QUELQUES RÉSULTATS EFFECTIFS CONCERNANT LES INVARIANTS DE TSFASMAN-VLĂDUŢ

PHILIPPE LEBACQUE

RÉSUMÉ. On considère dans cet article les propriétés asymptotiques de corps globaux à travers l'étude de leurs invariants de Tsfasman-Vlăduţ, nombres qui décrivent en particulier la décomposition des places dans les tours de corps globaux. On utilise des résultats récents d'Alexander Schmidt et une version faible mais effective du théorème de Grunwald-Wang pour construire des corps globaux infinis ayant un ensemble fini donné d'invariants non nuls et un ensemble prescrit d'invariants nuls, tout en estimant leur défaut.

Dans les années 1980, Ihara (voir [7]) a initié la théorie asymptotique des corps de nombres, en s'interrogeant sur le nombre de places pouvant se décomposer dans une extension algébrique infinie non ramifiée d'un corps de nombres, et précisa alors très fortement le théorème de densité de Cebotarev, qui prévoit que ces places ont une densité analytique nulle. Ce problème est en outre très important dans le cas des corps de fonctions, puisqu'il est lié à la recherche des courbes ayant un très grand nombre de points rationnels, courbes utiles à la théorie des codes ou encore dans les problèmes d'empilement de sphères, où l'on s'intéresse à la construction de familles de corps de fonctions dont la limite du nombre de points rationnels sur le genre (plus précisément du ratio $N_q/(g-1)$) est maximale (voir [24]). Drinfeld et Vlăduţ (voir [2]) ont démontré que pour toute famille de courbes sur $\mathbb{F}_q$, la limite supérieure du ratio N_q/g ne pouvait excéder $\sqrt{q}-1$, améliorant ainsi la borne obtenue directement par l'application de l'inégalité de Hasse-Weil. Différentes approches (voir [6], [20] ou plus tardivement [3]) permettent de construire des familles de courbes sur $\mathbb{F}_{q^2}$ atteignant cette borne, ou d'obtenir des familles sur $\mathbb{F}_q$ pour lesquelles cette limite est positive.

Tsfasman et Vlăduţ ont par la suite généralisé la borne de Drinfeld-Vlăduţ et les travaux d'Ihara aux familles infinies de corps globaux (et donc aux corps globaux infinis). Leur étude a conduit à des applications diverses, par exemple à une généralisation du théorème de Brauer-Siegel. Ils ont ainsi défini un ensemble d'invariants dont l'importance se voit dans la fonction zêta des corps globaux infinis qu'ils considèrent. Dans sa thèse, l'auteur a tenté de contrôler le support de cet ensemble d'invariants. Si la théorie du corps de classes permet de s'assurer qu'un nombre fini de ces invariants sont positifs, il est plus difficile de répondre au problème inverse : peut-on s'assurer que ces invariants sont nuls. Cela est toutefois rendu possible par les travaux de Labute (voir [9]) sur les *mild* pro-p-groupes. Récemment, Schmidt ([18]) a généralisé ces résultats aux extensions

2000 *Mathematics Subject Classification.* 11R29, 11R34, 11R37, 11R45, 11R58.

maximales S-ramifiées, T-décomposées, et conduit l'auteur à améliorer ses travaux, en contrôlant simultanément un ensemble d'invariants nuls, et un ensemble d'invariants non nuls. C'est ce que nous présentons dans cet article.

1. Invariants de Tsfasman-Vlăduţ

On rappelle dans ces paragraphes les définitions et quelques résultats concernant les invariants de Tsfasman-Vlăduţ. On pourra se reporter à [25] ou encore à [12] pour les détails de ce qui va suivre.

1.1. **Notations.** Dans toute la suite, on utilisera les conventions et notations suivantes. Par corps global K on entendra une extension finie de $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{F}_r(t)$, pour une puissance r d'un nombre premier p. On supposera, sauf mention du contraire, que le corps des constantes des corps de fonctions est $\mathbb{F}_r$. On ajoutera (CN) (respectivement (CF)) pour signifier qu'une assertion concerne le cas des corps de nombres (resp. des corps de fonctions). Dans toute la suite, on désignera par :

$\log$	le logarithme népérien (CN), le logarithme en base r (CF),
$\log^+ x$	$= \log x$ si $x \geq 1$ et 0 sinon,
$\Omega(n)$	$= \sum \alpha_p$ si $n = \prod p^{\alpha_p}$ est la décomposition de n en facteurs premiers,
$\mathcal{Q}$	le corps $\mathbb{Q}$ (CN), le corps $\mathbb{F}_r(t)$ (CF),
$\delta_{\mathbb{Q}}$	$= 1$ (CN), 0 (CF),
$\delta_{\mathbb{F}}$	$= 0$ (CN), 1 (CF),
n_K	le degré de $K/\mathcal{Q}$,
d_K	le discriminant de K (CN),
g_K	le genre de K (CF), $\log \sqrt{\lvert d_K \rvert}$ (CN), appelé également genre de K,
g_K^*	g_K (CN), $g_K - 1$ (CF),
$Pl(K)$	l'ensemble des places de K,
$Pl_f(K)$	celui de ses places non archimédiennes,
$Pl_{\mathbb{R}}(K)$	celui de ses places réelles,
$\mathrm{N}\mathfrak{p}$	la norme d'une place $\mathfrak{p} \in Pl_f(K)$: le cardinal du corps résiduel en $\mathfrak{p}$,
$\deg \mathfrak{p}$	l'entier $\log \mathrm{N}\mathfrak{p}$ (CF),
$\Phi_q(K)$	le nombre de places de K de norme q,
$\Phi_{\mathbb{R}}(K)$	le nombre de places réelles de K,
$\Phi_{\mathbb{C}}(K)$	le nombre de places complexes de K,
$\delta_\ell(K)$	$= 1$ si le groupe μ_ℓ des racines $\ell^{\text{ème}}$ de 1 est contenu dans K, 0 sinon,
U_v	le groupe des unités de $\mathcal{O}_{K_v}$, pour $v \in Pl(K)$, avec la convention $U_v = \mathbb{R}_+^\times$ pour v réelle, $\mathbb{C}^\times$ pour v complexe,
$Cl^T(K)$	le groupe des T-classes d'idéaux de K, pour $T \subset Pl_f(K)$
$\delta_T(\ell, K)$	$= 1$ si ${}_\ell Cl^T(K) \neq 0$ (CF), 0 sinon,
$E_{K,T}$	le groupe des T-unités de K,
$V_S^T(K, \ell)$	le groupe de Kummer, pour $S, T \subset Pl_f(K)$, défini comme le groupe $\{a \in K^\times \mid a \in K_v^{\times \ell}$ pour $v \in S$ et $a \in U_v K_v^{\times \ell}$ pour $v \notin T\}/K^{\times \ell}$,
$K_S^T(\ell)$	la ℓ-extension maximale de K non ramifiée hors de S où les places de T sont totalement décomposées (voir ci-après).

$G_S^T(K,\ell)$	$= Gal(K_S^T(\ell)\vert K)$,
$K_S^{T,el}(\ell)$	la ℓ-extension abélienne élémentaire maximale de K contenue dans $K_S^T(\ell)$,
X_K	$\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ (CN) ou une courbe projective lisse absolument irréductible définie sur $\mathbb{F}_r$ ayant K comme corps de fonctions (CF).
a_T	$= \operatorname{pgcd}(\deg\mathfrak{p},\ \mathfrak{p}\in T)$ (CF), 1 (CN),
$\vartheta(S)$	$= \sum_{\mathfrak{p}\in S}\log \mathrm{N}\mathfrak{p}$,
$\vartheta'(S)$	$= \log^+\vartheta(S)$,

pour ℓ un nombre premier et $S, T \subset Pl_f(K)$. On omettra ℓ et K dans la notation dès lors qu'aucune ambiguïté n'est à craindre.

Pour une extension L/K, $\mathfrak{p}\in Pl(K)$ et $\mathfrak{P}\in Pl(L)$ prolongeant $\mathfrak{p}$ à L, on note :

$\Phi_{\mathfrak{p},q}(L)$	le nombre de places $\mathfrak{P}\in Pl(L)$ prolongeant $\mathfrak{p}$ de norme q,
$S_L \subset Pl(L)$	l'ensemble des prolongements des places de $S\subset Pl(K)$ à L,
$S_K \subset Pl(K)$	l'ensemble des restrictions des places de $S\subset Pl(L)$ à K,
$Ram(L/K)$	l'ensemble des places finies de K ramifiées dans L/K.

Rappelons enfin qu'on dit qu'une extension L/K est non ramifiée hors d'un ensemble de places finies S si $Ram(L/K)\subset S$ et si les places réelles sont totalement décomposées dans L/K (ne se ramifient pas). On dira qu'elle est S-totalement ramifiée, T-décomposée si elle est non ramifiée hors de S, totalement ramifiée en toutes les places de S, et si les places de T sont totalement décomposées.

Important : La mention (GRH) indique qu'un résultat est valable sous l'hypothèse de Riemann généralisée, qui est un théorème dans le cas des corps de fonctions. Cette hypothèse n'est pas nécessaire pour les résultats qualitatifs de cet article, mais la supposer permet souvent d'obtenir des estimations beaucoup plus fines. Cela provient du théorème de densité de Cebotarev dont le terme d'erreur est bien meilleur en supposant cette hypothèse. Enfin, dans ce qui suit, on appellera *constante effective* une constante absolue (ne dépendant d'aucun paramètre) et qu'on peut calculer. On écrira $P \ll Q$ (resp. $P\gg Q$) s'il existe une constante effective $c>0$ telle que $P\le c\,Q$ (resp. $P\ge c\,Q$). Nous mettrons l'accent sur la dépendance des majorations en les différents paramètres (genre, norme des places considérées...), la question de l'optimisation de telles constantes restera alors ouverte après notre étude.

1.2. **Définition et propriétés des invariants de corps globaux infinis.** Rappelons à présent les définitions relatives aux propriétés asymptotiques des corps globaux. Par famille $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de corps globaux on désignera une suite $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de corps globaux, extensions finies du même corps de base ($\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{F}_r(t)$), telle que K_i n'est pas isomorphe à K_j si $i\neq j$, et telle que, dans le cas des corps de fonctions, le corps des constantes de chaque K_i est le même corps fini $\mathbb{F}_r$ pour tout entier i. Dans une famille, la suite des genres $(g_{K_i})_{i\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini, puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de tels corps globaux, à isomorphisme près, de genre plus petit qu'un genre donné g_0. Une tour $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ désignera une famille telle que $K_i\subsetneq K_{i+1}$ pour tout i. On appelle enfin corps global infini toute extension algébrique infinie de $\mathcal{Q}$ limite d'une telle tour de corps globaux.

Considérons l'ensemble des paramètres

$$A = \begin{cases} \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\} \cup \left\{p^k \mid p \text{ premier}, \, k \in \mathbb{N}^*\right\} & (CN) \\ \left\{r^k \mid k \in \mathbb{N}^*\right\}. & (CF) \end{cases}$$

A_f désignera $A - \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ dans le cas des corps de nombres, et A dans celui des corps de fonctions.

Soit $\mathcal{K} = \{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de corps globaux. On dira que $\mathcal{K}$ est asymptotiquement exacte si, pour tout $q \in A$, la suite $(\Phi_q(K_i)/g_{K_i})$ admet une limite, que l'on notera alors

$$\phi_q(\mathcal{K}) := \lim_i \frac{\Phi_q(K_i)}{g_{K_i}}.$$

Dans ce cas, on considérera $\Phi_{\mathcal{K}} = \{\phi_q(\mathcal{K}), q \in A\}$. On omettra $\mathcal{K}$ dans la notation dès que cela ne prête pas à confusion. On dira que la famille $\mathcal{K}$ est asymptotiquement bonne si elle est asymptotiquement exacte et qu'au moins l'un des ϕ_q, $q \in A$, est non nul. Dans le cas contraire on la dira asymptotiquement mauvaise. La limite du ratio n_{K_i}/g_{K_i} sera notée

$$n_\infty(\mathcal{K}) := \lim_{i \to +\infty} \frac{n_{K_i}}{g_{K_i}}$$

lorsqu'elle existe (elle était notée ϕ_∞ dans nos travaux précédents).

Remarquons que de toute famille on peut extraire une famille asymptotiquement exacte. Dans la suite, on ne considérera que des tours $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de corps globaux, qui sont toujours asymptotiquement exactes (voir [25]). De plus, dans ce cas, les limites ϕ_q ne dépendent que de la limite $\mathcal{K} = \cup K_i$. On peut alors définir les invariants de Tsfasman-Vlăduţ $\phi_q(\mathcal{K})$ d'un corps global infini $\mathcal{K}$, comme étant les ϕ_q correspondant à toute tour $\{K_i\}$ telle que $\mathcal{K} = \cup K_i$.

On voit facilement qu'une condition nécessaire à un corps global infini pour être asymptotiquement bon est $n_\infty > 0$, cette condition étant également suffisante dans le cas des corps de nombres. Elle est en particulier vérifiée si le corps est non ramifié hors d'un ensemble fini de places, et modérément ramifié sur un corps global (voir [12] pour les détails).

Ces invariants vérifient une inégalité fondamentale généralisant l'inégalité de Drinfeld-Vlăduţ (voir [25]) :

Théorème (Inégalités fondamentales de Tsfasman-Vlăduţ). *Pour tout corps global infini, on a :*

$$(CN-GRH) \quad \sum_q \frac{\phi_q \log q}{\sqrt{q}-1} + (\log \sqrt{8\pi} + \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2})\phi_{\mathbb{R}} + (\log 8\pi + \gamma)\phi_{\mathbb{C}} \leq 1,$$

$$(CN) \quad \sum_q \frac{\phi_q \log q}{q-1} + (\log 2\sqrt{\pi} + \frac{\gamma}{2})\phi_{\mathbb{R}} + (\log 2\pi + \gamma)\phi_{\mathbb{C}} \leq 1,$$

$$(CF) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\phi_{r^m}}{r^{\frac{m}{2}}-1} \leq 1,$$

où γ est la constante d'Euler.

Pour des raisons pratiques de correspondance entre corps de fonctions et corps de nombres, définissons également, pour toute place $\mathfrak{p}$ d'un corps global K, tout $q \in A$ et tout corps global infini $\mathcal{K}/K$, les invariants

$$\phi_{\mathfrak{p},q}(\mathcal{K}) = \lim \Phi_{\mathfrak{p},q}(K_i)/g_{K_i},$$

pour toute tour $\{K_i\}$ d'extensions de K de réunion $\mathcal{K}$. Ces limites existent et ne dépendent pas de la tour choisie. Le support de $\mathcal{K}/\mathcal{Q}$ est alors ainsi défini :

$$Supp(\mathcal{K}) := \{\mathfrak{p} \in Pl(\mathcal{Q}) \mid \exists q \in A \quad \phi_{\mathfrak{p},q} \neq 0\}.$$

On peut définir la fonction zêta d'un corps global infini $\mathcal{K}$ sous la forme suivante (voir [25]) :

$$\zeta_{\mathcal{K}}(s) := \prod_{q \in A_f} (1 - q^{-s})^{-\phi_q}$$

ainsi que sa fonction zêta complétée

$$(CN) \quad \tilde{\zeta}_{\mathcal{K}}(s) := e^s 2^{-\phi_{\mathbb{R}}} \pi^{-s\phi_{\mathbb{R}}/2} (2\pi)^{-s\phi_{\mathbb{C}}} \Gamma(s/2)^{\phi_{\mathbb{R}}} \Gamma(s)^{\phi_{\mathbb{C}}} \zeta_{\mathcal{K}}(s),$$

$$(CF) \quad \tilde{\zeta_{\mathcal{K}}} := r^s \zeta_{\mathcal{K}}.$$

Le produit eulérien définissant ces fonctions converge absolument pour $Re(s) \geq 1$ ($Re(s) \geq 1/2$ sous GRH) d'après les inégalités fondamentales. Il définit alors une fonction analytique sur $Re(s) > 1$ ($> 1/2$ sous GRH). De plus, $\zeta_{\mathcal{K}}$ est la limite ponctuelle de $(\zeta_{K_i}^{1/g_{K_i}})$ sur le demi-plan $Re(s) > 1$ (voir [25]). L'étude de ces fonctions zêta se trouve alors intimement liée à celle des invariants.

Plusieurs questions les concernant se posent alors naturellement. On peut par exemple se demander si l'ensemble des invariants de corps globaux infinis a des propriétés topologiques intéressantes pour une topologie naturelle sur les suites réelles. Toutefois cette question, comme d'autres réputées plus faibles, à savoir si le support des corps globaux infinis peut être infini, sont hors de portée actuellement. En effet, si l'on peut essayer de contrôler le comportement d'un nombre fini de places, aucune technique connue de l'auteur ne permet d'en gérer un nombre infini, tout en veillant à ce que la ramification reste finie (et modérée). On peut également s'interroger sur l'existence de corps globaux infinis ayant un défaut nul, c'est à dire dont la différence entre les deux membres de l'inégalité fondamentale est nulle. De tels corps existent sur $\mathbb{F}_{r^2}$, et peuvent même être obtenus de façon récursive (voir [3]). Dans le cas des corps de nombres, ou des corps de fonctions sur $\mathbb{F}_r$, on ne sait pas quelles valeurs peuvent être prises par le défaut. Posons alors

$$
\begin{aligned}
(CN-GRH) \quad \delta &= 1 - \sum_q \frac{\phi_q \log q}{\sqrt{q}-1} \\
&\quad - (\log\sqrt{8\pi} + \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2})\phi_{\mathbb{R}} - (\log 8\pi + \gamma)\phi_{\mathbb{C}}, \\
(CN) \quad \delta &= 1 - \sum_q \frac{\phi_q \log q}{q-1} \\
&\quad - (\log 2\sqrt{\pi} + \frac{\gamma}{2})\phi_{\mathbb{R}} - (\log 2\pi + \gamma)\phi_{\mathbb{C}}, \\
(CF) \quad \delta &= 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\phi_{r^m}}{r^{\frac{m}{2}}-1}.
\end{aligned}
$$

On ne connait les invariants de corps globaux infinis et donc leur fonction ζ que dans de rares cas : celui des tours optimales (ou des tours construites à partir de celles-ci), ou celui des tours asymptotiquement mauvaises. Le cas des extensions $K(\pi,1)$ (voir [18] pour les définitions et les résultats concernant la propriété $K(\pi,1)$) et des extensions qui s'en déduisent est particulièrement intéressant, car elles fournissent les seuls exemples connus de corps de nombres asymptotiquement bons dont on connaît ≪ presque ≫ les invariants. En effet, ce sont des extensions infinies de type $K_S^T(\ell)/K$, pour ℓ impair, réalisant les extensions locales maximales aux places de S, dont le groupe de Galois a ℓ-dimension cohomologique égale à 2, et telles que les places de K sont soit totalement décomposées, soit admettent un degré d'inertie infini dans $K_S^T(\ell)/K$. Schmidt démontre en particulier dans [18] que, sous réserve d'ajouter éventuellement un nombre fini de places à S, l'extension $K_S^T(\ell)/K$ a la propriété $K(\pi,1)$ pour ℓ. Leurs invariants sont donnés par la proposition suivante.

Proposition A. *Soient ℓ un nombre premier impair, $S, T \subset Pl_f(\mathcal{Q})$ deux ensembles finis disjoints de places finies de $\mathcal{Q}$ tels que $\ell \notin S$ dans le cas des corps de nombres, ℓ premier à a_T et r dans le cas des corps de fonctions,* $\mathrm{N}\mathfrak{p} = 1 \bmod \ell$ *pour tout $\mathfrak{p} \in S$, et tels que $(X_{\mathcal{Q}} - S, T)$ ait la propriété $K(\pi,1)$ pour ℓ. Les invariants de $\mathcal{Q}_S^T(\ell)$ sont ainsi les suivants :*

(i) $\phi_{\mathbb{R}} = \frac{2}{\vartheta(S)}$ *et* $\phi_{\mathbb{C}} = 0$ *(CN).*

(ii) si la place $\mathfrak{p}$ est totalement décomposée dans $\mathcal{Q}_S^T(\ell)/\mathcal{Q}$, alors

$$\phi_{\mathfrak{p},\mathrm{N}\mathfrak{p}} = \frac{2}{\vartheta(S) - 2\delta_{\mathbb{F}}} \ \text{et}\ \forall m \neq 1,\ \phi_{\mathfrak{p},\mathrm{N}\mathfrak{p}^m} = 0.$$

(iii) si la place $\mathfrak{p}$ n'est pas totalement décomposée dans $\mathcal{Q}_S^T(\ell)/\mathcal{Q}$, alors

$$\phi_{\mathfrak{p},\mathrm{N}\mathfrak{p}^m} = 0 \ \text{pour tout}\ m.$$

Ce résultat donne une motivation supplémentaire pour l'étude des places totalement décomposées dans $\mathbb{Q}_S^T(\ell)$, car leur connaissance permettrait de connaître la fonction ζ de $\mathbb{Q}_S^T(\ell)$ (sous les hypothèses de la proposition précédente). Celle-ci s'exprime en effet ainsi, pour $\mathrm{Re}(s) \geq 1$:

$$\zeta_{\mathbb{Q}_S^T(\ell)}(s) = \prod_{p \in T} \left(1 - p^{-s}\right)^{-\frac{2}{\vartheta(S)}} \prod_{p \in D - T} \left(1 - p^{-s}\right)^{-\frac{2}{\vartheta(S)}},$$

où D est l'ensemble des premiers totalement décomposés dans $\mathbb{Q}_S^T(\ell)/\mathbb{Q}$.

Dans un travail précédent (voir [13]), l'auteur a démontré que, pour toute famille finie de paramètres $q_1, \ldots, q_n \in A_f$, il existe un corps global infini ayant ses invariants $\phi_{q_1}, \ldots, \phi_{q_n}$ strictement positifs. Il y est aussi démontré que pour tout ensemble fini de nombres premiers I, il existe un corps de nombres infini asymptotiquement bon $\mathcal{K}$ tel que $I \cap Supp(\mathcal{K}) = \emptyset$. Il est également possible de donner des versions effectives de ces résultats, en terme de défaut du corps obtenu. Toutefois, il n'avait pas pu être démontré qu'il existait un corps global infini ayant ces deux propriétés simultanément. Nous nous proposons alors de démontrer :

Théorème B. *Soit $P = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\} \subset Pl_f(\mathcal{Q})$, non vide dans le cas des corps de fonctions. Soient, pour tout $i = 1 \ldots n$, n_i entiers distincts $d_{i,1}, \ldots, d_{i,n_i}$. Soit un ensemble fini $I \subset Pl_f(\mathcal{Q})$ tel que $I \cap P = \emptyset$. On pose $N = \mathrm{ppcm}(n_i)_i \, \mathrm{ppcm}(d_{i,j})_{i,j}$. Alors il existe trois fonctions strictement positives $f(P,N)$, $g(P,I)$ $h(P,n_i,d_{i,j})$ et un corps global infini $\mathcal{K}$, totalement réel dans le cas des corps de nombres, tels que :*

(i) $I \cap Supp(\mathcal{K}) = \emptyset$.

(ii) Pour tout $i = 1 \ldots n$, et tout $j = 1 \ldots n_i$, $\phi_{\mathfrak{p}_i, \mathrm{N}\mathfrak{p}_i^{d_{i,j}}} = \frac{n_\infty}{n_i d_{i,j}} > 0$.

(iii) $\phi_{\mathbb{R}} = n_\infty$ *(CN).*

(iv) $n_\infty \geq (f(P,N) + g(P,I))^{-1}$ *et* $\delta(\mathcal{K}) \leq 1 - \dfrac{h(P,n_i,d_{i,j})}{f(P,N) + g(P,I)}$.

Sous GRH, *on peut prendre*

$$h(P,n_i,d_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}_i}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\mathrm{N}\mathfrak{p}_i^{\frac{d_{i,j}}{2}} - 1} + \delta_{\mathbb{Q}} \left(\log 8\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right),$$

et si r est premier avec N,

$$f(P,N) \ll a^{\Omega(N)} \left\{(1 + |P|) \log N + \vartheta'(P) + \delta_{\mathbb{F}} N^2\right\},$$

où $a > 1$ est une constante effective, et

$$g(P,I) \ll |P|(\vartheta'(P) + \log^+ |I| + \log^+ \vartheta'(I)) + \vartheta'(I) + (|P|^2 + |I| + 1)(1 + \delta_{\mathbb{F}} \log a_P).$$

Lorsque r n'est pas premier avec N, on obtient dans (iv) une estimation un peu plus faible. On verra qu'on peut prendre ce corps global infini sous la forme d'un compositum $\mathcal{Q}_S^T(\ell)L$, où L est une extension finie de $\mathcal{Q}$. Le défaut étant d'autant plus petit que la somme $\sum_q \frac{\phi_q \log q}{\sqrt{q}-1}$ est grande, on voit que pour rendre le défaut le plus petit possible, il faut que T soit aussi grand que possible pour $\sum_{\mathfrak{p} \in T} \frac{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}}{\sqrt{\mathrm{N}\mathfrak{p}}-1}$, et S aussi petit que possible pour $\sum_{\mathfrak{p}\in S}\log \mathrm{N}\mathfrak{p}$ (cette somme intervenant dans le calcul du genre). On peut alors se demander combien de places peuvent se décomposer dans ces extensions $\mathcal{Q}_S^T(\ell)$. Le théorème de densité de Cebotarev implique que l'ensemble de ces places a une densité analytique nulle. On peut toutefois être plus précis :

Proposition C. *Soient ℓ un nombre premier impair, $S, T \subset Pl_f(\mathcal{Q})$ deux ensembles finis disjoints de places finies de $\mathcal{Q}$. Dans le cas des corps de nombres, on suppose que $\ell \notin S$. Dans celui des corps de fonctions, on suppose que ℓ est premier à l'entier a_T et à r. Soit D l'ensemble des places finies de $\mathcal{Q}$ totalement décomposées dans $\mathcal{Q}_S^T(\ell)$. Si $\mathcal{Q}_S^T(\ell)$ est infinie, alors :*

$$(CN) \quad \sum_{\mathfrak{p}\in D}\frac{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}}{\mathrm{N}\mathfrak{p}-1} \leq \frac{\vartheta(S)}{2} - \log 2\sqrt{\pi} - \frac{\gamma}{2}$$

$$(CN-GRH) \quad \sum_{\mathfrak{p}\in D}\frac{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}}{\sqrt{\mathrm{N}\mathfrak{p}}-1} \leq \frac{\vartheta(S)}{2} - \log\sqrt{8\pi} - \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}$$

$$(CF) \quad \sum_{\mathfrak{p}\in D}\frac{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}}{\sqrt{\mathrm{N}\mathfrak{p}}-1} \leq \frac{\vartheta(S)}{2} - 1$$

Remarquons que cette inégalité s'avère en pratique trop faible du fait de la taille de S pour montrer qu'aucune autre place que celles de T ne se décompose totalement. De plus, on se rend compte des limites de nos méthodes actuelles. En effet, les méthodes cohomologiques ne permettent pas pour le moment d'imposer le comportement d'une infinité de places à la fois, tandis que les méthodes analytiques ne permettent pas de détecter un ensemble infini de places décomposées lorsque celui-ci est très petit pour $\sum \frac{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}}{\sqrt{\mathrm{N}\mathfrak{p}}-1}$. On est donc impuissant devant le problème de savoir s'il existe ou non d'autres places décomposées dans les extensions $\mathcal{Q}_S^T(\ell)$.

L'article s'organise ainsi. Dans la seconde partie, nous rappelons le théorème de densité de Cebotarev et des estimations pour le genre et le nombre de classes. Dans la troisième, nous construisons l'extension L, au moyen d'un résultat effectif de construction d'extension ayant un comportement local donné, et du théorème de densité de Cebotarev. La quatrième partie est consacrée au choix des ensembles de places S et T et du premier ℓ permettant d'obtenir une extension $\mathcal{Q}_S^T(\ell)$ conduisant au théorème B. On utilisera pour cela les travaux de Schmidt pour lesquels on donne des versions effectives ; on y prouve aussi la proposition A ainsi que la proposition C qui s'avère être un corollaire direct des inégalités fondamentales. Dans la cinquième partie, on compose ces deux constructions pour obtenir le corps voulu et une estimation de son défaut. Enfin on donne en sixième partie deux estimations valables dans les cas particuliers les plus utiles en pratique.

Nous voudrions exprimer notre gratitude à Alexander Schmidt pour nous avoir accueilli à Ratisbonne puis à Heidelberg et pour avoir répondu à nos nombreuses questions. Nous remercions également le rapporteur de l'article pour tous ses commentaires. Enfin, ce travail a été en partie financé par le projet DFG *Algebraic Cycles and L-Functions* et les dotations EPSRC EP/E049109 *Two dimensional adelic analysis* et RFBR *13-01-90906 mol_in_nr*.

2. Estimations préliminaires

2.1. Le théorème de densité de Cebotarev. Dans ce paragraphe, L/K désigne une extension galoisienne de corps globaux, de groupe de Galois G. Dans le cas des corps de fonctions, L et K ont pour corps de constantes $cste(L) = \mathbb{F}_{r^m}$ et $cste(K) = \mathbb{F}_r$ respectivement. On note ϕ la substitution de Frobenius : $x \mapsto x^r$. Soit $\pi(x)$ la fonction de comptage des places finies de K non ramifiées dans L de norme inférieure ou égale à x. On pose $\Phi(d) = \pi(r^d) - \pi(r^{d-1})$ dans le cas des corps de fonctions.

Soit S un ensemble fini d'idéaux premiers de K, au dessus d'un ensemble $S_{\mathcal{Q}}$ de $\mathcal{Q}$. Pour un idéal premier $\mathfrak{p}$ de K, le symbole d'Artin $\left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right)$ désigne la classe de conjugaison des Frobenius correspondant aux idéaux premiers au-dessus de $\mathfrak{p}$ dans L. Soit C une classe de conjugaison de G. Pl_f^{nr} désignera l'ensemble des places finies de K non ramifiées dans L/K. Posons :

$$\begin{aligned}
&\pi_C(x) = \#\left\{\mathfrak{p} \in Pl_f^{nr} \mid \mathrm{N}\mathfrak{p} \leq x \text{ et } \left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right) = C\right\}\\
&\Phi_C(d) = \pi_C(r^d) - \pi_C(r^{d-1}) \quad (CF)
\end{aligned}$$

Considérons la fonction

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

et enfin les termes de reste :

$$\begin{aligned}
(CN) \quad \Delta(x) &= \pi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}\mathrm{Li}(x)\\
(CF) \quad \Delta(d) &= \Phi_C(d) - \frac{|C|}{|G|}\Phi(d).
\end{aligned}$$

Le théorème de densité de Cebotarev effectif donne une estimation de ces termes de reste. Afin de mieux apprécier ce résultat, rappelons le comportement des termes principaux : on a $\mathrm{Li}(x) \sim x/\log x$ et $\Phi(d) \sim r^d/d$.

Théorème 2.1 (Théorème de densité de Cebotarev [11],[8])**.** *Avec les notations précédentes, il existe quatre constantes effectives A_0, A_1, A_2, A_3 vérifiant les assertions suivantes.*

(i) *Pour tout $x \geq 2$ tel que* $\log x \geq A_0\, n_L\, g_L^2$,

$$(CN) \quad |\Delta(x)| \leq \frac{|C|}{|G|}\mathrm{Li}(x^\rho) + A_1|\hat{C}|x \exp\left(-A_2\, n_L^{-\frac{1}{2}} \log^{\frac{1}{2}}(x)\right),$$

où $|\hat{C}|$ est le nombre de classes de conjugaison contenues dans C, et où le terme en $\mathrm{Li}(x^\rho)$ n'est présent que si ζ_L a un zéro exceptionnel ρ (c'est à dire vérifiant $1-(8\,g_L)^{-1} \leq \rho < 1$).

(ii) *Sous* GRH *on a, pour tout $x \geq 2$,*

$$(CN-GRH) \qquad |\Delta(x)| \leq A_3 \frac{|C|}{|G|} x^{\frac{1}{2}} \left(2g_L + n_L \log x\right).$$

(iii) *Dans le cas des corps de fonctions, si la restriction des éléments de C au corps des constantes de L ne coïncide pas avec ϕ^d, alors $\Phi_C(d)=0$; sinon on a l'estimation*

$$\begin{aligned}(CF) \quad |\Phi_C(d) - m\frac{|C|}{|G|}\Phi(d)| \leq & 2g_L \frac{|C|}{|G|}\frac{r^{\frac{d}{2}}}{d} + 2(2g_K+1)|C|\frac{r^{\frac{d}{2}}}{d} \\ & + (1+\frac{|C|}{d})\vartheta(Ram(L/K)),\end{aligned}$$

Corollaire 2.2. *En plus des notations précédentes, supposons que L/K ne soit pas triviale. Soit S un ensemble fini de places finies de K. Alors il existe une place finie $\mathfrak{p}$ de K non ramifiée dans L qui n'est pas dans S et dont le Frobenius est dans la classe C, telle que l'on ait sous l'hypothèse de Riemann généralisée :*

$$\begin{aligned}(CN-GRH) \quad & \log \mathrm{N}\mathfrak{p} \leq 2A_4 \left\{\log(1+|S_{\mathbb{Q}}|) + \log g_L\right\}, \\ (CF) \quad & \deg \mathfrak{p} \leq 2\max(A_4\left\{\log(1+|S|) + \log([L:K]+g_L)\right\}, m)\end{aligned}$$

pour une constante effective A_4.

Notons que le terme en $[L:K]$ peut être borné par un terme en g_L dès lors que $g_K > 1$ ou que $g_K = 1$ et L/K ramifiée. Remarquons également que l'entier m dans l'inégalité provient de l'extension des constantes, qui n'altère pas le genre.

Preuve: Il s'agit de trouver x tel que $\pi_C(x) \geq |S|+1$. Traitons le cas des corps de fonctions, celui des corps de nombres se déduisant encore plus directement de [11] ou [19]. D'après la formule de Riemann-Hurwitz pour l'extension galoisienne L/K, on a

$$\frac{|G|}{m} g_K + \frac{|G|}{4m}\vartheta(Ram(L/K)) < g_L + \frac{|G|}{m}.$$

De plus, d'après l'inégalité de Weil et la formule d'inversion de Moebius (voir [26, 3.2.10]), on a

$$\Phi(d) > \frac{r^d}{d} - (7\,g_K+2)\frac{r^{\frac{d}{2}}}{d}.$$

Alors, pour que $\Phi_C(d) > |S|$, il suffit de trouver d tel que :

$$\begin{aligned} r^d \geq & (7\,g_K+2)r^{\frac{d}{2}} + \frac{2}{m} g_L r^{\frac{d}{2}} + 2\frac{|G|}{m}(2\,g_K+1)r^{\frac{d}{2}} \\ & + 4\left(\frac{d}{|C|}+1\right)\left(g_L + \frac{|G|}{m}\right) + \frac{|G|}{|C|m}|S|,\end{aligned}$$

et tel que $\Phi_C(d) \neq 0$. En jouant sur la constante A_4 on obtient le résultat sous la forme voulue. $\square$

Sans GRH, on utilisera un résultat de Lagarias, Montgomery et Odlyzko ([10, Th.1.1]), qui borne la norme du plus petit premier $\mathfrak{p}$ dont le Frobenius est dans C par $\log \mathrm{N}\mathfrak{p} \leq A_5 g_L$. On peut de même exclure un ensemble fini de places S. Dans le cas des corps de nombres, remarquons qu'on pourrait choisir $\mathfrak{p}$ de norme égale à un nombre premier, comme dans [10] inconditionnellement et dans [1, Th. 5.1] sous ERH (*Extended Riemann Hypothesis*).

2.2. **Un calcul de genre.** Dans ce paragraphe, nous allons rappeler une majoration du genre d'une extension galoisienne K/k de corps globaux, non ramifiée hors d'un ensemble de places S, lemme très classique (voir [19] pour l'essentiel) qui nous sera utile à de nombreuses reprises.

Lemme 2.3. *Soit K/k une extension de corps globaux et S un ensemble fini de places finies contenant $\mathrm{Ram}(K/k)$. Soit ℓ un nombre premier. Dans le cas des corps de fonctions, on suppose K/k modérément ramifiée. Dans celui des corps de nombres, on suppose que seules les places au-dessus de ℓ dans k peuvent être sauvagement ramifiées. Alors*

$$g_K^* \leq [K:k]\left(g_k^* + \frac{1}{2}\sum_{v\in S}\log \mathrm{N}v + \frac{\delta_{\mathbb{Q}}}{2} n_k \log{[K:k]}\right).$$

Si de plus, K/k est galoisienne,

$$g_K^* \leq [K:k]\left(g_k^* + \frac{1}{2}\sum_{v\in S}\log \mathrm{N}v + \frac{\delta_{\mathbb{Q}}}{2} n_k \mathrm{v}_\ell([K:k]) \log \ell\right).$$

Preuve: On applique la formule de Riemann-Hurwitz. □

2.3. **Majoration de h_k.** Nous allons également avoir besoin d'une estimation du nombre de classes h_k par une fonction de n_k et g_k.

Lemme 2.4. *Soit k un corps global. Il existe une constante effective A_6 telle que $\log h_k \leq A_6 g_k$. Plus précisément, on a :*

$$h_k \leq \bar{h}_k := \begin{cases} 25\exp\left(-0,46\, n_k\right)\left(\frac{e\log|d_k|}{4(n_k-1)}\right)^{n_k-1}\sqrt{|d_k|} \ \textit{si}\ k\neq\mathbb{Q} \\ 1 \ \textit{si}\ k=\mathbb{Q}\end{cases} \qquad (CN)$$

$$h_k \leq (1+\sqrt{r})^{2g} \quad (CF).$$

Preuve: Cas des corps de nombres. On utilise pour cela les majorations de Louboutin (voir [14]) concernant le résidu de la fonction zêta en 1 d'un corps de nombres k différent de $\mathbb{Q}$. On se place dans le cas $k\neq\mathbb{Q}$. On a alors

$$h_k\frac{R_k}{w_k} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\Phi_{\mathbb{C}}(k)}\left(\frac{e\log|d_k|}{4(n_k-1)}\right)^{n_k-1}\sqrt{|d_k|}.$$

Utilisant la minoration de $R_k/w_k \geq 0,02\exp\left(0,46\,\Phi_{\mathbb{R}}(k)+0,1\,\Phi_{\mathbb{C}}(k)\right)$ due à Zimmert (voir [27, §3]), on obtient pour h_k la majoration :

$$h_k \leq \bar{h}_k := 25\exp\left(-0,46\, n_k\right)\left(\frac{e\log|d_k|}{4(n_k-1)}\right)^{n_k-1}\sqrt{|d_k|}.$$

Pour $k = \mathbb{Q}$ on prend $\bar{h}_{\mathbb{Q}} := 1$. Lorsque le degré est très petit devant le discriminant, on peut utiliser une autre minoration pour le régulateur due à Silverman (voir [22]) et gagner un facteur $\log |d_k|$ (à n_k fixé). Si on souhaitait produire une construction asymptotique à base de ce résultat, il serait peut-être intéressant de l'introduire. On se contentera ici de la minoration de Zimmert.

Cas des corps de fonctions. Dans ce cas, on peut majorer h_k au moyen de l'hypothèse de Riemann pour les corps de fonctions. En effet, si $P_k(x)$ est le numérateur de la fonction zêta de k,

$$h_k = P_k(1) = \prod_{i=1}^{g_k} |1 - \rho_i|^2,$$

où $|\rho_i| = \sqrt{r}$. On obtient alors en majorant très brutalement

$$h_k \leq (1 + \sqrt{r})^{2g}.$$

$\square$

3. Construction d'un corps global ayant des places de norme donnée

3.1. Une version faible mais effective du théorème de Grunwald-Wang.

Le théorème de Grunwald-Wang prédit l'existence d'extensions abéliennes qui réalisent un nombre fini de conditions locales. Nous nous proposons modestement de démontrer une version faible effective qui nous suffira. Pourtant il paraît raisonnable qu'une version plus générale puisse être obtenue en construisant un bon corps gouverneur pour le problème général. Dans ce paragraphe, nous allons ainsi démontrer la proposition suivante :

Proposition 3.1. *Soit k un corps global, T (non vide dans le cas des corps de fonctions) et I deux ensembles disjoints de places finies de k et ℓ un nombre premier. Alors il existe une extension abélienne K/k (comprenant éventuellement une extension du corps des constantes) d'exposant ℓ, non ramifiée hors d'une unique place finie $s \notin T \cup I$, modérément ramifiée si $\ell \neq p$, telle que les places de T sont totalement décomposées et celles de I ont pour degré d'inertie ℓ. De plus g_K peut être borné explicitement par une fonction de ℓ, $\#I$, $\#T$, n_k et g_k.*

Dans cette proposition, les places réelles sont aussi totalement décomposées puisque l'extension est non ramifiée hors d'une place finie s. Ainsi, si k est totalement réel, alors K l'est aussi. Cependant, la décomposition des places réelles n'est pas obligatoire : en modifiant la preuve de la proposition, on peut également jouer sur leur ramification. Concernant notre résultat, on verra qu'on construit K, dans le cas où $\ell \neq p$, comme le compositum d'une extension non ramifiée où les places de T sont totalement décomposées et d'une extension (modérément) ramifiée en une place, où les places de T sont également totalement décomposées. Comme on s'intéresse à l'estimation de g_K^*/n_K, qui est constant dans les extensions non ramifiées, on ne détériore pas le corps en prenant le compositum par une telle extension non ramifiée.

a. Premier cas : la caractéristique $car(k)$ de k est différente de ℓ. Rappelons tout d'abord un résultat de réflexion que Georges Gras a établi dans le cas des corps de nombres mais dont la preuve dans le cas des corps de fonctions de caractéristique différente de ℓ reste tout à fait valable. Nous ne l'écrirons pas ici, puisque cela se résumerait à copier celle de [4, V.2.4.4]. Cependant, rappelons quelques unes de ses notations. Pour k un corps global, et T un ensemble fini de places finies de k, on considère le groupe $V^T = V^T_\emptyset(k, \ell)$. Posons alors $\mathcal{K}_T = k(\sqrt[\ell]{1}, \sqrt[\ell]{V^T})$. On dira qu'une place v est modérée si elle est finie et si $car(k)$ est premier à $\mathrm{N}v$. Nous pouvons à présent énoncer le résultat de Gras :

Proposition 3.2 (Gras). *Soit ℓ un nombre premier et soit k un corps global de caractéristique $p \neq \ell$. Soit s une place modérée de k. Soit T un ensemble fini de places de k. Alors il existe une extension cyclique de degré ℓ de k, T-décomposée et $\{s\}$-totalement ramifiée si et seulement si s est totalement décomposée dans l'extension $\mathcal{K}_T/k$.*

Nous pouvons à présent démontrer la proposition 3.1.
Preuve : Soit K_1 l'extension ℓ-élémentaire abélienne non ramifiée maximale de k où toutes les places de T sont totalement décomposées. Considérons l'ensemble $I_1 \subset I$ des places de I totalement décomposées dans K_1/k.

Lemme 3.3. *Pour tout $v \in I_1$, on a $V^T \subsetneq V^{T\cup\{v\}}$. L'extension $\mathcal{K}_T \subsetneq \mathcal{K}_{T\cup\{v\}}$ est cyclique de degré ℓ et ramifiée au-dessus de v.*

Preuve: Pour tout ensemble fini T de places finies de k, on a la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & E_{k,T} & \to & V^T(k) & \to & {}_\ell Cl^T(k) & \to & 0, \\ & & & & a & \mapsto & [\mathfrak{a}] & & \end{array}$$

où $\mathfrak{a}$ est l'unique idéal T-fractionnaire tel que $(a) = \mathfrak{a}^\ell$. Pour tout $v \in I_1$, ${}_\ell Cl^{T\cup v}(k) = {}_\ell Cl^T(k)$, et le théorème des unités de Dirichlet nous assure que $E_{k,T} \subsetneq E_{k,T\cup v}$. D'où l'inclusion stricte $V^T \subsetneq V^{T\cup v}$. La seconde partie du lemme provient de la théorie de Kummer (voir [4, I.6.3]). □

Il nous faut à présent trouver une place $s \notin I$ de k ne divisant pas ℓ telle qu'il existe une extension cyclique de degré ℓ, T-décomposée et $\{s\}$-totalement ramifiée, telle qu'il n'existe pas une telle extension $T \cup \{v\}$-décomposée, $\{s\}$-totalement ramifiée, pour tout $v \in I_1$, et de savoir estimer $\mathrm{N}s$. Cela est rendu possible par les résultats de Gras et le théorème de densité de Cebotarev effectif. En effet, d'après la proposition 3.2 une telle place s doit vérifier les conditions suivantes :

(i) $Frob_s \in Gal(\mathcal{K}_T/k)$ est trivial.

(ii) Pour tout $v \in I_1$, $Frob_s \in Gal(\mathcal{K}_{T\cup\{v\}}/k)$ n'est pas trivial.

Considérons le compositum L/k de toutes les extensions $\mathcal{K}_{T\cup\{v\}}$, $v \in I_1$. L'extension L/k est galoisienne. Dans $Gal(L/k)$, il existe un élément σ trivial sur $\mathcal{K}_T$ et non trivial sur chacun des $\mathcal{K}_{T\cup\{v\}}$, puisque toutes les extensions sont linéairement indépendantes sur $\mathcal{K}_T$ (seule l'extension –de degré ℓ– $\mathcal{K}_{T\cup\{v\}}/\mathcal{K}_T$ est ramifiée en des places prolongeant v, d'après la théorie de Kummer). En prenant une place s

telle que $Frob_s = \sigma$ on obtient alors, d'après la proposition 3.2, l'existence d'une extension K_2/k cyclique de degré ℓ, où toutes les places de I_1 sont inertes, et toutes les places de T sont totalement décomposées. Prenons alors comme extension K le compositum K_1K_2. Cette extension est abélienne, de groupe de Galois d'exposant ℓ. Le degré d'inertie des places de I étant l'ordre du Frobenius correspondant, celui-ci est au plus ℓ, et vaut donc ℓ, puisque chaque place a pour degré d'inertie ℓ dans l'une ou l'autre des deux extensions. Enfin K est non ramifiée hors de $\{s\}$. Reste alors à estimer $\mathrm{N}s$. Il faut pour cela commencer par estimer le degré et le genre de L, puis on pourra invoquer le théorème de densité de Cebotarev pour obtenir une majoration de la norme de la plus petite place s vérifiant les conditions précédentes.

Estimation du degré et du genre de L. Le corps L est le compositum des $\mathcal{K}_{T\cup\{v\}}/\mathcal{K}_T$, pour tous les $v \in I_1$. Chacune de ces extensions a pour degré ℓ : en effet, elles ne sont pas triviales, et l'application $V^{T\cup\{v\}} \to \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$, qui à un élément x associe sa valuation en v est surjective (sinon $V^{T\cup\{v\}} = V^T$) et a pour noyau V^T.

De plus, le degré de $\mathcal{K}_T/k$ est borné par

$$[\mathcal{K}_T : k] \leq [k(\mu_\ell) : k]\ell^{d_\ell(V^T)},$$

qui, d'après les résultats de Shafarevich [21], est calculé par :

$$d_\ell(V^T) = d_\ell(Cl^T) + \Phi_{\mathbb{R}}(k) + \Phi_{\mathbb{C}}(k) - 1 + \#T + \delta_\ell(k).$$

Rappelons que $a_T = \mathrm{pgcd}(\deg \mathfrak{t}, \mathfrak{t} \in T)$ dans le cas des corps de fonctions et $a_T = 1$ dans celui des corps de nombres. Dans ce premier cas, $\#Cl^{\mathfrak{t}} = h_k \deg \mathfrak{t}$ pour tout $\mathfrak{t} \in T$ (voir [16, 1.2.5]), on a alors :

$$[L : k] \leq a_T h_k (\ell-1)^{1-\delta_\ell(k)} \ell^{\Phi_{\mathbb{R}}(k)+\Phi_{\mathbb{C}}(k)+\delta_\ell(k)-1+\#T+\#I}.$$

La théorie de Kummer affirme de plus que $Ram(\mathcal{K}_{T\cup\{v\}}/k) \subset T \cup \{v\} \cup Pl_\ell(k)$, où $Pl_\ell(k)$ sont les places de k divisant ℓ, seules places pouvant être sauvagement ramifiées. On peut ainsi appliquer le lemme 2.3, et obtenir :

$$\begin{aligned} g_L^* \leq & [L : k](g_k^* + \frac{1}{2} \sum_{v \in T\cup I_1} \log \mathrm{N}v) \\ & + \frac{\delta_{\mathbb{Q}}}{2}[L : k] n_k(\#I_1 + \#T + \log_\ell h_k + \Phi_{\mathbb{R}}(k) + \Phi_{\mathbb{C}}(k)) \log \ell. \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} g_L^* \leq \bar{g}_L &:= a_T h_k \ell^{\Phi_{\mathbb{R}}(k)+\Phi_{\mathbb{C}}(k)+\#T+\#I} \\ & \times \left(g_k + \frac{1}{2}\vartheta(T \cup I) + \delta_{\mathbb{Q}} \frac{\log \ell}{2} n_k(\#I + \#T + \log_\ell h_k + \Phi_{\mathbb{R}}(k) + \Phi_{\mathbb{C}}(k)) \right). \end{aligned}$$

Estimation de Ns. Remarquons d'abord que les corps construits sont des extensions d'exposant ℓ de $k(\sqrt[\ell]{1})$, ainsi l'extension du corps des constantes est au plus de degré $\ell(\ell-1)$. La place s est choisie de façon à éviter $I \cup Pl_\ell(k)$. Dans le cas des corps de nombres, on peut prendre s tel que $\log \mathrm{N}s \ll \bar{g}_L$ (notons que I apparaît déjà dans $\bar{g}_L$). Sous *GRH*, on a peut choisir la place s telle que

$$(GRH) \quad \log \mathrm{N}s \leq 2 \max \left(A_4(\log(\#I+2) + \log\left([L:k] + \bar{g}_L\right)), \delta_{\mathbb{F}}\ell(\ell-1)\right)$$

d'après le théorème de densité de Cebotarev.

Evaluation de g_K. Le corps K est le compositum de K_1 et K_2. Ces deux extensions sont linéairement indépendantes, puisque K_2 est totalement ramifiée en s, et K_1 est non ramifiée (de sorte que K/K_2 est non ramifiée). Puisque K/k est modérément ramifiée, on en déduit, dans le cas des corps de nombres, que :

$$\begin{aligned} g_K^* &= [K_1:k] g_{K_2}^* \\ &\leq [K_1:k][K_2:k] g_k^* + \frac{1}{2}[K_1:k][K_2:k](1-1/\ell)\log \mathrm{N}s \\ &\leq a_T h_k \ell (g_k^* + a\bar{g}_L) \\ &\ll a_T h_k \ell \bar{g}_L, \end{aligned}$$

où a est une constante effective.

Ainsi, g_K peut être borné par une fonction explicite de ℓ, $\#I$, $\#T$, n_k et g_k, par la formule :

$$\begin{aligned} g_K^* \ll\; & a_T^2 \bar{h}_k^2 \ell^{\Phi_{\mathbb{R}}(k)+\Phi_{\mathbb{C}}(k)+1+\#T+\#I} \\ & \times \left(g_k^* + \frac{1}{2}\vartheta(T\cup I) + \delta_{\mathbb{Q}} \frac{\log \ell}{2} n_k (\#I + \#T + \log_\ell \bar{h}_k + \Phi_{\mathbb{R}}(k) + \Phi_{\mathbb{C}}(k)) \right), \end{aligned}$$

ceci terminant la preuve du résultat pour les corps de nombres. Toutefois ces majorations sont très mauvaises lorsqu'il s'agit de répéter cette construction et de déterminer le genre du corps ainsi obtenu. Pour ne pas écoeurer le lecteur, nous donnerons plutôt des résultats supposant l'hypothèse de Riemann généralisée. Les résultats suivants sont, dans le cas des corps de nombres, conditionnels à l'hypothèse de Riemann généralisée.

$$\begin{aligned} (GRH) \quad \frac{g_K^*}{n_K} &= \frac{[K_1:k]}{n_K} g_{K_2}^* \\ &\leq \frac{1}{n_k}\left(g_k^* + \frac{1}{2}(1-1/\ell)\log \mathrm{N}s \right) \\ &\leq \frac{1}{n_k}\left\{ g_k^* + max\left(A_4(\log(\#I+2) + \log\left([L:k]+\bar{g}_L\right)), \delta_{\mathbb{F}}\ell(\ell-1)\right) \right\}. \end{aligned}$$

De plus on a $\log h_k \ll g_k$ et $\log a_T \ll \vartheta'(T)$. En remplaçant de même g_L par un majorant, on obtient alors :

$$(GRH) \quad \frac{g_K}{n_K} \leq A_7 \frac{g_k}{n_k} + A_8 \left\{ \frac{\log \ell}{n_k}(\#I + \#T + \delta_{\mathbb{Q}} n_k) + \frac{\vartheta'(T \cup I)}{n_k} \right\} + \delta_{\mathbb{F}} \frac{\ell^2}{n_k}, \tag{1}$$

où A_7 et A_8 sont des constantes effectives. Notons que cette expression est obtenue en prenant la somme plutôt que le maximum dans l'estimation du genre. □

Remarquons enfin que la faiblesse de la majoration (1) provient de l'estimation du degré de L qui introduit de nouveaux termes en g_k/n_k par le biais de $\log h_k$.

b. Cas $\ell = p$. Nous allons utiliser un argument présent en [15, 9.2.5]. Dans le cas d'un corps de fonctions en caractéristique $p = \ell$, le théorème d'approximation forte prouve que l'application $\mathcal{O}_{k,T\cup I\cup\{\mathfrak{q}\}} \to \oplus_{\mathfrak{p}\in T\cup I} k_{\mathfrak{p}}/\wp(k_{\mathfrak{p}})$ est surjective, pour toute place $\mathfrak{q}$ non contenue dans $T \cup I$, avec $\wp(x) = x^p - x$. En effet, rappelons que si l'on se donne, pour chaque $\mathfrak{p}$ d'un ensemble fini S de places d'un corps de fonctions K, des éléments $a_{\mathfrak{p}} \in K_{\mathfrak{p}}$ et des entiers $n_{\mathfrak{p}} > 0$, ainsi qu'une autre place arbitraire $\mathfrak{q} \notin S$, il existe un élément a de K tel que :

- $ord_{\mathfrak{p}}(a - a_{\mathfrak{p}}) \geq n_{\mathfrak{p}}$ pour tout $\mathfrak{p} \in S$,
- $ord_v(a) \geq 0$ pour $v \notin S \cup \{\mathfrak{q}\}$,
- $ord_{\mathfrak{q}}(a) \geq -(\deg \mathfrak{q})^{-1}(2g_K - 1 + \sum_{\mathfrak{p}\in S} n_{\mathfrak{p}} \deg \mathfrak{p}) - 1$

(voir [17, 6.13] pour ce résultat). Il n'est pas difficile de voir que l'uniformisante $\pi_{\mathfrak{p}} \in \wp(k_{\mathfrak{p}})$, ce qui prouve la surjectivité (prendre $n_{\mathfrak{p}} = 1$).

Soit alors $u \in \mathcal{O}_{k,T\cup I\cup\{\mathfrak{q}\}}$ telle que $u \in \wp(k_{\mathfrak{p}})$ pour tout $\mathfrak{p} \in T$ et telle que u soit une constante non contenue dans $\wp(k_{\mathfrak{p}})$ pour $\mathfrak{p} \in I$. Le théorème d'approximation forte nous assure qu'on peut choisir u tel que

$$ord_{\mathfrak{q}}(u) \deg \mathfrak{q} \geq -(2g_k - 1 + \vartheta(T \cup I) + \deg \mathfrak{q}).$$

Alors, si on considère l'extension d'Artin-Schreier $k(y)$ engendrée par une racine de y de $X^p - X - u$, on obtient une extension cyclique de degré p, où les places de T sont totalement décomposées, et les places de I sont inertes. De plus elle est non ramifiée hors de $T \cup I \cup \{\mathfrak{q}\}$, c'est à dire qu'elle est non ramifiée hors de $\mathfrak{q}$.

D'après un calcul classique de genre dans les extensions d'Artin-Schreier (voir [23, III.7.8]), on a :

$$g_{k(y)} \leq p\, g_k + \frac{p-1}{2}\left(-2 + 2\, g_k - 1 + \vartheta(T \cup I) + 2 \deg \mathfrak{q}\right).$$

Enfin, puisque le nombre $\Phi(d)$ de places de degré d de k est minoré par $\Phi(d) > r^d/d - (7\, g_k + 2) r^{\frac{d}{2}}/d$, on peut prendre

$$\deg(\mathfrak{q}) \leq 2 \log \left(2 + 7\, g_k + \frac{3}{2\sqrt{2}} |T \cup I| \right) + 1.$$

On en déduit donc, en posant $K = k(y)$, que :

$$g_K \leq (2p-1)g_k + \frac{p-1}{2}\vartheta(T \cup I) + 2(p-1)\log\left(2 + 7\,g_k + \frac{3}{2\sqrt{2}}|T \cup I|\right),$$

et finalement que le genre normalisé vérifie :

$$\frac{g_K}{n_K} \leq 2\frac{g_k}{n_k} + \frac{\vartheta(T \cup I)}{2n_k} + \frac{2}{n_k}\log\left(2 + 7\,g_k + \frac{3}{2\sqrt{2}}|T \cup I|\right).$$

On voit alors que le genre normalisé obtenu est en $g_k/n_k + \vartheta(T \cup I)/n_k$, estimation différant de (1) par un terme en $\vartheta(T \cup I)$ plutôt qu'en $|T \cup I|$. Afin de ne pas surcharger l'exposition, nous nous placerons par la suite dans le cas où $\ell \neq p$ pour les estimations que l'on donnera, bien que cette majoration montre que les résultats restent bons et exploitables même dans le cas sauvage, du fait du caractère effectif du théorème d'approximation forte.

3.2. **Construction d'un corps ayant des places de normes données.** Ce paragraphe reprend une construction antérieure de l'auteur (voir [13]). Nous allons construire un corps global ayant certains $\Phi_{\mathfrak{p},q} > 0$. Nous estimerons alors son genre. Cette construction pourrait être effectuée à partir de n'importe quel corps global k, toutefois nous nous contenterons du cas où l'on construit une extension de $\mathcal{Q}$, puisque c'est cela qui nous intéresse en pratique.

Proposition 3.4. *Soient $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ des places finies de $\mathcal{Q}$ et P leur ensemble. Soient $d_{i,1}, \ldots, d_{i,n_i}$ des entiers positifs pour tout $1 \leq i \leq k$. Alors il existe une fonction f de P et $N = \mathrm{ppcm}(n_i)_i \mathrm{ppcm}(d_{i,j})_{i,j}$ et une extension finie $L/\mathcal{Q}$ telles que :*

- *(i) Le corps L est totalement réel dans le cas des corps de nombres, admet $\mathbb{F}_r$ comme corps des constantes dans celui des corps de fonctions.*
- *(ii)* $\Phi_{\mathfrak{p}_i, \mathrm{N}\mathfrak{p}_i^{d_{i,j}}}(L) = \frac{n_L}{n_i\, d_{i,j}}$.
- *(iii) Pour tout $\mathfrak{p} \in P_L$ au dessus d'un des $\mathfrak{p}_i$, il existe j tel que* $\mathrm{N}\mathfrak{p} = \mathrm{N}\mathfrak{p}_i^{d_{i,j}}$.
- *(iv)* $g_L/n_L \leq f(P, N)$.
- *(v) Sous l'hypothèse de Riemann généralisée et lorsque N est premier avec r, la fonction f peut être choisie telle que :*

$$\textit{(GRH)} \quad f(P,N) \ll A_7^{\Omega(N)}\left\{(1 + |P|)\log N + \vartheta'(P) + \delta_{\mathbb{F}} N^2\right\}.$$

Nous allons donner la preuve de cette proposition en supposant *GRH* et sous l'hypothèse que r est premier à N pour ce qui concerne les majorations effectives. L'assertion *(iv)* s'obtient en toute généralité de la même façon à partir de la proposition 3.1. Notons que la majoration en $f(P,N)$ que l'on obtient sans *GRH* est beaucoup plus faible et celle obtenue lorsque r n'est pas premier à N introduit un terme en $\vartheta(P)$.

Preuve: Dans le cas des corps de fonctions, supposons que r est premier à N. De plus, on va ajouter à P une place dont le degré est premier à N pour s'assurer qu'il n'y a pas d'extension des constantes. Pour cela, il suffit de prendre une place $\mathfrak{q}$ de degré premier s ne divisant pas N. D'après le théorème des nombres premiers, on peut prendre $s \ll \log N$ (d'après [5], on a $\omega(N) \ll \frac{\ln N}{\ln \ln N}$, où $\omega(N)$ est le nombre de facteurs premiers de la décomposition de N comptés sans multiplicité). Dans le cas des corps de nombres, tout cela n'est pas nécessaire, on s'assurera grâce à la proposition 3.1 de la décomposition des places réelles. On notera $P' = P \cup \{\mathfrak{q}\}$ dans le cas des corps de fonctions, $P' = P$ pour les corps de nombres.

Soient $p_1 < \cdots < p_n$ les nombres premiers divisant l'un des $d_{i,j}$. Soit $N_1 = \mathrm{ppcm}(d_{i,j})_{i,j}$.

On commence alors par considérer une extension L_0 de degré $N_2 = \mathrm{ppcm}(n_i)$ telle que toutes les places de P' sont totalement décomposées. Pour cela, on applique $\Omega(N_1)$ fois la proposition 3.1. Dans L_0, on a ainsi N_2 places au-dessus de chaque $\mathfrak{p}_i \in P$. Pour chacune des places $\mathfrak{p}_i$ de P, on forme n_i ensembles $P_{\mathfrak{p}_i,1}, \ldots, P_{\mathfrak{p}_i,n_i}$ de N_2/n_i places chacun. Ils sont destinés à fournir des places de norme $\mathrm{N}\mathfrak{p}_i^{d_{i,j}}$ respectivement. Puis on construit par récurrence une tour de corps telle que, dans le cas des corps de fonctions, $\mathfrak{q}$ est totalement décomposée (on ne le rappellera pas).

Pour tout $s = 1 \ldots n$, on construit à partir de L_{s-1} la tour suivante.

(i) On pose $L_{s-1}^0 = L_{s-1}$.

(ii) Pour $t = 1 \ldots v_{p_s}(N_1)$, on choisit une extension abélienne $L_{s-1}^t / L_{s-1}^{t-1}$ d'exposant p_s ayant les propriétés suivantes :

- pour tous i, j, tels que $p_s^t | d_{i,j}$, les places au-dessus de $P_{\mathfrak{p}_i,j}$ sont non ramifiées et ont un degré d'inertie p_s,
- pour tous i, j tels que $p_s^t \nmid d_{i,j}$, elles sont totalement décomposées.

(iii) On pose $L_s = L_{s-1}^{v_{p_s}(N_1)}$.

Considérons alors $L = L_n$, et estimons son genre au moyen de (1). Renommons en $\{K_i\}$ la suite des corps qu'on a construits, T_i l'ensemble des places dont on impose la décomposition, I_i celui des places inertes. L'ensemble $T_i \cup I_i$ est l'ensemble des places au-dessus de P' dans K_i. Ainsi on a $\#I_i + \#T_i \leq n_{K_i}|P+1|$ à chaque corps intermédiaire K_i construit. De même on a $\log^+ \vartheta(T_i \cup I_i) = \log n_{K_i} + \vartheta'(P) + \delta_{\mathbb{F}} \ln \ln N$. On a alors d'après (1) :

$$(GRH) \quad \begin{aligned} \frac{g_{K_{i+1}}}{n_{K_{i+1}}} &\leq A_7 \frac{g_{K_i}}{n_{K_i}} + A_8 \left\{ \frac{\log \ell_i}{n_{K_i}} (\#I_i + \#T_i + \delta_{\mathbb{Q}} n_{K_i}) + \frac{\log^+ \vartheta(T_i \cup I_i)}{n_{K_i}} \right\} \\ &\quad + \delta_{\mathbb{F}} \frac{\ell_i^2}{n_{K_i}} \\ &\leq A_7 \frac{g_{K_i}^*}{n_{K_i}} + A_8 \left\{ (1 + |P|) \log \ell_i + 1 + \frac{\vartheta'(P) + \ln \ln N}{n_{K_i}} \right\} + \delta_{\mathbb{F}} \frac{\ell_i^2}{n_{K_i}}, \end{aligned}$$

où ℓ_i est le nombre premier correspondant à l'extension K_{i+1}/K_i et dépend donc de i. On obtient alors par récurrence immédiate la majoration, si $N = \prod_{i=1 \ldots m} \ell_i$, où ℓ_i sont les nombres premiers divisant N :

$$\text{(GRH)} \quad \frac{g_L}{n_L} \ll A_7^{\Omega(N)} \left\{ (1+|P|)\log N + \vartheta'(P) + \delta_{\mathbb{F}} \sum_{i=1}^{m} \frac{\ell_i^2}{\prod_{k<i} \ell_k} \right\}.$$

$$\text{(GRH)} \quad \frac{g_L}{n_L} \ll A_7^{\Omega(N)} \left\{ (1+|P|)\log N + \vartheta'(P) + \delta_{\mathbb{F}} N^2 \right\},$$

cette dernière inégalité étant réalisée dans le cas le plus mauvais où N est un nombre premier. Comme $\Omega(N) \leq N/\log 2$, cette inégalité peut encore s'écrire :

$$\text{(GRH)} \quad \frac{g_L}{n_L} \ll N^{\frac{A_7}{\log 2}} \left\{ (1+|P|)\log N + \vartheta'(P) + \delta_{\mathbb{F}} N^2 \right\}.$$

□

On a ainsi achevé la première partie de la construction, c'est à dire qu'on obtient un corps global L dont on sait estimer le genre ayant des $\Phi_{\mathfrak{p},\mathrm{N}\mathfrak{p}^m} > 0$ prescrits. Remarquons toutefois que nous avons invoqué un théorème de Gras valable dans le cas d'extensions de degré ℓ. Celui-ci admet une généralisation au degré ℓ^i que nous n'avons pas utilisée. Cependant, vu que les majorations les plus coûteuses concernent le nombre de classes, et qu'on se sert de majorations grossières du type $\ell^{d_\ell Cl^T} \leq h_k$, elle pourrait peut-être permettre d'améliorer significativement l'estimation du genre (en obtenant une puissance de N inférieure à celle obtenue ici).

4. Construction d'un corps global infini dont le support est contrôlé

4.1. **Résultats quantitatifs relatifs à la propriété** $K(\pi,1)$ **(voir** [18]**).** Le but de cette section est de donner une version quantitative de résultats de ce type :

Théorème 4.1 (Schmidt, voir [18])**.** *Soient T et S deux ensembles finis disjoints de places finies d'un corps global k, tel que T soit non vide dans le cas des corps de fonctions. Soit ℓ un nombre premier impair différent de car(k). Alors il existe un ensemble fini de places finies S_0 ne contenant pas de places divisant ℓ tel que $(X_k - (S \cup S_0), T)$ a la propriété $K(\pi,1)$ pour ℓ. En particulier, $cd\, G(k^T_{S\cup S_0}|k)(\ell) = 2$ et pour toute place $\mathfrak{p} \in S \cup S_0$, $k^T_{S\cup S_0}(\ell)_{\mathfrak{p}} = k_{\mathfrak{p}}(\ell)$, c'est à dire que l'extension $k^T_{S\cup S_0}(\ell)$ réalise la ℓ-extension maximale $k_{\mathfrak{p}}(\ell)$ de $k_{\mathfrak{p}}$.*

Nous allons reprendre les grandes lignes de la preuve afin d'obtenir une précision sur la taille des places de S_0, et ainsi nous pourrons obtenir des informations sur les invariants de ce corps. A présent ℓ désignera un entier impair premier à la caractéristique de k.

Nous renvoyons le lecteur à l'article de Schmidt [18] pour la notion de courbe marquée, de son site étale, ainsi que pour la définition et les résultats relatifs à la propriété $K(\pi,1)$.

4.1.1. *Préparatifs.* La première chose à faire est d'annuler le ℓ-groupe des T-classes d'idéaux de k.

Lemme 4.2. *Soit k un corps global et T un ensemble non vide de places finies, telles que* $\mathrm{pgcd}(\ell, \deg \mathfrak{t},\ \mathfrak{t} \in T) = 1$ *dans le cas des corps de fonctions. Il existe T_0 tel que ${}_\ell Cl^{T\cup T_0} = 0$. De plus, on peut prendre $|T_0| = dim_\ell Cl^T \leq A_6\, g_k$ et*

$$\vartheta(T_0) \leq A_9 g_k^2,$$

où A_9 est une constante effective.

Preuve: Supposons que $g_k \geq 1$, le cas $g_k = 0$ étant clair. On procède par récurrence. On prend d'abord une place $\mathfrak{t}$ de k telle que $\mathfrak{t}$ n'est pas totalement décomposée dans $K = k^{T,el}(\ell)$. D'après le théorème de densité de Cebotarev, on peut prendre une telle place $\mathfrak{t}$ telle que $\log \mathrm{N}\mathfrak{t} \ll \log([K:k] + g_K)$. On recommence en remplaçant T par $T \cup \{\mathfrak{t}\}$ et le lemme s'ensuit, en utilisant la majoration (utilisée précédemment) $dim_\ell Cl^T \leq A_6 g_k$ puisque $\ell \geq 3$ (induisant $\log g_K \ll g_k$). □

Nous aurons également besoin d'annuler les groupes de Kummer V_Q^P :

Lemme 4.3. *Soit k un corps global. Soit P un ensemble fini de places finies de k. Alors il existe un ensemble fini de places finies Q disjoint de P, dont les places vérifient* $\mathrm{N}\mathfrak{q} = 1 \bmod \ell$ *pour tout $\mathfrak{q} \in Q$, et*

$$V^P_{Q-\{\mathfrak{q}\}}(k) = 0 \quad \forall \mathfrak{q} \in Q.$$

De plus on peut prendre Q tel que : $|Q| \leq 2(A_6 g_k + \Phi_{\mathbb{R}}(k) + \Phi_{\mathbb{C}}(k) + |P| - 1 + \delta_\ell)$ et

$$\vartheta(Q) \leq A_{10}|Q| \left(\log^+ |P| + \log \ell + \log\{g_k + \delta_{\mathbb{Q}} n_k \log \ell + \vartheta(P)\} + \delta_P\, \ell\right),$$

où A_{10} est effective.

Preuve: Puisque

$$V_Q^P = \ker \left\{ V_\emptyset^P \to \prod_{\mathfrak{q}\in Q} k_\mathfrak{q}^\times / k_\mathfrak{q}^{\times \ell} \right\},$$

il s'agit de trouver deux places $\mathfrak{q}_\alpha$ telles que $\alpha \notin k_{\mathfrak{q}_\alpha}^{\times\ell}$ pour tout α dans une base de $V_\emptyset^P$. D'après la théorie de Kummer, les restrictions des places de $k(\mu_\ell)$ qui ne sont pas totalement décomposées dans $k_\alpha = k(\mu_\ell, \sqrt[\ell]{\alpha})|k(\mu_\ell)$ conviennent. Comme il faut que deux telles places ne définissent pas la même place dans k par restriction, on prend la seconde non conjuguée à la première par $Gal(k(\mu_\ell)|k)$. Il faut enfin les prendre hors de P ce qui aura pour effet d'augmenter considérablement la borne.

Pour tout $\alpha \in V_\emptyset^P$, $k_\alpha|k$ est par la théorie de Kummer non ramifiée hors de $P \cup \{\ell\}$, et de degré divisant $\ell(\ell-1)^{1-\delta_\ell}$. Le genre de k_α est alors majoré par (de même que précédemment) :

$$g(k_\alpha) \leq \ell(\ell-1)^{1-\delta(k)}(g_k + \delta_{\mathbb{Q}} n_k \log \ell + \vartheta(P)).$$

Appliquant deux fois le théorème de densité de Cebotarev en excluant les places de P d'abord, puis P et les conjugués de la place produite ensuite, on obtient deux places non conjuguées $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ telles que $\alpha \notin k_{\mathfrak{q}_i}^{\times \ell}$ pour $i = 1, 2$, où $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{Q}_i \cap k$. De plus

$$\sum_{i=1,2} \log \mathrm{N}\mathfrak{Q}_i \ll \log |P| + \log \ell + \log\{g_k + \delta_{\mathbb{Q}} n_k \log \ell + \vartheta(P)\} + \delta_P \, \ell.$$

Notons qu'ici l'extension des constantes est au plus de degré ℓ et, lorsque ${}_\ell Cl^P$ est trivial, il n'y en a pas, puisque $k_\alpha | k(\mu_\ell)$ est totalement ramifiée en une place de P au moins. On ajoute ainsi au plus $2 \dim_\ell V_\emptyset^P(k)$ places. Comme $\dim_\ell V_\emptyset^P(k) \leq d_\ell(Cl^P) + \Phi_{\mathbb{R}}(k) + \Phi_{\mathbb{C}}(k) + |P| - 1 + \delta_\ell$ d'après les formules de Shafarevich, on obtient bien

$$\vartheta(Q) \ll |Q| \left(\log^+ |P| + \log \ell + \log\{g_k + \delta_{\mathbb{Q}} n_k \log \ell + \vartheta(P)\} + \delta_P \, \ell\right).$$

$\square$

4.1.2. *A travers la preuve de 4.1.* Ajoutons à présent une estimation quantitative au théorème suivant de Schmidt :

Théorème 4.4 (Schmidt)**.** *Soit T un ensemble fini de places d'un corps global k, non vide dans le cas des corps de fonctions. Soit $\ell \neq 2$, $\ell \neq car(k)$. Alors il existe un ensemble fini T_0 de places de k ainsi qu'un ensemble S non vide dont les places $\mathfrak{p}$ vérifient $\mathrm{N}\mathfrak{p} = 1 \mod \ell$ telles que*

(i) $S \cap (T \cup T_0) = \emptyset$.

(ii) $(X_k - S, T \cup T_0)$ *vérifie la propriété* $K(\pi, 1)$ *pour* ℓ.

(iii) Toute $\mathfrak{p} \in S$ *se ramifie dans* $k_S^{T \cup T_0}(\ell)$.

(iv) $V_S^{T \cup T_0} = 0$.

Proposition 4.5. *On peut prendre dans le théorème 4.4, lorsque $\delta = 0$, et $pgcd(\ell, a_T) = 1$,*

(i) $|T_0| \leq A_6 g_k$ *et* $\vartheta(T_0) \leq A_9 g_k^2$,

(ii) $|S_0| \leq 2(h_k + \Phi_{\mathbb{R}}(k) + \Phi_{\mathbb{C}}(k) + |T'| - 1 + \delta_k)$ *et*

$$\vartheta(S_0) \leq A_{10}(A_6 g_k + \Phi_{\mathbb{R}}(k) + \Phi_{\mathbb{C}}(k) + |T'| - 1 + \delta_k) \times \left(\log^+ |T \cup T_0| + \log \ell + \log\{g_k + \delta_{\mathbb{Q}} n_k \log \ell + \vartheta(T')\}\right),$$

(iii) $|S| \leq 2|S_0|$ *et*

$$\vartheta(S) \ll \vartheta(S_0) + |S_0|^2 \log \ell + |S_0| \left((h_k + |T'| + \Phi_{\mathbb{R}}(k) + \Phi_{\mathbb{C}}(k) - 1) \log \ell + \vartheta'(T' \cup S_0) + \log^+ g_k\right),$$

où $T' = T \cup T_0$ et S_0 est un sous-ensemble de S construit de sorte que

$$V_{S_0 - \{\mathfrak{q}\}}^{T \cup T_0}(k) = 0 \quad \forall \mathfrak{q} \in S_0.$$

Dans l'application que nous avons en tête, k sera égal à $\mathcal{Q}$, c'est pourquoi nous écrivons ce corollaire pour $\mathcal{Q}$.

Corollaire 4.6. *Si* $k = \mathcal{Q}$, $\delta = 0$, *et* $\mathrm{pgcd}(\ell, \deg \mathfrak{t}, \mathfrak{t} \in T) = 1$, *on peut prendre* T_0 *et* S *de sorte que :*

$$\begin{aligned} (\mathcal{Q}) \quad |T_0| &= \emptyset \\ |S| &\le 4|T| \\ \vartheta(S) &\le A_{11}\left(|T|\vartheta'(T) + |T|^2 \log \ell\right), \end{aligned}$$

pour une certaine constante effective A_{11}.

On peut obtenir par les mêmes estimations des résultats effectifs pour le cas $\delta = 1$, en regardant avec attention la preuve du théorème de Schmidt dans ce cas. Toutefois, on prend alors des places correspondant à chaque élément du groupe de Galois de k_T^{el}, c'est à dire que $|S|$ devient très grand, et il vaudra mieux jouer sur le nombre premier ℓ.

Preuve: Tous les arguments algébriques de cette preuve sont dus à Schmidt, nous n'y ajoutons que les estimations des normes des places des ensembles intervenant. On donne la preuve de la proposition et de son corollaire immédiat dans le même temps.

Suivant Schmidt [18], on choisit d'abord T_0 tel que $T \cup T_0$ tel que ${}_\ell Cl^{T \cup T_0} = 0$. C'est possible d'après le lemme 4.2. Prenons alors S_0 comme au lemme 4.3, de sorte que

$$V^{T \cup T_0}_{S_0 - \{\mathfrak{q}\}}(k) = 0 \quad \forall \mathfrak{q} \in S_0.$$

Posons $T' = T \cup T_0$. On a alors : $|T'| \le |T| + A_6 g_k$,

$$\vartheta(T') \le \vartheta(T) + A_9 g_k^2,$$

$|S_0| \le 2(h_k + \Phi_{\mathbb{R}}(k) + \Phi_{\mathbb{C}}(k) + |T'| - 1 + \delta_k)$, et

$$\begin{aligned} \vartheta(S_0) \le & A_{10}(A_6 g_k + \Phi_{\mathbb{R}}(k) + \Phi_{\mathbb{C}}(k) + |T'| - 1 + \delta_k) \\ & \times \left(\log^+ |T \cup T_0| + \log \ell + \log\{g_k + \delta_{\mathbb{Q}} n_k \log \ell + \vartheta(T')\}\right). \end{aligned}$$

Dans le cas où $k = \mathcal{Q}$, on a déjà ${}_\ell Cl^T = 0$, ainsi on prendra $T_0 = \emptyset$ dans ce cas. Alors $(\mathcal{Q}) \quad |S_0| \le 2|T|$, et

$$(\mathcal{Q}) \quad \vartheta(S_0) \le 2\, A_{10}|T| \left(\log^+ |T| + \log \ell + \log\{\log \ell + \vartheta(T)\}\right)$$

et donc

$$(\mathcal{Q}) \quad \vartheta(S_0) \ll |T| \left(\log^+ \vartheta(T) + \log \ell\right).$$

On écrit $S_0 = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m\}$. Du fait de ${}_\ell Cl^{T'} = 0$, l'application $(\mathrm{v}_\mathfrak{p})_\mathfrak{p} : k^\times \to \bigoplus_{q \notin T'} \mathbb{Z}$ induit alors la suite exacte

$$0 \to E_{k,T'}/\ell \to k^\times / k^{\times \ell} \to \bigoplus_{q \notin T'} \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \to 0.$$

Pour une place $\mathfrak{p} \notin T'$, on peut alors considérer un élément $s_\mathfrak{p} \in k^\times / k^{\times \ell}$ défini par $\mathrm{v}_\mathfrak{p}(s_\mathfrak{p}) = 1 \mod \ell$ et $\mathrm{v}_\mathfrak{q}(s_\mathfrak{p}) = 0 \mod \ell$ pour tout $\mathfrak{q} \notin T' \cup \{\mathfrak{p}\}$. Il est défini à $E_{k,T'}/\ell$ près. Pour tout $i = 1 \ldots m$, on considère $s_{\mathfrak{p}_i}$ correspondant à $\mathfrak{p}_i$ et on le notera plus simplement s_i.

Rappelons de plus deux lemmes dus à Schmidt [18, 5.2 et 6.4] :

Lemme 4.7 (Schmidt)**.** *Soit T un ensemble fini de places de k, non vide dans le cas des corps de fonctions, tel que ${}_\ell Cl^T(k)=0$. Soit $\mathfrak{q}\notin T\cup P_\ell$ une place totalement décomposée dans $k(\sqrt[\ell]{E_{k,T}})|k$. Alors l'extension $k^{T,el}_{\{\mathfrak{q}\}}|k$ est cyclique d'ordre ℓ et $\mathfrak{q}$ se ramifie dans cette extension. Enfin une place $\mathfrak{p}\notin T\cup\{\mathfrak{q}\}$ de norme $\mathrm{N}\mathfrak{p}=1 \mod \ell$ se décompose dans $k^{T,el}_{\{\mathfrak{q}\}}$ si et seulement si $\mathfrak{q}$ se décompose totalement dans $k(\sqrt[\ell]{E_{k,T}},\sqrt[\ell]{s_\mathfrak{q}})|k(\sqrt[\ell]{E_{k,T}})$.*

Lemme 4.8 (Schmidt)**.** *Si $\delta=0$ et $S=\{\mathfrak{p}_1,...,\mathfrak{p}_n\}$ est un ensemble fini de places finies avec $\mathrm{N}(\mathfrak{p}_i)=1 \mod \ell$. Posons $s_i=s_{\mathfrak{p}_i}$. Alors les extensions $k(\mu_\ell,\sqrt[\ell]{s_1},\dots,\sqrt[\ell]{s_n})$ et $k^{T,el}_S(\mu_\ell)$ sont linéairement disjointes sur $k(\mu_\ell)$.*

Remarquons également qu'aucune des extensions qu'on considère ici n'admet d'extension des constantes au dessus de $k(\mu_\ell)$, d'après les conditions sur les places de T, l'hypothèse $\delta_\ell=0$ et les propriétés des extensions de Kummer (chacune sera ramifiée ou T décomposée).

On va maintenant ajouter des places à S_0, choisies de la manière suivante. Soient $\mathfrak{P}_1,\dots,\mathfrak{P}_m$ des prolongements de $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_m$ à $k(\mu_\ell)$. On considère, pour une place $\mathfrak{Q}$ de $k(\mu_\ell)$, et $a\in\{1,\dots,m\}$ la propriété (B_a) :

(i) $\mathfrak{Q}\notin T'(k(\mu_\ell))$,

(ii) $Frob_\mathfrak{Q}\notin\mathcal{I}_{\mathfrak{P}_a}\subset G(k^{T',el}_{S_0}(\mu_\ell)|k(\mu_\ell))$,

(iii) Pour tout $b\neq a$, $\mathfrak{Q}$ se décompose dans $k(\mu_\ell,\sqrt[\ell]{s_b})|k(\mu_\ell)$,

(iv) $\mathfrak{Q}$ est inerte dans $k(\mu_\ell,\sqrt[\ell]{s_a})|k(\mu_\ell)$,

(v) $\mathfrak{Q}$ est totalement décomposée dans $k(\sqrt[\ell]{E_{k,T'}})|k(\mu_\ell)$.

Cette propriété est ainsi indépendante du choix des s_i. On construit $\mathfrak{Q}_1,...,\mathfrak{Q}_m$ de la façon suivante : on prend $\mathfrak{Q}_1\in P(k(\mu_\ell))$ vérifiant B_1. On pose $\mathfrak{q}_1=\mathfrak{Q}_1\cap k$. On voit alors que $k^{T',el}_{\mathfrak{q}_1}$ est cyclique d'ordre ℓ et ramifiée en $\mathfrak{q}_1$. On choisit alors par récurrence les places $\mathfrak{Q}_2,...,\mathfrak{Q}_m$ (et on pose $\mathfrak{q}_a=\mathfrak{Q}_a\cap k$) de sorte que

(i) $\mathfrak{Q}_a$ vérifie la propriété (B_a)

(ii) $\mathfrak{Q}_a$ est, pour $b<a$, décomposée dans $k^{T',el}_{\mathfrak{q}_1}(\mu_\ell)|k(\mu_\ell)$ et $k(\mu_\ell,\sqrt[\ell]{s_{\mathfrak{q}_b}})$.

Un tel choix est possible du fait du lemme 4.8. Estimons alors la taille des $\mathfrak{Q}_a$. Choisir une telle place revient à imposer des conditions sur son Frobenius dans le compositum des extensions linéairement indépendantes (d'après les lemmes 4.7 4.8) $k(\mu_\ell,\sqrt[\ell]{s_1},\dots,\sqrt[\ell]{s_n},\sqrt[\ell]{s_{\mathfrak{q}_1}},\dots,\sqrt[\ell]{s_{\mathfrak{q}_{a-1}}})$, $k(\sqrt[\ell]{E_{k,T'}})$, $k^{T',el}_{S_0}(\mu_\ell)$ et les $k^{T',el}_{\{q_1\}},\dots,k^{T',el}_{\{q_{a-1}\}}$. Estimons alors le genre de ce compositum L_a. Comme toutes les extensions (à partir de $k(\mu_\ell)$) sont des ℓ-extensions, on calculera plutôt le logarithme en base ℓ des degrés (nommé ℓ-degré). Si K/k est une ℓ-extension, on posera $[K:k]_\ell=\log_\ell[K:k]$.

Commençons par calculer $[k^{T',el}_{S_0}(\mu_\ell):k(\mu_\ell)]_\ell$. Comme $V^{T'}_{S_0}=0$, on a

$$h^1(k^{T'}_S(\ell))=1+|S_0|-\Phi_\mathbb{R}(k)-\Phi_\mathbb{C}(k)-|T'|$$

(voir [15, 10.7.10]), et donc

$$[k_{S_0}^{T',el}(\mu_\ell) : k(\mu_\ell)]_\ell \leq 2h_k + |T'| + \Phi_{\mathbb{R}}(k) + \Phi_{\mathbb{C}}(k) - 1.$$

L'extension $k(\sqrt[\ell]{E_{k,T'}})|k(\mu_\ell)$ étant de ℓ-degré $\dim E_{k,T'}/\ell = r - 1 + |T'|$, on en déduit que

$$[L_a : k]|(\ell-1)\ell^{[k_{S_0}^{T',el}:k]_\ell + [k(\sqrt[\ell]{E_{k,T'}}):k(\mu_\ell)]_\ell + |S_0| + 2(a-1)}.$$

D'après la théorie de Kummer, l'extension L_a est non ramifiée hors de $R = S_0 \cup T' \cup \{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{a-1}\} \cup \{\ell\}$. De plus, seules les places au-dessus de ℓ dans k peuvent être sauvagement ramifiées dans L_a/k, on obtient donc, d'après le lemme 2.3 :

$$g_{L_a}^* \leq [L_a : k]\left(g_k^* + \frac{1}{2}\sum_{v\in R}\log \mathrm{N}v + \frac{\delta_{\mathbb{Q}} n_k}{2}[L_a : k(\mu_\ell)]_\ell \log \ell\right) := \bar{g}_{L_a}$$

D'après le théorème de densité de Cebotarev, on peut trouver $\mathfrak{Q}_a$ comme on le demande, avec en plus $\log \mathrm{N}\mathfrak{Q}_a \ll \log^+|T'| + \log(n_{L_a}\bar{g}_{L_a})$. On a alors

$$\begin{aligned}\log \mathrm{N}\mathfrak{Q}_a \ll{}& \log^+|T'| + ([k_{S_0}^{T',el}(\mu_\ell) : k(\mu_\ell)]_\ell + [k(\sqrt[\ell]{E_{k,T'}}) : k(\mu_\ell)]_\ell \\ &+ |S_0| + 2(a-1) + 1)\log \ell + \log\Bigg\{g_k^* + \frac{1}{2}(\vartheta(T'\cup S_0) + \log \ell + \sum_{i<a}\log \mathrm{N}\mathfrak{Q}_a \\ &+ \delta_{\mathbb{Q}} n_k\left([k_{S_0}^{T',el}(\mu_\ell) : k(\mu_\ell)]_\ell + [k(\sqrt[\ell]{E_{k,T'}}) : k(\mu_\ell)]_\ell + |S_0| + 2(a-1)\right)\log \ell\Bigg\} \\ \ll{}& \log^+|T'| + (h_k + |T'| + \Phi_{\mathbb{R}}(k) + \Phi_{\mathbb{C}}(k) - 1 + |S_0| + (a-1))\log \ell \\ &+ \vartheta'(T'\cup S_0) + \log^+ g_k + \log\sum_{i<a}\log \mathrm{N}\mathfrak{Q}_a.\end{aligned}$$

Posons $A = \log^+|T'| + (h_k + |T'| + \Phi_{\mathbb{R}}(k) + \Phi_{\mathbb{C}}(k) - 1 + |S_0|)\log \ell + \vartheta'(T'\cup S_0) + \log^+ g_k$, et $X_0 = 0$, $X_k = \sum_{i\leq k}\log \mathrm{N}\mathfrak{Q}_k$ pour $k \geq 1$. On voit que $A \geq 2\log 3$. On a alors, pour $k \geq 1$, $X_k \ll Ak + k^2\log \ell + k\log X_{k-1}$. On voit finalement que pour tout $k \geq 1$, $X_k \ll Ak + k^2\log \ell$.

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned}X_m \ll{}& \big(\log^+|T'| + (h_k + |T'| + \Phi_{\mathbb{R}}(k) + \Phi_{\mathbb{C}}(k))\log \ell + \vartheta'(T'\cup S_0) + \log^+ g_k\big)|S_0| \\ &+ |S_0|^2\log \ell.\end{aligned}$$

On pose alors $S = S_0 \cup \{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_m\}$. On obtient que $|S| = 2|S_0|$ et $\vartheta(S) \leq \vartheta(S_0) + X_m$. Cela conclut alors la preuve de la proposition.

Dans le cas de $\mathcal{Q}$, on a alors :

$$(\mathcal{Q}) \quad |S| \leq 4|T|,$$

et

$$(\mathcal{Q})\quad \vartheta(S) \ll |T|\left(\vartheta'(T)+\log\ell\right)+2|T|\left(\log^{+}|T|+|T|\log\ell+\vartheta'(T)+\vartheta'(S_0)\right)$$
$$+\,4|T|^2\log\ell$$
$$\ll |T|\vartheta'(T)+|T|^2\log\ell.$$

On peut alors montrer que cet ensemble S convient (voir la preuve du théorème [18, 6.1]). □

4.1.3. *Version quantitative du théorème 4.1.*

Proposition 4.9. *Dans le cas de* $\mathcal{Q}$ *et lorsque* $\delta = 0$, *on peut prendre dans le théorème 4.1*

$$(\mathcal{Q})\quad S_0 \leq 4|S\cup T|$$
$$\vartheta(S_0) \leq A_{11}\left(|T\cup S|\vartheta'(T\cup S)+|T\cup S|^2\log\ell\right)$$

Preuve: En effet, d'après [18, 7.1], il suffit de trouver S_0 telle que $(X-S_0, S\cup T)$ ait la propriété $K(\pi,1)$ pour ℓ. On obtient donc toutes les informations voulues de celles du paragraphe précédent, avec T remplacé par $T\cup S$. □

4.2. **Preuve de la proposition A.** Avant de tirer de ces résultats des informations sur les invariants de corps globaux infinis, commençons par démontrer la proposition A.

Les hypothèses faites sur T dans le cas des corps de fonctions nous assurent que T est non vide et que le corps des constantes de $\mathbb{F}_r(t)_S^T(\ell)$ est $\mathbb{F}_r$. La ℓ-dimension cohomologique de $Gal(\mathcal{Q}_S^T(\ell)/\mathcal{Q})$ est finie donc ce groupe n'a pas de torsion, et donc pas d'invariants non nuls hormis ceux de degré 1 (correspondant à $m = 1$). De plus, l'extension étant galoisienne, modérément ramifiée et non ramifiée hors d'un ensemble fini de places, $\mathfrak{p}$ est totalement décomposé si et seulement si $\phi_{\mathfrak{p},\mathrm{N}\mathfrak{p}} > 0$ et dans ce cas il vaut $\phi_{\mathfrak{p},\mathrm{N}\mathfrak{p}} = n_\infty > 0$.

Enfin l'estimation concernant n_∞ provient de la majoration suivante, valable pour toute extension galoisienne. Soit $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une tour représentant $\mathcal{K} = \mathcal{Q}_S^T(\ell)$. Puisque $\mathcal{Q}_S^T(\ell)$ réalise l'extension maximale locale en les places de S ($\mathrm{N}\mathfrak{p} = 1 \bmod \ell$), l'indice de ramification de $\mathfrak{p}\in S$ dans K_i vérifie $e_{\mathfrak{p}}(K_i)\to+\infty$.

On a donc, pour i suffisamment grand pour que toutes les places de S soient ramifiées dans $K_i/\mathcal{Q}$,

$$g^*_{K_i} = g^*_{\mathcal{Q}} n_{K_i} + \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{p}\in S}(e_{\mathfrak{p}}(K_i)-1)g_{\mathfrak{p}}(K_i)f_{\mathfrak{p}}(K_i)\log\mathrm{N}\mathfrak{p},$$

où $g_{\mathfrak{p}}(K_i)$ est le nombre de places de K_i au dessus de $\mathfrak{p}$ et $f_{\mathfrak{p}}(K_i)$ son degré d'inertie. Ainsi

$$\frac{g^*_{K_i}}{n_{K_i}} = g^*_{\mathcal{Q}} + \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{p}\in S}\left(1-\frac{1}{e_{\mathfrak{p}}(K_i)}\right)\log\mathrm{N}\mathfrak{p}$$

et donc

$$n_\infty = \frac{2}{\vartheta(S)-2\delta_{\mathbb{F}}}.$$

Dans le cas des corps de nombres, ℓ est impair et le corps est totalement réel, d'où $\phi_{\mathbb{R}} = n_\infty$.

4.3. **Application aux corps globaux infinis.** Le théorème suivant se déduit des résultats quantitatifs concernant la propriété $K(\pi, 1)$ et de la proposition A.

Théorème 4.10. *Soit T et I deux ensembles finis disjoints de places finies de $\mathcal{Q}$. Soit ℓ un nombre premier impair ne divisant ni $r-1$ ni a_T dans le cas des corps de fonctions. Alors il existe un ensemble fini S de places de $\mathcal{Q}$ de norme congrue à $1 \mod \ell$ tel que $\mathcal{Q}_S^T(\ell)$ a les propriétés suivantes :*

(i) Pour tout $\mathfrak{p} \in Pl_f(\mathcal{Q})$, $\phi_{\mathfrak{p},\mathrm{N}\mathfrak{p}^m} = 0$ si $m \geq 2$,

(ii) Pour tout $\mathfrak{p} \in T$, $\phi_{\mathfrak{p},\mathrm{N}\mathfrak{p}} = n_\infty > 0$,

(iii) Pour tout $\mathfrak{p} \in I \cup S$, $\phi_{\mathfrak{p},\mathrm{N}\mathfrak{p}} = 0$.

(iv) On a :

$$n_\infty = \frac{2}{\vartheta(S) - 2\delta_{\mathbb{F}}}$$

et $\phi_{\mathbb{R}} = n_\infty$ dans le cas des corps de nombres.

(v) On peut prendre S tel que $|S| \leq 4|T+1| + 1$ et

$$\vartheta(S) \ll |T|(\vartheta'(T) + \log^+|I| + \log^+\vartheta'(I)) + \vartheta'(I) + (|T|^2 + |I| + 1)\log \ell.$$

Preuve: On va prendre S tel que $(X_{\mathcal{Q}} - S, T)$ a la propriété $K(\pi, 1)$ pour ℓ. Estimons alors S. Soit $s \notin T \cup I$ une place telle qu'il existe une extension galoisienne de $\mathcal{Q}$ d'exposant ℓ, non ramifiée hors de $\{s\}$ où toutes les places de I ont degré d'inertie ℓ, et où les places de T sont totalement décomposées. Une telle extension existe d'après le théorème de Grunwald-Wang, et on peut prendre s telle que $\log \mathrm{N}s \ll \log \bar{g}_L$ (avec les notations de la section 3.1) où

$$\bar{g}_L = (\ell - 1)\ell^{\#T + \#I}\left(\frac{1}{2}\vartheta(T \cup I) + \delta_{\mathbb{Q}}\frac{\log \ell}{2}(\#I + \#T + 1)\right).$$

On a alors :

$$\log \mathrm{N}s \ll (1 + |T \cup I|)\log \ell + \vartheta'(T \cup I).$$

On considère alors S_0 tel que $cd_\ell Gal(\mathcal{K}/\mathcal{Q}) = 2$ avec $\mathcal{K} = \mathcal{Q}^T_{S_0 \cup \{s\}}(\ell)$. D'après la proposition 4.9, on peut prendre S_0 tel que : $|S_0| \leq 4(|T| + 1)$ et

$$\vartheta(S_0) \ll |T+1|(\vartheta'(T) + \log\log \mathrm{N}s) + (|T| + 1)^2 \log \ell.$$

On en déduit que

$$\vartheta(S_0) \ll |T+1|(\vartheta'(T) + \log^+|I| + \log^+\vartheta'(I)) + |T+1|^2 \log \ell.$$

On pose $S = S_0 \cup \{s\}$, et on obtient le résultat escompté :

$$\vartheta(S) \ll |T+1|(\vartheta'(T) + \log^+|I| + \log^+\vartheta'(I)) + \vartheta'(I) + (|T|^2 + |I| + 1)\log \ell.$$

Les différents points du théorème se déduisent alors directement de la proposition A. $\square$

4.4. **Preuve de la proposition C.** Notons $\mathcal{K} = \mathcal{Q}_S^T(\ell)$. Prouvons le résultat dans le cas des corps de nombres et sous (GRH), les résultats sans cette hypothèse et pour les corps de fonctions se déduisant immédiatement en utilisant l'inégalité correspondante. On utilisera cependant les $\phi_{\mathfrak{p},q}$ plutôt que les ϕ_q, alourdissant ainsi les notations, de sorte que la preuve pour les corps de fonctions soit exactement la même. On a démontré précédemment que $2/(\vartheta(S)-2\delta_{\mathbb{F}}) \leq n_\infty(\mathcal{K})$. De plus, pour les places totalement décomposées, $\phi_{\mathfrak{p},\mathrm{N}\mathfrak{p}} = n_\infty$. Le corps $\mathcal{K}$ est totalement réel dans le cas des corps de nombres ; on a alors, d'après les inégalités fondamentales de Tsfasman-Vlăduţ,

$$\sum_{\mathfrak{p}\in D} \frac{\phi_{\mathfrak{p},\mathrm{N}\mathfrak{p}} \log \mathrm{N}\mathfrak{p}}{\sqrt{\mathrm{N}\mathfrak{p}}-1} \leq 1 - \delta_{\mathbb{Q}} \left(\log\sqrt{8\pi} + \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) n_\infty,$$

et donc

$$\sum_{\mathfrak{p}\in D} \frac{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}}{\sqrt{\mathrm{N}\mathfrak{p}}-1} \leq \frac{1}{n_\infty} - \delta_{\mathbb{Q}} \left(\log\sqrt{8\pi} + \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right),$$
$$\leq \frac{\vartheta(S)}{2} - \delta_{\mathbb{F}} - \delta_{\mathbb{Q}} \left(\log\sqrt{8\pi} + \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right).$$

5. Preuve du théorème B

On suppose encore ici GRH pour ce qui est des majorations. Soient $P = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ un ensemble de n places finies de $\mathcal{Q}$, $d_{i,1}, \ldots, d_{i,n_i}$ n_i entiers naturels donnés pour tout $i = 1 \ldots n$. Soit I un ensemble de places finies disjoint de P.

D'après la proposition 3.4, il existe une extension finie L de $\mathcal{Q}$ telle que :

(i) Le corps L est totalement réel (CN), admet $\mathbb{F}_r$ comme corps des constantes (CF).

(ii) $\Phi_{\mathfrak{p}_i,\mathrm{N}\mathfrak{p}^{d_{i,j}}}(L) = \frac{[L:\mathcal{Q}]}{n_i\, d_{i,j}}$.

(iii) Pour tout $\mathfrak{P} \in P_L$ au-dessus d'un des $\mathfrak{p}_i$, il existe j tel que $\mathrm{N}\mathfrak{p} = \mathrm{N}\mathfrak{p}_i^{d_{i,j}}$.

(iv) Il existe une fonction f de P et $N = \mathrm{ppcm}(n_i)_i \mathrm{ppcm}(d_{i,j})_{i,j}$ telle que

$$g_L/[L:\mathcal{Q}] \leq f(P,N).$$

De plus, sous l'hypothèse de Riemann généralisée et si r est premier avec N, $f(P,N)$ peut être choisie ainsi :

$$(GRH) \quad f(P,N) \ll A_7^{\Omega(N)} \left\{(1+|P|)\log N + \vartheta'(P) + \delta_{\mathbb{F}} N^2\right\}.$$

Choisissons ℓ à présent. Dans le cas des corps de nombres, on prend $\ell = 3$. Dans le cas des corps de fonctions, le choix doit être fait de sorte à proscrire les extensions des constantes. Il ne doit donc pas diviser $r-1$ ni $a_P = \mathrm{pgcd}(\deg\mathfrak{p},\ \mathfrak{p}\in P)$. On prend alors ℓ vérifiant $r + a_P \leq \ell \leq 2(r+a_P)$.

Il existe S tel que $\mathcal{K} = \mathcal{Q}_S^P(\ell)$ vérifie :

(i) pour tout $\mathfrak{p} \in Pl_f(\mathcal{Q})$, $\phi_{\mathfrak{p},\mathrm{N}\mathfrak{p}^m} = 0$ si $m \geq 2$,

(ii) pour tout $\mathfrak{p} \in P$, $\phi_{\mathfrak{p},\mathrm{N}\mathfrak{p}} = n_\infty > 0$,

(iii) pour tout $\mathfrak{p} \in I \cup S$, $\phi_{\mathfrak{p},\mathrm{N}\mathfrak{p}} = 0$,

(iv) on a :

$$n_\infty = \frac{2}{\vartheta(S) - 2\delta_{\mathbb{F}}}$$

et $\phi_{\mathbb{R}} = n_\infty$ dans le cas des corps de nombres.

(v) $|S| \leq 4|P| + 5$ et $\frac{1}{2}\vartheta(S) \leq g(P, I, \ell)$, avec

$$g(P, I, \ell) \ll |P|(\vartheta'(P) + \log^+ |I| + \log^+ \vartheta'(I)) + \vartheta'(I) + (|P|^2 + |I| + 1) \log \ell.$$

On considère alors le compositum $L\mathcal{K}$. L'extension $L\mathcal{K}/L$ est non ramifiée hors de S_L, modérément ramifiée. Ainsi $n_\infty(L\mathcal{K}) > 0$. De plus, toutes les places de P_L y sont totalement décomposées. Pour tout $\mathfrak{p} \in S \cup I$, on a bien $\phi_{\mathfrak{p},q}(L\mathcal{K}) = 0$ pour tout q, puisque

$$\sum_q \phi_{\mathfrak{p},q}(L\mathcal{K}) \log_{\mathrm{N}\mathfrak{p}} q \leq \sum_q \phi_{\mathfrak{p},q}(\mathcal{K}) \log_{\mathrm{N}\mathfrak{p}} q$$

(car $\mathcal{K} \subset L\mathcal{K}$).

On a, pour les places $\mathfrak{p}_i \in P$ et pour une tour (K_i) représentant $\mathcal{K}$,

$$\text{pour tout } j = 1 \ldots n_i, \quad \Phi_{\mathfrak{p}_i, \mathrm{N}\mathfrak{p}_i^{d_{i,j}}}(LK_i) = \frac{[LK_i : \mathcal{Q}]}{n_i\, d_{i,j}},$$

d'où l'on déduit que

$$\text{pour tout } j = 1 \ldots n_i, \quad \phi_{\mathfrak{p}_i, \mathrm{N}\mathfrak{p}^{d_{i,j}}}(L\mathcal{K}) = \frac{n_\infty(L.\mathcal{K})}{n_i\, d_{i,j}} > 0.$$

On voit alors que $\delta(L\mathcal{K}) \leq 1 - \varepsilon$, où

$$\varepsilon = n_\infty(L.\mathcal{K}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}_i}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\mathrm{N}\mathfrak{p}_i^{\frac{d_{i,j}}{2}} - 1} + \delta_{\mathbb{Q}} \left(\log 8\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2} \right).$$

Reste donc à minorer $n_\infty(L\mathcal{K})$, majorons alors le quotient g_{LK_i}/n_{LK_i}. LK_i/L étant modérément ramifiée, non ramifiée hors de S_L on a donc :

$$g^*_{LK_i} \leq [LK_i : K_i] g^*_L + \frac{1}{2}[LK_i : L] \sum_{\mathfrak{P} \in S_L} \log \mathrm{N}\mathfrak{P}.$$

Comme

$$\sum_{\mathfrak{P} \in S_L} \log \mathrm{N}\mathfrak{p} = \sum_{\mathfrak{p} \in S} \log \mathrm{N}\mathfrak{p} \sum_{\mathfrak{P} \in S_L} f_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \leq [L : \mathcal{Q}]\vartheta(S),$$

on obtient alors

$$\frac{g^*_{LK_i}}{[LK_i : \mathcal{Q}]} \leq \frac{g^*_L}{[L : \mathcal{Q}]} + \frac{1}{2}\vartheta(S).$$

On en déduit que $n_\infty \geq (g(P, I, \ell) + f(P, N))^{-1}$, ce qui termine la preuve.

6. Deux cas particuliers

On se propose à présent de donner les estimations dans les deux cas particuliers les plus significatifs.

6.1. **Cas particulier $N = 1$.** Dans ce dernier paragraphe, nous allons estimer le défaut qu'on obtient dans le cas particulier où on prend pour $T = \{2, 3, \ldots, p_n\}$ les n plus petits nombres premiers. On peut alors construire S tel que $Gal(\mathbb{Q}_S^T(3), \mathbb{Q})$ ait une dimension cohomologique 2 et vérifiant les conditions du théorème 4.10. Considérons alors le défaut δ de $\mathbb{Q}_S^T(3)$ sous GRH. Notons D l'ensemble des places de $\mathbb{Q}$ totalement décomposées dans $\mathbb{Q}_S^T(3)$. Comme seules les places totalement décomposées $\mathfrak{p}$ ont au moins un $\phi_{\mathfrak{p},q} > 0$, on a :

On a

$$\delta = 1 - \sum_{\mathfrak{p} \in D} \frac{\phi_{\mathfrak{p},\mathrm{N}\mathfrak{p}} \log \mathrm{N}\mathfrak{p}}{\sqrt{\mathrm{N}\mathfrak{p}} - 1} - (\log \sqrt{8\pi} + \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}) n_\infty,$$

et donc

$$\delta = 1 - n_\infty \left(\sum_{\mathfrak{p} \in D} \frac{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}}{\sqrt{\mathrm{N}\mathfrak{p}} - 1} + \log \sqrt{8\pi} + \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2} \right),$$

$$\delta \leq 1 - \frac{2}{\vartheta(S)} \left(\sum_{p \leq p_n} \frac{\log p}{\sqrt{p} - 1} + \log \sqrt{8\pi} + \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2} \right)$$

On a : $\vartheta(S) \ll |T|\vartheta'(T) + (|T|^2 + 1) \log 3$. On est alors amené à estimer $\sum_{p \leq p_n} \log p$. La somme $\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$ est bien connue et vaut $\vartheta(x) = x + o(x)$. Comme $p_n = n \log n(1 + o(1))$ on en déduit que $\vartheta'(T) = \log n + \log\log n + o(1)$. Ainsi $\vartheta(S) \ll n^2$. De plus $S_n = \displaystyle\sum_{p \leq p_n} \frac{\log p}{\sqrt{p} - 1} \gg \sqrt{p_n} \gg \sqrt{n \log n}$. On en déduit qu'il existe une constante effective c, telle que $\delta \leq 1 - c\, n^{-3/2}\sqrt{\log n}$.

Remarquons que ce résultat est moins bon que celui obtenu dans [12], utilisant des extensions de degré 2.

6.2. **Cas Particulier d'une place p et de n degrés.** Dans ce paragraphe on va considérer un premier p et $d_1 = 1, \ldots, d_n = n$. Alors il existe un corps global infini $\mathcal{K}/\mathbb{Q}$ tel que, pour tout $k = 1 \ldots n$,

$$\phi_{p^k} = \frac{\phi_{\mathbb{R}}}{kn} > 0.$$

De plus, son défaut vérifie :

$$(GRH) \quad \delta \leq 1 - \frac{h(p,n)}{f(p,n) + g(p)},$$

où

$$h(p,n) \geq \frac{\log p}{n\sqrt{p}} + \log 8\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2},$$

$$f(p,n) \ll a^{\Omega(n \,\mathrm{ppcm}(k)_{k=1\ldots n})}(n \log n + \log\log p), \text{ et } g(p) \ll \log\log p.$$

Reste alors à évaluer $\Omega(\mathrm{ppcm}(k)_{k=1\dots n}) = \sum_{p\leq n} m_p$ où la somme est prise sur les nombre premiers, et m_p est le plus grand entier tel que $p^{m_p} \leq n$. Comme

$$\sum_{p\leq n} m_p \leq \log n \sum_{p\leq n} \frac{1}{\log p} \ll \log n \frac{n}{\log^2 n},$$

on voit que :

$$\delta \leq 1 - \frac{c}{A^{n/\log n}(n\log n + \log\log p)},$$

pour c, A deux constantes effectives.

Références

[1] Eric Bach and Jonathan Sorenson. Explicit bounds for primes in residue classes. *Math. Comp.*, 65(216) :1717–1735, 1996.

[2] V. G. Drinfeld and S. G. Vlăduţ. The number of points of an algebraic curve. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 17(1) :68–69, 1983.

[3] Arnaldo Garcia and Henning Stichtenoth. Asymptotically good towers of function fields over finite fields. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 322(11) :1067–1070, 1996.

[4] Georges Gras. *Class field Theory, from theory to practice*. SMM, Springer, 2005.

[5] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An introduction to the theory of numbers*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, fifth edition, 1979.

[6] Yasutaka Ihara. Some remarks on the number of rational points of algebraic curves over finite fields. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 28(3) :721–724 (1982), 1981.

[7] Yasutaka Ihara. How many primes decompose completely in an infinite unramified Galois extension of a global field ? *J. Math. Soc. Japan*, 35(4) :693–709, 1983.

[8] Vijaya Kumar Murty and John Scherk. Effective versions of the Chebotarev density theorem for function fields. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 319(6) :523–528, 1994.

[9] John Labute. Mild pro-p-groups and Galois groups of p-extensions of $\mathbb{Q}$. *J. Reine Angew. Math.*, 596 :155–182, 2006.

[10] J. C. Lagarias, H. L. Montgomery, and A. M. Odlyzko. A bound for the least prime ideal in the Chebotarev density theorem. *Invent. Math.*, 54(3) :271–296, 1979.

[11] J. C. Lagarias and A. M. Odlyzko. Effective versions of the Chebotarev density theorem. In *Algebraic number fields : L-functions and Galois properties (Proc. Sympos., Univ. Durham, Durham, 1975)*, pages 409–464. Academic Press, London, 1977.

[12] Philippe Lebacque. Sur quelques Propriétés asymptotiques des corps globaux. *Thèse de doctorat de l'Université de la Méditerranée*, 2007.

[13] Philippe Lebacque. On Tsfasman-Vlăduţ invariants of infinite global fields. *Int. J. Number Theory*, 6(6) :1419–1448, 2010.

[14] Stéphane Louboutin. Explicit upper bounds for residues of Dedekind zeta functions and values of L-functions at $s = 1$, and explicit lower bounds for relative class numbers of CM-fields. *Canad. J. Math.*, 53(6) :1194–1222, 2001.

[15] Jürgen Neukirch, Alexander Schmidt, and Kay Wingberg. *Cohomology of number fields*, volume 323 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2008.

[16] Harald Niederreiter and Chaoping Xing. Towers of global function fields with asymptotically many rational places and an improvement on the Gilbert-Varshamov bound. *Math. Nachr.*, 195 :171–186, 1998.

[17] Michael Rosen. *Number theory in function fields*, volume 210 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2002.

[18] Alexander Schmidt. Über pro-p-fundamentalgruppen markierter arithmetischer kurven. *J. Reine Angew. Math.*, 640 :203–235, 2010.

[19] Jean-Pierre Serre. Quelques applications du théorème de densité de Chebotarev. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (54) :323–401, 1981.

[20] Jean-Pierre Serre. *Rational Points on Curves over Finite Fields*. Harvard University, 1985.

[21] I. R. Shafarevich. Extensions with prescribed ramification points. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (18) :71–95, 1963.

[22] Joseph H. Silverman. An inequality relating the regulator and the discriminant of a number field. *J. Number Theory*, 19(3) :437–442, 1984.

[23] Henning Stichtenoth. *Algebraic function fields and codes*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[24] M. A. Tsfasman and S. G. Vlăduţ. *Algebraic-geometric codes*, volume 58 of *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991. Translated from the Russian by the authors.

[25] M. A. Tsfasman and S. G. Vlăduţ. Infinite global fields and the generalized Brauer-Siegel theorem. *Mosc. Math. J.*, 2(2) :329–402, 2002. Dedicated to Yuri I. Manin on the occasion of his 65th birthday.

[26] M. A. Tsfasman, S. G. Vlăduţ, and Dimitry Nogin. *Algebraic Geometric Codes : Basic Notions*, volume 139 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, 2007.

[27] Rainer Zimmert. Ideale kleiner Norm in Idealklassen und eine Regulatorabschätzung. *Invent. Math.*, 62(3) :367–380, 1981.

Laboratoire de mathématiques de Besançon, 16 route de Gray, 25030 Besançon cedex

E-mail address: Philippe.Lebacque@univ-fcomte.fr