Analyse fonctionnelle / Functional analysis

Indices de dentabilité et indice de Szlenk

Gilles LANCIEN

Résumé. Cette note est consacrée à l'étude des liens entre certains indices ordinaux associés à un espace de Banach (indice de dentabilité, de dentabilité préfaible et de Szlenk) et l'existence sur cet espace de normes équivalentes localement uniformément convexes ou Fréchet-différentiables. En application nous calculons l'indice de Szlenk des espaces $\mathcal{C}(K)$ pour certains compacts dispersés K et nous résolvons le problème des trois espaces pour la condition "indice de Szlenk dénombrable".

Dentability indices and Szlenk index

Abstract. This note is devoted to the study of the links between some ordinal indices associated to a Banach space (dentability, weak*-dentability and Szlenk index) and the existence on this space of locally uniformly convex or Fréchet-differentiable equivalent norms. As an application we compute the Szlenk index of $\mathcal{C}(K)$ for certain scattered compact spaces K and we solve the three space problem for the condition "countable Szlenk index".

Abridged English Version : We will denote by ω (respectively ω_1) the first infinite (respectively uncountable) ordinal. Let X be a Banach space. We will now define a few ordinal indices associated to X.

Let C be a subset of X. For $\varepsilon > 0$ we define :
$C_\varepsilon^{(\prime)} = \{x \in C$ such that any slice of C containing x is of diameter $> \varepsilon\}$. Then we construct by transfinite induction on the ordinal α, the sets $(B_X)_\varepsilon^{(\alpha)}$:

$$(B_X)_\varepsilon^{(0)} = B_X \quad (B_X \text{ denotes the unit ball of } X)$$

$$(B_X)_\varepsilon^{(\alpha+1)} = ((B_X)_\varepsilon^{(\alpha)})_\varepsilon^{(\prime)}$$

$$(B_X)_\varepsilon^{(\alpha)} = \bigcap_{\beta<\alpha} (B_X)_\varepsilon^{(\beta)} \text{ if } \alpha \text{ is a limit ordinal.}$$

We define

$$\delta(X,\varepsilon) = \begin{cases} \inf\{\alpha : (B_X)_\varepsilon^{(\alpha)} = \emptyset\} \text{ if it exists} \\ \infty \qquad\qquad\qquad\qquad \text{otherwise} \end{cases}$$

$\delta(X) = \sup_{\varepsilon>0} \delta(X,\varepsilon)$ is called the dentability index of X.
From the slicing of B_{X^*} into weak*-slices of small diameters we define similarly the sets $(B_{X^*})^\alpha_\varepsilon$ and the indices $\delta^*(X,\varepsilon)$ and $\delta^*(X)$. $\delta^*(X)$ is the weak*-dentability index of X.
To the slicing of B_{X^*} into small weak*-open subsets we associate through the same procedure the sets $(B_{X^*})^{[\alpha]}_\varepsilon$ and the indices $Sz(X,\varepsilon)$ and $Sz(X)$. $Sz(X)$ is the Szlenk index of X.

Our main objective is to relate these indices to the existence of locally uniformly convex equivalent norms.

We begin with the study of the dentability indices and, by using an ℓ_2-averaging of distance functions to the derived sets, we show :

THEOREM 1. *Let X be a Banach space.*

If $\delta(X) < \omega_1$ then X admits an equivalent locally uniformly convex norm.

THEOREM 2. *Let X be a Banach space.*

If $\delta^*(X) < \omega_1$ then X admits an equivalent norm whose dual norm is locally uniformly convex. In particular, this norm is Fréchet-differentiable.

Then we turn to the Szlenk index and prove :

THEOREM 3. *There is a function $\psi : \omega_1 \to \omega_1$ such that for any Banach space X and for any countable ordinal α : $Sz(X) \leq \alpha$ implies $\delta^*(X) \leq \psi(\alpha)$.*

COROLLARY 4. *Let X be a Banach space.*

If $Sz(X) < \omega_1$ then X admits an equivalent norm whose dual norm is locally uniformly convex. In particular, this norm is Fréchet-differentiable.

The existence of ψ in the separable case follows from the application of the Kunen-Martin theorem to the setting of the analytic derivations. For the general case we need also the following :

PROPOSITION 5. *Let $\varepsilon > 0$ and $\alpha < \omega_1$ and let X be a Banach space.*

1) If $Sz(X,\varepsilon) > \alpha$, then there is a separable subspace Y of X so that $Sz(Y, \frac{\varepsilon}{2}) > \alpha$.

2) If $\delta^*(X,\varepsilon) > \alpha$, then there is a separable subspace Y of X so that $\delta^*(Y, \frac{\varepsilon}{2}) > \alpha$.

Then we use this last result to compute $Sz(\mathcal{C}(K))$ for certain scattered compact spaces K.

THEOREM 6. *Let K be a scattered compact space such that $K^{(\omega_1)} = \emptyset$.*

Let $\alpha < \omega_1$ be the ordinal such that $K^{(\omega^\alpha)} \neq \emptyset$ and $K^{(\omega^{\alpha+1})} = \emptyset$. Then $Sz(\mathcal{C}(K)) = \omega^{\alpha+1}$.

As a corollary we obtain the following result of R. Deville [Dev] : if K is a scattered compact space such that $K^{(\omega_1)} = \emptyset$, then there is an equivalent norm on $\mathcal{C}(K)$ whose dual norm is locally uniformly convex.

Finally we solve the "three space problem" for the condition "countable Szlenk index" by showing :

THEOREM 7. *Let X be a Banach space and Y be a closed subspace of X such that $Sz(Y) < \omega_1$ and $Sz(X/Y) < \omega_1$. Then $Sz(X) \leq Sz(X/Y).Sz(Y)$*

I. DEFINITIONS ET NOTATIONS.

Nous désignerons par ω (respectivement ω_1) le premier ordinal infini (respectivement non dénombrable). Soit X un espace de Banach. Nous allons maintenant construire quelques indices ordinaux associés à X.

Indice de dentabilité de X, $\delta(X)$: Soit C un sous-ensemble de X, on appelle *tranche* de C tout ensemble de la forme : $T = \{x \in C : \ x^*(x) > a\}$ où $x^* \in X^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Pour $\varepsilon > 0$, on définit $C_\varepsilon^{(')} = \{x \in C$ tel que toute tranche de C contenant x est de diamètre $> \varepsilon\}$. On construit alors, par récurrence transfinie sur l'ordinal α, les ensembles $(B_X)_\varepsilon^{(\alpha)}$ de la façon suivante :

$$(B_X)_\varepsilon^{(0)} = B_X \qquad (B_X \text{ désigne la boule unité de X})$$

$$(B_X)_\varepsilon^{(\alpha+1)} = ((B_X)_\varepsilon^{(\alpha)})_\varepsilon^{(')}$$

$$(B_X)_\varepsilon^{(\alpha)} = \bigcap_{\beta<\alpha} (B_X)_\varepsilon^{(\beta)} \text{ si } \alpha \text{ est un ordinal limite.}$$

On définit

$$\delta(X,\varepsilon) = \begin{cases} \inf\{\alpha : (B_X)_\varepsilon^{(\alpha)} = \emptyset\} \text{ si il existe} \\ \infty \qquad\qquad\qquad\qquad \text{sinon} \end{cases}$$

Et $\delta(X) = \sup_{\varepsilon>0} \delta(X,\varepsilon)$.

Indice de dentabilité préfaible de X, $\delta^*(X)$: Soit C un sous-ensemble de X^*, on appelle *tranche préfaible* de C tout ensemble de la forme :

$T = \{x^* \in C : \ x^*(x) > a\}$ où $x \in X$ et $a \in \mathbb{R}$ et on note :

$C'_\varepsilon = \{x^* \in C$ tel que toute tranche préfaible de C contenant x^* est de diamètre $> \varepsilon\}$. Puis on construit de la même façon les ensembles $(B_{X^*})_\varepsilon^\alpha$ et les indices $\delta^*(X,\varepsilon)$ et $\delta^*(X)$.

Indice de Szlenk de X, $Sz(X)$: Les ensembles $(B_{X^*})_\varepsilon^{[\alpha]}$ et les indices $Sz(X,\varepsilon)$ et $Sz(X)$ sont définis de même à partir du découpage en ouverts préfaibles de petits diamètres de B_{X^*}.

Remarque : Nous avons adopté la dénomination "indice de Szlenk" en référence à l'article de W. Szlenk [Sz] consacré à la non existence d'espace réflexif universel pour la classe des espaces réflexifs séparables. W. Szlenk y avait introduit, pour X espace de Banach séparable, un indice $\sigma(X)$ légèrement différent de $Sz(X)$ (voir [Sz]). Cependant, on peut montrer que pour tout espace de Banach séparable X ne contenant pas de copie isomorphique de $\ell_1(\mathbb{N})$, $Sz(X) = \sigma(X)$ (voir [L]).

II. INDICES DE DENTABILITE ET RENORMAGES LOCALEMENT UNIFORMEMENT CONVEXES.

Rappelons tout d'abord la définition d'une norme localement uniformément convexe.

DEFINITION 2.1. *Une norme $||\ \ ||$ sur un espace vectoriel réel est dite localement uniformément convexe (LUC) si pour toute suite (x_n) dans X et pour tout x dans X, les deux hypothèses $||x_n|| = ||x|| = 1$ et $||\frac{x+x_n}{2}|| \longrightarrow 1$ impliquent $||x - x_n|| \longrightarrow 0$.*

L'énoncé du premier résultat est le suivant :

THEOREME 2.2. *Soit X un espace de Banach.*

Si $\delta(X) < \omega_1$ alors X admet une norme équivalente localement uniformément convexe.

Idée de la démonstration : On considère la fonction

$$f(x) = \left(||x||^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha<\delta(X,2^{-n})} a_{\alpha,n}^2 d^2(x, (B_X)_{2^{-n}}^{(\alpha)}) \right)^{1/2},$$

où les $a_{\alpha,n}$ sont des réels strictement positifs vérifiant $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha<\delta(X,2^{-n})} a_{\alpha,n}^2 = 1$.

Notre nouvelle norme sera alors la jauge de l'ensemble $C = \{x \in X :\ f(x) \leq 1\}$. $\square$

Dans le cas dual, on obtient :

THEOREME 2.3. *Soit X un espace de Banach.*

Si $\delta^*(X) < \omega_1$, alors X admet une norme équivalente dont la norme duale est localement uniformément convexe. En particulier, cette norme est Fréchet-différentiable.

Démonstration : On considère la fonction

$$f(x^*) = \left(||x^*||^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha<\delta^*(X,2^{-n})} a_{\alpha,n}^2 d^2(x^*, (B_{X^*})_{2^{-n}}^{\alpha}) \right)^{1/2},$$

définie sur X^*, où les $a_{\alpha,n}$ sont choisis comme précédemment. Il suffit de remarquer que la semi-continuité inférieure préfaible des fonctions $d(., (B_{X^*})^{\alpha}_{2^{-n}})$ et $||\,.\,||$ permet de définir ainsi une norme duale sur X^*. $\square$

Premiers exemples :

1) Si X est un Banach séparable ayant la Propriété de Radon-Nikodym, alors $\delta(X) < \omega_1$.

2) $\delta(X) \leq \omega$ si et seulement si X est super-réflexif.

3) Pour tout ensemble Γ : $\delta\left(\ell_1(\Gamma)\right) \leq \delta^*\left(c_0(\Gamma)\right) < \omega_1$.

III. COMPARAISON DE $Sz(X)$ ET $\delta^*(X)$.

La question est maintenant : quel type de renormage peut-on trouver sur X sous l'hypothèse a priori plus faible $Sz(X) < \omega_1$? La non-convexité des ensembles dérivés $(B_{X^*})^{[\alpha]}_{\varepsilon}$ interdit d'utiliser les techniques de la partie II. En fait, nous allons montrer dans cette partie que les conditions $Sz(X) < \omega_1$ et $\delta^*(X) < \omega_1$ sont équivalentes. Ce qui nous permettra, au vu de la partie II d'en déduire que si $Sz(X) < \omega_1$, alors X admet une norme équivalente dont la norme duale est LUC.

Nous allons montrer dans un premier temps la proposition suivante :

PROPOSITION 3.1. *Il existe une fonction $\psi : \omega_1 \to \omega_1$ telle que, pour tout espace de Banach séparable X et pour tout $\alpha < \omega_1$, $Sz(X) \leq \alpha$ implique $\delta^*(X) \leq \psi(\alpha)$.*

Ceci est une conséquence d'idées développées par B. Bossard dans un contexte légèrement différent et également plus général [B].

Complétons tout d'abord les notations introduites en partie I. Soit $K = (B_{\ell_\infty}, \sigma(\ell_\infty, \ell_1))$. Pour tout fermé F de K et tout $\varepsilon > 0$ on définit $(F^{\alpha}_{\varepsilon})_{\alpha}$, $\Delta_{\varepsilon}(F)$ et $\Delta(F)$ de la façon usuelle, à partir du découpage de F en tranches préfaibles de diamètre $\leq \varepsilon$.

De même on construit $(F^{[\alpha]}_{\varepsilon})_{\alpha}$, $S_{\varepsilon}(F)$ et $S(F)$ à partir du découpage de F en ouverts préfaibles de diamètre $\leq \varepsilon$.

K est un compact métrisable. On note $\mathcal{F}(K)$ la collection de tous les sous-ensembles fermés de K et on munit $\mathcal{F}(K)$ de la topologie de Hausdorff.

Commençons par énoncer la proposition intermédiaire suivante :

PROPOSITION 3.2. *Il existe une fonction $\psi : \omega_1 \to \omega_1$ telle que, pour tout fermé F de K et pour tout $\alpha < \omega_1$, $S(F) \leq \alpha$ implique $\Delta(F) \leq \psi(\alpha)$.*

Démonstration : Nous avons besoin du résultat suivant de B. Bossard [Bos] :

Pour $\varepsilon > 0$, $\begin{array}{ll} d_\varepsilon : \mathcal{F}(K) \to \mathcal{F}(K) & \quad et \quad D_\varepsilon : \mathcal{F}(K) \to \mathcal{F}(K) \\ \quad F \mapsto F'_\varepsilon & \quad\quad F \mapsto F_\varepsilon^{[']} \end{array}$
sont des applications boréliennes.

$\mathcal{B}_\alpha = \{F \in \mathcal{F}(K) : S(F) \leq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{F \in \mathcal{F}(K) : S_{1/n}(F) \leq \alpha\}$ est donc un borélien de $\mathcal{F}(K)$. De plus, pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{B}_\alpha \subseteq \{F \in \mathcal{F}(K) : \Delta_{1/n}(F) < \omega_1\}$.

D'après les travaux de C. Dellacherie ([Del]) sur les applications du théorème de Kunen-Martin aux dérivations analytiques, on a que pour tout $n \geq 1$ il existe $\psi_n(\alpha) < \omega_1$ tel que : $\mathcal{B}_\alpha \subseteq \{F \in \mathcal{F}(K) : \Delta_{1/n}(F) \leq \psi_n(\alpha)\}$.
Nous achevons la démonstration en prenant $\psi(\alpha) = \sup_{n \geq 1} \psi_n(\alpha)$. $\square$

Démonstration de la Proposition 3.1 : Soit X un espace de Banach séparable et $\alpha < \omega_1$. Il existe un sous-espace fermé Y de ℓ_1 tel que X est isomorphe à $\frac{\ell_1}{Y}$.
Donc $Sz(X) = Sz(\frac{\ell_1}{Y}) = S(B_{Y^\perp})$ et $\delta^*(X) = \delta^*(\frac{\ell_1}{Y}) = \Delta(B_{Y^\perp})$.
Ainsi d'après la proposition 3.2, si $Sz(X) \leq \alpha$, alors $\delta^*(X) \leq \psi(\alpha)$. $\square$

Nous allons maintenant voir que les indices $Sz(X)$ et $\delta^*(X)$, s'ils sont dénombrables, sont déterminés par les sous-espaces séparables de X :

PROPOSITION 3.3. *Soient $\varepsilon > 0$ et $\alpha < \omega_1$ et soit X un espace de Banach. Si $Sz(X, \varepsilon) > \alpha$, alors il existe un sous-espace fermé séparable Y de X tel que $Sz(Y, \frac{\varepsilon}{2}) > \alpha$.*

PROPOSITION 3.4. *Soient $\varepsilon > 0$ et $\alpha < \omega_1$ et soit X un espace de Banach. Si $\delta^*(X, \varepsilon) < \alpha$, alors il existe un sous-espace fermé séparable Y de X tel que $\delta^*(Y, \frac{\varepsilon}{2}) > \alpha$.*

Nous avons obtenu ces résultats en construisant un sous-espace séparable Y de X et une famille (x_s^*) dans B_{X^*} indexée par un arbre T_α inclus dans l'ensemble des suites finies d'entiers, bien fondé et de hauteur α tels que :
$\forall \beta \leq \alpha$, $(x^*_{s\restriction_Y})_{s \in (T_\alpha)^\beta} \subseteq (B_{Y^*})^{[\beta]}_{\varepsilon/2}$, pour la Proposition 3.3.
ou $\forall \beta \leq \alpha$, $(x^*_{s\restriction_Y})_{s \in (T_\alpha)^\beta} \subseteq (B_{Y^*})^{\beta}_{\varepsilon/2}$, pour la Proposition 3.4.
La dérivation utilisée sur T_α étant la dérivation de Cantor sur les arbres.

On peut donc étendre la Proposition 3.1 au cas non séparable :

THEOREME 3.5. *Il existe une fonction $\psi : \omega_1 \to \omega_1$ telle que, pour tout espace de Banach X et pour tout ordinal dénombrable α : $Sz(X) \leq \alpha$ implique $\delta^*(X) \leq \psi(\alpha)$.*

Et améliorer ainsi notre résultat de renormage :

COROLLAIRE 3.6. *Soit X un espace de Banach. Si $Sz(X) < \omega_1$, alors X admet une norme équivalente dont la norme duale est localement uniformément convexe. En particulier, il existe une norme équivalente Fréchet-différentiable sur X.*

IV. QUELQUES APPLICATIONS.

1. Calcul de $Sz(\mathcal{C}(K))$, pour K compact dispersé.

Nous allons utiliser les propriétés démontrées dans la partie III pour étendre les calculs connus de $Sz(\mathcal{C}(K))$ pour K compact dénombrable aux compacts dispersés généraux tels que $K^{(\omega_1)} = \emptyset$ (pour α un ordinal, $K^{(\alpha)}$ désigne l'ensemble dérivé d'ordre α de K, au sens de Cantor).

THEOREME 4.1. *Soit K un compact dispersé tel que $K^{(\omega_1)} = \emptyset$.*
Soit $\alpha < \omega_1$ l'ordinal tel que $K^{(\omega^\alpha)} \neq \emptyset$ et $K^{(\omega^{\alpha+1})} = \emptyset$. Alors $\quad Sz(\mathcal{C}(K)) = \omega^{\alpha+1}$.

En corollaire on obtient le résultat suivant de R. Deville [Dev] : si K est un espace compact tel que $K^{(\omega_1)} = \emptyset$, alors il existe une norme équivalente sur $\mathcal{C}(K)$ dont la norme duale est localement uniformément convexe.

Remarque : R. Haydon ([H]) a construit un compact dispersé K tel que $K^{(\omega_1)}$ est un singleton et qui n'admet pas de renormage Gâteaux-différentiable.

Démonstration du théorème 4.1 : Il est clair que $Sz(\mathcal{C}(K)) > \omega^\alpha$. D'autre part, en utilisant les calculs effectués pour les compacts dénombrables (voir C. Samuel [Sa]), on montre que pour tout sous-espace séparable X de $\mathcal{C}(K)$, $Sz(X) \leq \omega^{\alpha+1}$. D'après la Proposition 3.3, on a donc $Sz(\mathcal{C}(K)) \leq \omega^{\alpha+1}$. La fin de la démonstration découle alors du fait suivant, inspiré par un article de A. Sersouri ([Se]) sur les indices de Lavrientiev :
Si X est un espace de Banach tel que $Sz(X) < \omega_1$, alors il existe un ordinal $\beta < \omega_1$ tel que $Sz(X) = \omega^\beta$. $\square$

2. Le problème des trois espaces pour la condition $Sz(X)$ dénombrable.

La question générale à laquelle nous allons maintenant nous intéresser est la suivante : Soient X un espace de Banach et Y un sous-espace fermé de X. Supposons que $Sz(Y) < \omega_1$ et $Sz(X/Y) < \omega_1$. Pouvons nous en conclure que $Sz(X) < \omega_1$? Dans ce paragraphe nous répondons positivement à cette question en démontrant le résultat suivant :

THEOREME 4.2. *Soient X un espace de Banach et Y un sous-espace fermé de X tel que $Sz(Y) < \omega_1$ et $Sz(X/Y) < \omega_1$. Alors $Sz(X) \leq Sz(X/Y).Sz(Y)$*

Idée de la démonstration : La Proposition 3.3. nous permet de nous limiter au cas où $Y^\perp$ est séparable. Notons alors $\mathcal{V} = (V_n)_{n=1}^\infty$ une base d'ouverts de $(B_{Y^\perp}, \sigma(Y^\perp, X/Y))$.

LEMME 4.3. *Soient $\varepsilon > 0$, $F = 3B_{Y^\perp}$ et $B = F + \dfrac{\varepsilon}{3}B_{X^*}$. Pour tout ordinal α :*

$$B_\varepsilon^{[\omega.\alpha]} \subseteq F_{\varepsilon/3}^{[\alpha]} + \frac{\varepsilon}{3}B_{X^*}.$$

Celui-ci se démontre par récurrence transfinie. Pour effectuer cette récurrence dans le cas successeur ($\alpha = \beta + 1$), nous montrons par récurrence que pour tout $k \geq 1$:

$B_\varepsilon^{[\omega.\beta+k]} \subseteq (F_{\varepsilon/3}^{[\beta]} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} V_{n_i(\alpha)}) + \dfrac{\varepsilon}{3}B_{X^*}$.

où $(V_{n_i(\alpha)})_{i=1}^\infty = \{V \in \mathcal{V}$ tels que $V \cap F_{\varepsilon/3}^{[\beta]} \neq \emptyset$ et $\mathrm{diam}(V \cap F_{\varepsilon/3}^{[\beta]}) \leq \dfrac{\varepsilon}{3}\}$.

Du Lemme 4.3 on déduit que : $\forall \varepsilon > 0,\ Sz(X, \varepsilon) \leq \omega.Sz(X/Y, \dfrac{\varepsilon}{9}).Sz(Y, \dfrac{\varepsilon}{4})$ (*)

La conclusion du Théorème 4.2 s'obtient alors en combinant la Proposition 4.1 avec la propriété élémentaire suivante :

Soient α et β deux ordinaux ≥ 1. Si $\gamma < \omega^\alpha$, alors $\omega.\gamma.\omega^\beta \leq \omega^\alpha.\omega^\beta$. $\square$

Remarque : L'inégalité (*) peut être légèrement améliorée dans le cas où Y est complémenté dans X. Ce qui permet de montrer, en combinant la Proposition 3.3 et le théorème de Sobczyk ([So]) que $Sz(JL) = \omega$, où JL est l'espace introduit par W.B. Johnson et J. Lindenstrauss dans [J-L].

REMERCIEMENTS : Ce travail a été effectué dans le cadre de la préparation d'une thèse d'Université sous la direction de G. Godefroy. Je le remercie très sincèrement pour toutes ses remarques et ses encouragements. Je tiens aussi à remercier R. Deville, R. Haydon et V. Zizler pour de fructueuses conversations.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[B] B. Bossard, en préparation.

[Del] C.Dellacherie, Les dérivations en théorie descriptive des ensembles et le théorème de la borne. *Séminaire de Probabilités XI, Université de Strasbourg, Lecture Notes in Math., Springer* , vol 581 (1977), 34-46.

[Dev] R. Deville, Problèmes de renormages, *Journal of Functional Analysis,* 68 (1986), 117–129.

[**H**] R. Haydon, A counterexample to several questions about scattered compact spaces, *Bulletin of the London Math. Society,* 22, 1 (1990), 261–268.

[**J-L**] W.B. Johnson et J. Lindenstrauss, Some Remarks on weakly compactly generated Banach spaces, *Israel Journal of Math.,* 17, 219-230.

[**L**] G. Lancien, Dentability indices and locally uniformly convex renormings, à *paraitre dans Rocky Mountain Journal of Math.*

[**Sa**] C. Samuel, Indice de Szlenk des $\mathcal{C}(K)$ *Publications mathématiques de l'Université Paris VI , Séminaire de Géométrie des espaces de Banach,* (1983), tome 1, 81-91.

[**Se**] A. Sersouri, Lavrientiev index for Banach spaces , *C.R. Acad. Sci. Paris* Sér. I Math., 309 (1989), 2, 95-99.

[**So**] A. Sobczyk, Projection of the space m on its subspace c_0, *Bull. A.M.S.* , 47 (1941), 938-947.

[**Sz**] W. Szlenk, The non existence of a separable reflexive Banach space universal for all separable reflexive Banach spaces, *Studia Math.,* 30 (1968), 53-61.

Equipe d'Analyse, Université Paris 6

Tour 46, 4^{e} étage, Boîte 186

4, Place Jussieu, 75252 PARIS CEDEX 05