Contrôle pour des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles

Farid Ammar Khodja

LMB

Séminaires croisés $<$ LMB | FEMTO-ST $>$ 18/02/2014

Brève histoire

- Le contrôle de systèmes régis par des Équations aux Dérivées Partielles (EDP) commence assez tardivement: probablement dans les années 1950.

Brève histoire

- Le contrôle de systèmes régis par des Équations aux Dérivées Partielles (EDP) commence assez tardivement: probablement dans les années 1950.
- Mais la problématique du contrôle a une bien plus vieille histoire:

Brève histoire

- Le contrôle de systèmes régis par des Équations aux Dérivées Partielles (EDP) commence assez tardivement: probablement dans les années 1950.
- Mais la problématique du contrôle a une bien plus vieille histoire:
  - **avec les problèmes de régulation**: régulation du niveau d'eau des aqueducs grâce à un système de valves (les Romains), régulation de vitesse des machines à vapeurs (J. Watt en 1769), etc Voir l'article de James Clerk Maxwell dont l'article *On governors* (Proceedings of the Royal Society, No.100, 1868) semble être le premier article *mathématique* sur la théorie du contrôle.

Brève histoire

- Le contrôle de systèmes régis par des Équations aux Dérivées Partielles (EDP) commence assez tardivement: probablement dans les années 1950.
- Mais la problématique du contrôle a une bien plus vieille histoire:
    - **avec les problèmes de régulation**: régulation du niveau d'eau des aqueducs grâce à un système de valves (les Romains), régulation de vitesse des machines à vapeurs (J. Watt en 1769), etc Voir l'article de James Clerk Maxwell dont l'article *On governors* (Proceedings of the Royal Society, No.100, 1868) semble être le premier article *mathématique* sur la théorie du contrôle.
    - **avec les problèmes de commande optimale**: dans les années 1950 avec les travaux de Pontryagin (et ses collaborateurs) et ceux de Bellman.

Brève histoire

- Le contrôle de systèmes régis par des Équations aux Dérivées Partielles (EDP) commence assez tardivement: probablement dans les années 1950.
- Mais la problématique du contrôle a une bien plus vieille histoire:
  - **avec les problèmes de régulation**: régulation du niveau d'eau des aqueducs grâce à un système de valves (les Romains), régulation de vitesse des machines à vapeurs (J. Watt en 1769), etc Voir l'article de James Clerk Maxwell dont l'article *On governors* (Proceedings of the Royal Society, No.100, 1868) semble être le premier article *mathématique* sur la théorie du contrôle.
  - **avec les problèmes de commande optimale**: dans les années 1950 avec les travaux de Pontryagin (et ses collaborateurs) et ceux de Bellman.
- Dans cet exposé, seule une partie des problématiques de contrôle sera considérée.

Les problèmes considérés

Soit un système abstrait de la forme

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = Ay + Bu, \quad t \in (0, T) \\ \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

avec

- $A : Y \rightarrow Y$ est linéaire (éventuellement non borné), $B : U \rightarrow Y$ linéaire continue,
- Y (espace des états), U (espace de contrôle) sont des espaces de Hilbert.
- Le problème est bien posé (en un certain sens): pour $(y_0, u) \in Y \times U$, il existe une unique solution $y \in C(0, T; Y)$. Cette solution sera notée $y(\cdot; y_0, u)$.

Les problèmes considérés

Les questions considérées sont les suivantes:

- Est-il possible, étant donnés $T > 0$ et $y_0, y_1 \in Y$, de trouver $u \in L^2(0, T; U)$ tel que $y(T; y_0, u) = y_1$? Lorsque cela est possible, **le système est dit exactement contrôlable**.

Les problèmes considérés

Les questions considérées sont les suivantes:

- Est-il possible, étant donnés $T > 0$ et $y_0, y_1 \in Y$, de trouver $u \in L^2(0, T; U)$ tel que $y(T; y_0, u) = y_1$? Lorsque cela est possible, **le système est dit exactement contrôlable**.
- Est-il possible, étant donnés $T > 0$, $y_0, y_1 \in Y$, $\varepsilon > 0$, de trouver $u \in L^2(0, T; U)$ tel que $\|y(T; y_0, u) - y_1\|_Y \leq \varepsilon$? Lorsque cela est possible, **le système est dit approximativement contrôlable**.

Les problèmes considérés

Les questions considérées sont les suivantes:

- Est-il possible, étant donnés $T > 0$ et $y_0, y_1 \in Y$, de trouver $u \in L^2(0, T; U)$ tel que $y(T; y_0, u) = y_1$? Lorsque cela est possible, **le système est dit exactement contrôlable**.
- Est-il possible, étant donnés $T > 0$, $y_0, y_1 \in Y$, $\varepsilon > 0$, de trouver $u \in L^2(0, T; U)$ tel que$\|y(T; y_0, u) - y_1\|_Y \leq \varepsilon$? Lorsque cela est possible, **le système est dit approximativement contrôlable**.
- Est-il possible, étant donnés $T > 0$ et $y_0, y_0^* \in Y$, de trouver $u \in L^2(0, T; U)$ tel que $y(T; y_0, u) = y(T; y_0^*, 0)$? Lorsque cela est possible, **le système est dit contrôlable aux trajectoires**.

Systèmes différentiels

Soit

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = Ay + Bu, \quad t \in (0, T) \\ \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

- A matrice $n \times n$, B matrice $n \times m$, $u \in L^2(0, T; U := \mathbb{R}^m)$, $y_0 \in Y = \mathbb{R}^n$.
- Dans ce cas:

$$y(T; y_0, u) = e^{TA} y_0 + \int_0^T e^{(T-t)A} Bu(t)\, dt$$

Systèmes différentiels

On peut reformuler les 3 questions de contrôlabilité de la façon suivante:

- Contrôle exact: $\forall T > 0$, $\forall (y_0, y_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, existe-t-il $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tel que

$$L_T u := \int_0^T e^{(T-t)A} Bu(t)\, dt = y_1 - e^{TA} y_0$$

- Contrôle exact: ...

$$\left\| L_T u + e^{TA} y_0 - y_1 \right\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon$$

- Contrôle aux trajectoires: ...

$$L_T u = e^{TA} y_0^* - e^{TA} y_0$$

Systèmes différentiels

On peut reformuler les 3 questions de contrôlabilité de la façon suivante:

- Contrôle exact: $\forall T > 0$, $\forall (y_0, y_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, existe-t-il $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tel que

$$L_T u := \int_0^T e^{(T-t)A} Bu(t)\, dt = y_1 - e^{TA} y_0 \Leftrightarrow L_T \textbf{ surjective}$$

- Contrôle exact: ...

$$\left\| L_T u + e^{TA} y_0 - y_1 \right\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon \Leftrightarrow \mathrm{Im}(L_T) \textbf{ dense dans } \mathbb{R}^n$$

$$\overset{\text{dim. finie}}{\Leftrightarrow} L_T \textbf{ surjective}$$

- Contrôle aux trajectoires: ...

$$L_T u = e^{TA} y_0^* - e^{TA} y_0 \Leftrightarrow L_T \textbf{ surjective}$$

Systèmes différentiels

- On peut aussi remarquer que l'application

$$\begin{aligned} L_T \quad &: \quad L^2\left(0, T; \mathbb{R}^m\right) \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ u \quad &\longmapsto \quad L_T u = \int_0^T e^{(T-t)A} Bu\left(t\right) dt \end{aligned}$$

  a pour application adjointe

$$\begin{aligned} L_T^* \quad &: \quad \mathbb{R}^n \longrightarrow L^2\left(0, T; \mathbb{R}^m\right) \\ x \quad &\longmapsto \quad L_T^* x = B^* \varphi \end{aligned}$$

  où φ est solution de

$$-\varphi' = A^* \varphi, \;\; \varphi\left(T\right) = x$$

Systèmes différentiels

- On peut aussi remarquer que l'application
$$\begin{aligned} L_T \quad &: \quad L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^n \\ u \quad &\mapsto \quad L_T u = \int_0^T e^{(T-t)A} B u(t)\, dt \end{aligned}$$
a pour application adjointe
$$\begin{aligned} L_T^* \quad &: \quad \mathbb{R}^n \to L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \\ x \quad &\mapsto \quad L_T^* x = B^* \varphi \end{aligned}$$
où φ est solution de
$$-\varphi' = A^* \varphi, \;\; \varphi(T) = x$$
- De ce fait, puisque L_T surjective $\Longleftrightarrow$ L_T^* injective, la contrôlabilité est équivalente à la propriété
$$\begin{cases} -\varphi' = A^* \varphi \\ B^* \varphi \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi \equiv 0.$$

Systèmes différentiels

- Conclusion: en dimension finie, les 3 concepts de contrôlabilité sont confondus.

Systèmes différentiels

- Conclusion: en dimension finie, les 3 concepts de contrôlabilité sont confondus.
- Kalman ($\sim$1962) a montré que cela est équivalent à la condition algébrique

$$\mathrm{rang}\mathfrak{K} = \mathrm{rang}\left[B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B\right] = n$$

Systèmes différentiels

- Conclusion: en dimension finie, les 3 concepts de contrôlabilité sont confondus.
- Kalman ($\sim$1962) a montré que cela est équivalent à la condition algébrique

$$\mathrm{rang}\mathfrak{K} = \mathrm{rang}\left[B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B\right] = n$$

- Ou bien (**Test de Hautus**):

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \left(\left\{ \begin{array}{c} A^* v = \lambda v \\ v \neq 0 \end{array} \right. \Rightarrow B^* v \neq 0 \right).$$

Systèmes différentiels

- Conclusion: en dimension finie, les 3 concepts de contrôlabilité sont confondus.
- Kalman (∼1962) a montré que cela est équivalent à la condition algébrique

$$\mathrm{rang}\mathfrak{K} = \ \mathrm{rang}\left[B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B\right] = n$$

- Ou bien (**Test de Hautus**):

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \left(\left\{ \begin{array}{c} A^* v = \lambda v \\ v \neq 0 \end{array} \right. \Rightarrow B^* v \neq 0 \right).$$

- Ou bien: il existe $C_T > 0$ telle

$$\left\| \varphi_0 \right\|_{\mathbb{R}^n}^2 \leq C_T \int_0^T \left\| B^* \varphi\left(t\right) \right\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt, \ \forall \varphi_0 \in Y$$

pour toute solution du système (adjoint):

$$-\varphi' = A^* \varphi, \quad \varphi\left(T\right) = \varphi_0 \in \mathbb{R}^n.$$

L'équation de la chaleur

$$\begin{cases} y' = \Delta y + b(x)\, u, & (0,T) \times \Omega \\ y = 0 & (0,T) \times \partial\Omega \\ y(0,x) = y_0(x), & \Omega \end{cases}$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine borné régulier
- $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$
- $b \in L^\infty(\Omega)$, $u \in L^2\left(0, T; U := L^2(\Omega)\right) = L^2((0,T) \times \Omega)$.
- On sait que: si $y_0 \in Y := L^2(\Omega)$, $\exists!$ solution $y \in C\left(0, T; L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right)$ et on peut écrire:

$$y(T, \cdot) = e^{\Delta T} y_0 + \int_0^T e^{\Delta (T-t)} b u(t, \cdot)\, dt$$

L'équation de la chaleur

$$\begin{cases} y' = \Delta y + b(x)\, u, & (0,T)\times\Omega \\ y = 0 & (0,T)\times\partial\Omega \\ y(0,x) = y_0(x), & \Omega \end{cases}$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine borné régulier
- $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$
- $b \in L^\infty(\Omega)$, $u \in L^2\left(0,T; U := L^2(\Omega)\right) = L^2((0,T)\times\Omega)$.
- On sait que: si $y_0 \in Y := L^2(\Omega)$, $\exists!$ solution $y \in C\left(0,T; L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0,T; H_0^1(\Omega)\right)$ et on peut écrire:

$$y(T,\cdot) = e^{\Delta T} y_0 + \int_0^T e^{\Delta(T-t)} bu(t,\cdot)\, dt$$

- On peut être plus précis :

$$\begin{aligned} x &\longmapsto e^{\Delta T} y_0(x) \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right), \\ x &\longmapsto (L_T u)(x) := \int_0^T e^{\Delta(T-t)} bu(t,x)\, dt \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

L'équation de la chaleur

- Que dire dans ce cas des différents concepts de contrôlabilité?

L'équation de la chaleur

- Que dire dans ce cas des différents concepts de contrôlabilité?
- Contrôlabilité exacte: elle est d'emblée exclue du fait de l'effet régularisant.

L'équation de la chaleur

- Que dire dans ce cas des différents concepts de contrôlabilité?
- Contrôlabilité exacte: elle est d'emblée exclue du fait de l'effet régularisant.
- Contrôlabilité approchée: elle est équivalente

$$\overline{\mathrm{Im}\, L_T} = L^2(\Omega) \Leftrightarrow L_T^* \text{ injective.}$$

i.e.:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\varphi' = \Delta\varphi, & (0,T)\times\Omega \\ \varphi = 0 & (0,T)\times\partial\Omega \\ b\varphi = 0, & (0,T)\times\Omega \end{array} \right. \Rightarrow \varphi = 0$$

L'équation de la chaleur

- Contrôlabilité aux trajectoires: l'équation à résoudre étant

$$L_T u = e^{\Delta T}\,(y_0 - y_0^*)$$

elle est équivalente à

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Im}\, L_T & \supset & \mathrm{Im}\, e^{\Delta T} \\ & \Updownarrow & \\ \|L_T^* \xi\|^2_{L^2(Q_T)} & \geq & C \left\| e^{\Delta T} \xi \right\|^2_{L^2(\Omega)} \end{array}$$

L'équation de la chaleur

- Contrôlabilité aux trajectoires: l'équation à résoudre étant

$$L_T u = e^{\Delta T}\left(y_0 - y_0^*\right)$$

elle est équivalente à

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Im} L_T & \supset & \operatorname{Im} e^{\Delta T} \\ & \Updownarrow & \\ \|L_T^* \xi\|_{L^2(Q_T)}^2 & \geq & C \left\| e^{\Delta T} \xi \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{array}$$

- Cela s'écrit

$$\int_{Q_T} |b\varphi|^2 \, dxdt \geq C \int_\Omega |\varphi(0)|^2 \, dx$$

L'équation de la chaleur

- Lorsque le contrôle agit sur tout le domaine (par exemple $b = 1$), contrôlabilité approchée et aux trajectoires sont toutes deux établies depuis longtemps (quasi-immédiat).

L'équation de la chaleur

- Lorsque le contrôle agit sur tout le domaine (par exemple $b = 1$), contrôlabilité approchée et aux trajectoires sont toutes deux établies depuis longtemps (quasi-immédiat).
- Lorsque le contrôle agit sur un sous-domaine (par exemple $b = 1_\omega$ où $\omega \Subset \Omega$ est un ouvert quelconque):

L'équation de la chaleur

- Lorsque le contrôle agit sur tout le domaine (par exemple $b = 1$), contrôlabilité approchée et aux trajectoires sont toutes deux établies depuis longtemps (quasi-immédiat).
- Lorsque le contrôle agit sur un sous-domaine (par exemple $b = 1_\omega$ où $\omega \Subset \Omega$ est un ouvert quelconque):
  - La contrôlabilité approchée est une conséquence non triviale de (vieux) résultats de Holmgren ou Mizohata.

L'équation de la chaleur

- Lorsque le contrôle agit sur tout le domaine (par exemple $b = 1$), contrôlabilité approchée et aux trajectoires sont toutes deux établies depuis longtemps (quasi-immédiat).
- Lorsque le contrôle agit sur un sous-domaine (par exemple $b = 1_\omega$ où $\omega \Subset \Omega$ est un ouvert quelconque):
  - La contrôlabilité approchée est une conséquence non triviale de (vieux) résultats de Holmgren ou Mizohata.
  - La contrôlabilité aux trajectoires n'a été établie en toute généralité que dans les années 1990

L'équation de la chaleur

- Lorsque le contrôle agit sur tout le domaine (par exemple $b = 1$), contrôlabilité approchée et aux trajectoires sont toutes deux établies depuis longtemps (quasi-immédiat).
- Lorsque le contrôle agit sur un sous-domaine (par exemple $b = 1_\omega$ où $\omega \Subset \Omega$ est un ouvert quelconque):
  - La contrôlabilité approchée est une conséquence non triviale de (vieux) résultats de Holmgren ou Mizohata.
  - La contrôlabilité aux trajectoires n'a été établie en toute généralité que dans les années 1990
    - Fursikov-Imanuvilov: par le biais d'inégalité de Carleman (inégalités à poids pour les solutions de l'équation)

L'équation de la chaleur

- Lorsque le contrôle agit sur tout le domaine (par exemple $b = 1$), contrôlabilité approchée et aux trajectoires sont toutes deux établies depuis longtemps (quasi-immédiat).
- Lorsque le contrôle agit sur un sous-domaine (par exemple $b = 1_\omega$ où $\omega \Subset \Omega$ est un ouvert quelconque):
  - La contrôlabilité approchée est une conséquence non triviale de (vieux) résultats de Holmgren ou Mizohata.
  - La contrôlabilité aux trajectoires n'a été établie en toute généralité que dans les années 1990
    - Fursikov-Imanuvilov: par le biais d'inégalité de Carleman (inégalités à poids pour les solutions de l'équation)
    - Lebeau-Robbiano: par le biais d'inégalités spectrales de Weyl.

Systèmes paraboliques

$$\begin{cases} y' = D\Delta y + Ay + Bu1_{\omega}, & \text{dans } Q_T = (0, T) \times \Omega \\ y = 0, & \text{dans } \Sigma_T = (0, T) \times \partial\Omega \\ y(0) = y_0, & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Avec

$$\begin{aligned} D &= \operatorname{diag}(d_1, ..., d_n), \; d_i > 0. \\ A &\in L^{\infty}(Q_T; \mathbb{M}_n(\mathbb{R})), \; B \in L^{\infty}(Q_T; \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})) \\ \omega &\subset \Omega, \text{ est un ouvert quelconque.} \end{aligned}$$

Systèmes paraboliques: coefficients constants

- Qu'en est-il de la contrôlabilité de tels systèmes?

Systèmes paraboliques: coefficients constants

- Qu'en est-il de la contrôlabilité de tels systèmes?
- Pour les systèmes à coefficients constants:
  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, on introduit l'opérateur non borné

$$\mathfrak{K} = \left[B \mid (D\Delta + A) B \mid \cdots \mid (D\Delta + A)^{n-1} B \right].$$

Alors contrôlabilité approchée et aux trajectoires ont lieu si, et seulement si

$$\mathfrak{K}^* \text{ est injective.}$$

(Benabdallah, Dupaix, Gonzalez-Burgos-FAK).

Systèmes paraboliques: coefficients constants

- Qu'en est-il de la contrôlabilité de tels systèmes?
- Pour les systèmes à coefficients constants:
  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, on introduit l'opérateur non borné

  $$\mathfrak{K} = \left[B \mid (D\Delta + A)\, B \mid \cdots \mid (D\Delta + A)^{n-1} B \right].$$

  Alors contrôlabilité approchée et aux trajectoires ont lieu si, et seulement si

  $$\mathfrak{K}^* \text{ est injective.}$$

  (Benabdallah, Dupaix, Gonzalez-Burgos-FAK).
- Si de plus $D = Id$, alors le même critère est vrai avec

  $$\mathfrak{K} = \left[B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1} B \right]$$

  comme pour les systèmes différentiels!

Systèmes paraboliques: coefficients non constants

- Il existe très peu de résultats.

Systèmes paraboliques: coefficients non constants

- Il existe très peu de résultats.
  - Gonzalez-Burgos & de Teresa pour des systèmes en cascade.

Systèmes paraboliques: coefficients non constants

- Il existe très peu de résultats.
  - Gonzalez-Burgos & de Teresa pour des systèmes en cascade.
  - Karine Mauffrey (2011) d'une part et Benabdallah and Co (2013) d'autre part.

Systèmes paraboliques: coefficients non constants

- Il existe très peu de résultats.
  - Gonzalez-Burgos & de Teresa pour des systèmes en cascade.
  - Karine Mauffrey (2011) d'une part et Benabdallah and Co (2013) d'autre part.
  - Michel Duprez pour des résultats de contrôlabilité partielle (2014)

Systèmes paraboliques: contrôle par le bord

- Pour une équation scalaire:

$$\begin{cases} y' = \Delta y, & (0, T) \times \Omega \\ y = b(x)\, u & (0, T) \times \partial\Omega \\ y(0, x) = y_0(x), & \Omega \end{cases}$$

la contrôlabilité (aux trajectoires ou approchée) pour tout b tel que $\mathrm{supp}(b) = \gamma \subset \partial\Omega$.

Systèmes paraboliques: contrôle par le bord

- Pour une équation scalaire:

$$\begin{cases} y' = \Delta y, & (0,T)\times\Omega \\ y = b(x)\,u & (0,T)\times\partial\Omega \\ y(0,x) = y_0(x), & \Omega \end{cases}$$

la contrôlabilité (aux trajectoires ou approchée) pour tout b tel que $\mathrm{supp}(b) = \gamma \subset \partial\Omega$.

- Pour un système

$$\begin{cases} y' = D\Delta y + Ay, & \text{dans } Q_T = (0,T)\times\Omega \\ y = Bu1_\gamma, & \text{dans } \Sigma_T = (0,T)\times\partial\Omega \\ y(0) = y_0, & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

tout reste à faire également (situation plus compliquée que dans le cas du contrôle interne).