Théorème fondamental du calcul intégral — Le Barbaux 18/01/16 ①

Th 0 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $F(t) = \int_0^t f(s)\,ds$.
Alors $\forall t \in [0,1]$ $F'(t) = f(t)$

Pr À connaître !

I) Dérivabilité de $t \mapsto \int_0^t f(s)\,ds$ pour $f \in L^1([0,1])$

Th 1 Soit $f \in L^1([0,1])$, $F(t) = \int_0^t f(s)\,ds$, λ mesure de Lebesgue
Alors t-pp $F'(t)$ existe et $F'(t) = f(t)$

Cor 2 $f = \mathbb{1}_A$, A mesurable
t-pp $\frac{1}{h}\lambda(A \cap [t, t+h]) \to \mathbb{1}_A(t)$
Si t-pp $\overline{\lim_{h \to 0^+}} \frac{1}{h}\lambda(A \cap [t, t+h]) < 1$, alors $\lambda(A) = 0$

Déf $t \in]0,1[$ est un point de Lebesgue de f
si $\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} |f(s) - f(t)|\,ds = 0$

Rem Si t point de Lebesgue de f, alors $F'(t) = f(t)$

En effet $\forall h > 0$ $\left|\frac{F(t+h) - F(t)}{h} - f(t)\right| = \frac{1}{h}\left|\int_t^{t+h} (f(s) - f(t))\,ds\right|$
$$\leqslant \frac{1}{h}\int_t^{t+h} |f(s) - f(t)|\,ds \longrightarrow 0$$
Donc $F'_d(t) = f(t)$. De même $F'_g(t) = f(t)$.

On va montrer que $[0,1] \setminus \{\text{pts de Lebesgue de } f\}$ est négligeable

Lemme de Vitali (M, d) espace métrique
Soit $A = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i) \subset M$
Alors $\exists S \subset \{1, \dots, n\}$ tq
(a) $\forall i \neq j \in S$ $B(x_i, r_i) \cap B(x_j, r_j) = \emptyset$
(b) $A \subset \bigcup_{i \in S} B(x_i, 3r_i)$

Utilité pour $M = [0,1]$: $2\sum_{i \in S} r_i \leqslant \lambda(A) \leqslant 6\sum_{i \in S} r_i$

Preuve : ops $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n$

$i_1 = 1 \quad i_2 = \mathrm{Inf}\{i > i_1 \ B(x_i, r_i) \cap B(x_{i_1}, r_{i_1}) = \emptyset\}$ s'il existe

$\vdots \quad i_\ell = \mathrm{Inf}\{i > i_{\ell-1} \ \forall j \leq \ell-1 \ B(x_i, r_i) \cap B(x_{i_j}, r_{i_j}) = \emptyset\}$ s'il $\exists$

Le processus s'arrête à i_k, $k \geq 1$ $S = \{i_1, \dots, i_k\}$

(a) clairement vérifiée

(b) Soit $j \notin S$ et $y \in B(x_j, r_j)$

$\exists \ell$ tq $i_\ell < j$ et $B(x_{i_\ell}, r_{i_\ell}) \cap B(x_j, r_j) \neq \emptyset$

Soit $z \in B(x_{i_\ell}, r_{i_\ell}) \cap B(x_j, r_j)$

$d(y, x_{i_\ell}) \leq d(y, x_j) + d(x_j, z) + d(z, x_{i_\ell}) \leq 2r_j + r_{i_\ell} \leq 3r_{i_\ell}$

Donc $\forall j \notin S \ \exists \ell \ B(x_j, r_j) \subset B(x_{i_\ell}, 3r_{i_\ell})$ □

Inégalité Maximale de Hardy-Littlewood

Pour $t \in]0,1[$, on pose $Mf(t) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} |f(s)|\, ds$

Alors $\forall c > 0 \quad \lambda(\{Mf > c\}) \leq \frac{3}{c} \|f\|_1$

Preuve Soit K compact tq $K \subset \{Mh > c\}$

$\forall x \in K \ \exists h_x > 0 \quad \frac{1}{2h_x} \int_{x-h_x}^{x+h_x} |f(s)|\, ds > c$

K compact $\Rightarrow \exists x_1, \dots, x_n \quad K \subset \bigcup_{i=1}^{n}]x_i - h_{x_i}, x_i + h_{x_i}[$

Vitali $\Rightarrow \exists S \subset \{1, \dots, n\}$ tq $K \subset \bigcup_{i \in S}]x_i - 3h_{x_i}, x_i + 3h_{x_i}[$

et $\forall i \neq j \in S \ ]x_i - h_{x_i}, x_i + x_i[\cap]x_j - h_{x_j}, x_j + h_{x_j}[= \emptyset$

$\lambda(K) \leq 6 \sum_{i \in S} x_i \leq \frac{3}{c} \sum_{i \in S} \int_{x_i - h_{x_i}}^{x_i + h_{x_i}} |f(s)|\, ds \leq \frac{3}{c} \|f\|_1$

car 2 à 2 disjoints

Finalement λ régulière $\Rightarrow \lambda(\{Mf > c\}) \leq \frac{3}{c} \|f\|_2$ □

Preuve Th1 . $t \in]0,1[\quad Tf(t) = \overline{\lim_{h \to 0^+}} \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} |f(s) - f(t)|\, ds$

Il suffit de montrer que $\forall c > 0 \quad \{Tf > c\}$ négligeable

. Soit $k \in \mathbb{N}$ $\exists g$ continue tq $\|f - g\|_2 \leq 2^{-k}$

$\varphi := f - g$, g continue $\Rightarrow Tg = 0$ donc $Tf \leq T\varphi + Tg \leq T\varphi$

$\forall h>0 \quad \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h}|\varphi(s)-\varphi(t)|\,dt \leq \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h}|\varphi(s)|\,ds + |\varphi(t)|$

Donc $T\varphi \leq M\varphi + |\varphi|$

- $\{Tf>c\} \subset \{T\varphi>c\} \subset \{M\varphi > \frac{c}{2}\} \cup \{|\varphi| > \frac{c}{2}\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda(\{|\varphi|>\frac{c}{2}\}) \leq \frac{2}{c}\|\varphi_2\|_1 \leq \frac{2}{c}2^{-k} \\ \lambda(\{M\varphi>\frac{c}{2}\}) \leq \frac{6}{c}\|\varphi_1\|_1 \leq \frac{6}{c}2^{-k} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda(\{Tf>c\}) \leq \frac{8}{c}2^{-k} \quad \forall k\in\mathbb{N}$$

On a bien montré que $\{Tf>c\}$ est négligeable $\square$

II) Fonctions dérivables presque partout

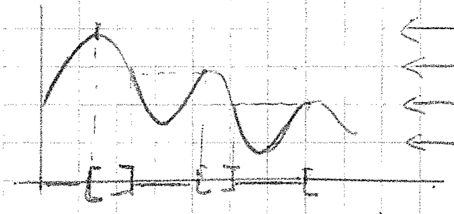
Th2 (Lebesgue) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ croissante, alors f est dérivable pp et $\int_0^1 f'(s)\,ds \leq f(1)-f(0)$ ($f'\geq 0$ et $f'\in L^1$)

Rem On suppose que f est continue ce qui est licite car une fonction croissante admet une quantité dénombrable de points de discontinuité, tous de première espèce.

Lemme du soleil levant $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue
Alors $\exists D$ dénombrable, $(]a_n,b_n[)_{n\in D}$ intervalles de $[0,1]$ 2 à 2 disjoints tq

(i) $\forall n\in D \quad g(a_n) \leq g(b_n)$

(ii) $\forall x\in]0,1[\setminus \bigcup_{n\in D}]a_n,b_n[\quad \forall y\in[x,1] \quad g(y)\leq g(x)$



Preuve $U = \{x\in]0,1[\; \exists y\in]x,1] \; g(y)>g(x)\}$

U est un ouvert de $]0,1[$

$\exists D \quad U = \bigcup_{n\in D}]a_n,b_n[$ 2 à 2 disjoints

$\forall x\notin U \quad \forall y\geq x \quad g(y)\leq g(x)$ (par déf)

- Soit $x\in]a_n,b_n[$ et t tq $g(t) = \sup_{[x,1]} g$ alors $t\geq b_n$.

$b_n\notin U \Rightarrow g(b_n)\geq g(t)\geq g(x)$

$x\to a_n^+$ + continuité $\Rightarrow g(a_n)\leq g(b_n)$. $\square$

Rem En fait $g(a_n) = g(b_n)$, sauf si $a_n = 0$ (exo)

<u>Dérivées de Dini</u> $x \in]0,1[$ $\Delta f(x,h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$D^+f(x) = \overline{\lim_{h\to 0^+}} \Delta f(x,h)$ $D^-f(x) = \overline{\lim_{h\to 0^-}} \Delta f(x,h)$

$D_+f(x) = \underline{\lim_{h\to 0^+}} \Delta f(x,h)$ $D_-f(x) = \underline{\lim_{h\to 0^-}} \Delta f(x,h)$

$0 \leq D_+f \leq D^+f \leq \infty$ $0 \leq D_-f \leq D^-f \leq \infty$

Lemme 1 $\forall R>0$ $\forall \alpha<\beta \in [0,1]$ $\lambda(\{D^+f > R\} \cap]\alpha,\beta[) \leq \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{R}$

En particulier $D^+f < +\infty$ p.p

<u>Preuve</u> Soit $G(x) = f(x) - Rx$ continue

<u>Soleil levant</u> $\Rightarrow \exists\,]a_n,b_n[$ disjoints dans $]\alpha,\beta[$ tq

$\forall n$ $G(a_n) \leq G(b_n)$ (i.e $b_n - a_n \leq \frac{f(b_n)-f(a_n)}{R}$)

et $\forall x \in]\alpha,\beta[\setminus \bigcup_n]a_n,b_n[$ $\forall y \in [x,\beta]$ $G(y) \leq G(x)$

Donc $\{D^+f > R\} \cap]\alpha,\beta[\subset \bigcup_n]a_n,b_n[$

$\lambda(\{D^+f>R\} \cap]\alpha,\beta[) \leq \sum_n (b_n - a_n) \leq \sum_n \frac{f(b_n)-f(a_n)}{R}$

$\leq \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{R}$ car 2 à 2 disjoints. $\square$

Lemme 2 Soient $0<r<R$

Alors $E_{r,R} = \{ D_-f < r < R < D^+f \}$ négligeable

<u>Preuve</u> . Soient $[t,t+h] \subset]0,1[$ et $g(x) = f(-x) + rx$ continue sur $]-t-h,-t[$

<u>Soleil levant</u> $\Rightarrow \exists\,]a_n,b_n[$ disjoints dans $]t,t+h[$ tq

$\forall n$ $g(-b_n) \leq g(-a_n)$ i.e $f(b_n) - f(a_n) \leq r(b_n - a_n)$

et $\forall x \in]t,t+h[\setminus \bigcup]a_n,b_n[$ $\forall y \in [t,x[$ $g(-y) \leq g(-x)$ (i.e $f(x)-f(y) \geq r(y-x)$)

Donc $\{D_-f < r\} \cap]t,t+h[\subset \bigcup_n]a_n,b_n[$

Mais alors <u>Lemme 1</u> $\Rightarrow \lambda(E_{r,R} \cap]t,t+h[) \leq \sum_n \frac{f(b_n)-f(a_n)}{R}$

$\leq \frac{r}{R} \sum (b_n - a_n) \leq \frac{r}{R} h$

Donc $\forall t \in]0,1[$ $\overline{\lim_{h\to 0^+}} \lambda(E_{r,R} \cap [t,t+h]) < 1$

<u>Cor 2</u> $\Rightarrow$ $E_{r,R}$ négligeable. $\square$

Preuve Th2 . $\{D_- f < D^+ f\} = \bigcup_{r<R\in\mathbb{Q}^+} E_{r,R}$ négligeable

$f(x) \leftrightarrow -f(-x) \Rightarrow \{D_+ f < D^- f\}$ négligeable

Donc $D_- f \le D^- f \le D_+ f \le D^+ f \le D_- f$ pp et $D^+ f < +\infty$ pp

$\Rightarrow$ f dérivable p.p

Intégrale de f' On prolonge f par $f(x) = f(1)$, $x \geq 1$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ $g_n(x) = n\left(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\right) \longrightarrow f'(x)$ x pp, $g_n \geq 0$

$\int_0^1 g_n(s)\,ds = n\left(\int_1^{1+\frac{1}{n}} f(s)\,ds - \int_0^{1/n} f(s)\,ds\right) \le f(1) - f(0)$

Fatou $\Rightarrow \int_0^1 f'(s)\,ds = \int_0^1 \lim g_n(s)\,ds \le \underline{\lim} \int_0^1 g_n(s)\,ds \le f(1) - f(0)$

Déf $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est à variation bornée si

$\sup\left\{\sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|,\ 0 \le t_0 < \dots < t_n \le 1\right\} < +\infty$

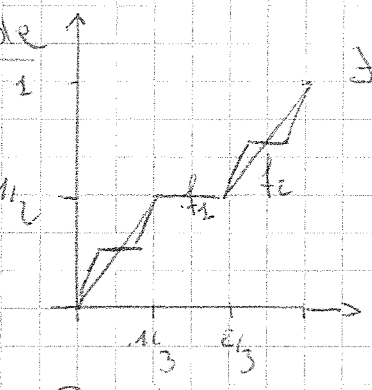
- Exemples $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ croissante ou lipschitz $\Rightarrow f$ VB
- Soit $f \in VB([0,1])$ $V(x) = \sup\left\{\sum |f(t_{i+1}) - f(t_i)|,\ 0 \le t_0 < \dots < t_n \le x\right\}$

  $f = V - (V - f)$ V et $(V-f)$ croissantes (exo)

  Donc f dérivable pp et $f' \in L^1$.

III) A-t-on $f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t)\,dt$?

Contre-exemple



$\exists f$ $\|f_n - f\|_\infty \to 0$

f croissante continue $f(1) - f(0) = 1$

Mais $f' = 0$ pp

car $\lambda(\text{Cantor}) = 0$ (exo)

Déf $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est absolument continue (AC) si $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tq

$\forall a_1 < b_1 < \dots < a_n < b_n$ $\sum (b_n - a_n) < \delta \Rightarrow \sum |f(b_n) - f(a_n)| < \varepsilon$

Rem f lipschitz $\Rightarrow f$ AC $\Rightarrow f$ VB

Th3 f AC $\Rightarrow \int_0^1 f'(t)\,dt = f(1) - f(0)$

Idée $\mu(]a,b[) = f(b) - f(a)$, μ mesure $\mu \ll \lambda$

Si $f \nearrow$

Th de RN $\Rightarrow \mu = f'\,d\lambda$

IV) En dimension infinie ?

<u>Contre-exemples</u> ① $f : [0,1] \to c_0$ est 1-Lipschitz

$$t \mapsto \left(\frac{e^{int}}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

Si $f'(t)$ existe, $f'(t) = (e^{int})_n \in \ell_\infty \setminus c_0$ $(\forall t)$

Donc f est nulle part dérivable

② $f : [0,1] \to L^1$ isométrie

$t \mapsto \mathbb{1}_{[0,t]}$ nulle part dérivable

Def On dit qu'un espace de Banach X a la propriété de Radon-Nikodym (RNP) si
$\forall f : [0,1] \to X$ Lipschitz, f dérivable p.p.

<u>Exemples</u>
- c_0, L^1, $C([0,1])$ n'ont pas RNP
- $\dim X < +\infty \Rightarrow X$ a RNP
- ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$, L^p $(1 < p < \infty)$ ont RNP

? **Th** X Banach Y Banach avec RNP $f : X \to Y$ Lipschitz
(i) $\dim X < +\infty \Rightarrow f$ différentiable p.p (Rademacher)
(ii) X séparable $\Rightarrow f$ Gâteaux-différentiable "p.p". (70's)

Th X espace de Banach. Les PSSE
(i) X a RNP
(ii) $\forall \mu$ mesure à valeurs dans X tq $\mu \ll \lambda$
$\exists f \in L^1([0,1], X)$ tq $d\mu = f\, d\lambda$
(iii) Toute martingale bornée dans $L^p(\Omega, X)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ est convergente

Th $1 < p \leq, q < \infty$ conjugués X Banach
$$L^q([0,1], X^*) = \left[L^p([0,1], X)\right]^* \iff X^* \text{ a RNP}$$

<u>Le plus beau</u> X a RNP $\iff$ $\forall C$ fermé convexe borné de X $\forall \varepsilon > 0$
$\exists T$ tranche de C ~~tq~~ non vide tq
$\operatorname{diam}(T) < \varepsilon$