k$ et $\operatorname{Im}(S_n) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Im}(a_k) r_k$ sont des sommes de fonctions de Rademacher à coefficients réels, on conclut que

$$\|S_n\|_p^2 \leqslant B_p^2\Big(\|\operatorname{Re}(S_n)\|_2^2 + \|\operatorname{Im}(S_n)\|_2^2\Big) = B_p^2 \|S_n\|_2^2.$$

On a à présent tous les ingrédients nécessaires pour démontrer le théorème IV.2.

Preuve du théorème IV.2

On commence par le cas $1 < p < 2$. Supposons que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base inconditionnelle de L^p. Par le lemme IV.3, il existe $C_p > 0$ telle que

$$\forall \{i_1, \ldots, i_N\} \subset \mathbb{Z} \; \forall (x_n)_{n=1}^N \; \forall (\varepsilon_n)_{n=1}^N \in \{\pm 1\}^N \quad \Big\| \sum_{n=1}^N \varepsilon_n x_n e_{i_n} \Big\|_{L^p(\mathbb{T})} \leqslant C_p \Big\| \sum_{n=1}^N x_n e_{i_n} \Big\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

L'idée de la preuve est qu'en moyennant ces inégalités sur tous les choix de signe (ε_n), les inégalités de Khintchin vont nous permettre de substituer, dans le terme de gauche, la norme p par la norme 2.
Soit $f = \sum_{n=1}^N x_n e_{i_n} \in \mathscr{P}$. On a pour λ-presque tout $x \in [0,1]$:

$$\Big\| \sum_{n=1}^N r_n(x) x_n e_{i_n} \Big\|_{L^p(\mathbb{T})}^p \leqslant C_p^p \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}^p.$$

Par intégration de l'inégalité précédente sur $[0,1]$, on obtient

$$\int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} \Big| \sum_{n=1}^N r_n(x) x_n e_{i_n}(t) \Big|^p \frac{dt}{2\pi} \Big) dx \leqslant C_p^p \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}^p.$$

Par Fubini-Tonelli, on a

$$(\star) \qquad \int_0^{2\pi} \Big\| \sum_{n=1}^N r_n x_n e_{i_n}(t) \Big\|_{L^p([0,1])}^p \frac{dt}{2\pi} \leqslant C_p^p \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}^p.$$

Par ailleurs, d'après l'inégalité de Khintchin (à coefficients complexes), on a

$$\forall t \in [0, 2\pi] \quad \Big\| \sum_{n=1}^N r_n x_n e_{i_n}(t) \Big\|_{L^p([0,1])} \geqslant A_p \Big\| \sum_{n=1}^N r_n x_n e_{i_n}(t) \Big\|_{L^2([0,1])} = A_p \Big(\sum_{n=1}^N |x_n|^2 \Big)^{1/2}.$$

Reportant dans $(\star)$, on obtient

$$A_p^p \Big(\sum_{n=1}^N |x_n|^2 \Big)^{p/2} \leqslant C_p^p \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}^p,$$

ce qui s'écrit aussi

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T})} \leqslant C_p A_p^{-1} \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

Ceci implique que les normes $\|.\|_2$ et $\|.\|_p$ sont équivalentes sur $\mathscr{P}$ et c'est une contradiction.
Soit $2 < p < +\infty$ et supposons que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit une base inconditionnelle de L^p. Rappelons (cf. lemme IV.3) que les multiplicateurs $\mathfrak{M}_\varepsilon$ sont bornés sur L^p. Par ailleurs, il est clair que les $\mathfrak{M}_\varepsilon$ sont autoadjoints sur L^2 et vérifient $\overline{\mathfrak{M}_\varepsilon(f)} = \mathfrak{M}_\varepsilon(\overline{f})$. Par conséquent, on a :

$$\forall f, g \in \mathscr{P} \quad \int_0^{2\pi} \mathfrak{M}_\varepsilon(f) g \frac{d\lambda}{2\pi} = \int_0^{2\pi} f \mathfrak{M}_\varepsilon(g) \frac{d\lambda}{2\pi}.$$

Notons p' l'exposant conjugué de p. Le même argument de dualité que dans la preuve du théorème de M. Riesz permet alors d'obtenir que $\mathfrak{M}_\varepsilon$ est borné sur $L^{p'}$. Par conséquent, la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base inconditionnelle de $L^{p'}$ et ceci est en contradiction avec le cas précédent puisque $1 < p' < 2$.

Références

[Gra] Loukas Grafakos *Classical Fourier Analysis, second edition.*

[Kat] Yitzhak Katznelson *An introduction to Harmonic Analysis, third edition.*

[Sin] Ivan Singer *Bases in Banach spaces 1.*

[Rud] Walter Rudin *Analyse fonctionnelle, deuxième édition.*

[Zyg] Antoni Zygmund *Trigonometric series, third edition.*