Modules de type fini sur un anneau de Dedekind

Julien Koperecz

Journée des Jeunes Chercheurs 2018
LMB

6 avril 2018

Tous les anneaux considérés seront supposés *unitaires*, *commutatifs*, et *intègres*.

Sommaire

Module sur un anneau commutatif : Définition

Définition

Soit A un anneau (unitaire, commutatif, intègre).
Un A-module (à gauche) est un ensemble M muni d'une loi interne (notée $+$) et d'une loi externe (notée $\cdot$)

$$\begin{array}{ccc} M \times M & \longrightarrow & M \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A \times M & \longrightarrow & M \\ (a,x) & \longmapsto & a \cdot x \end{array}$$

satisfaisant aux propriétés suivantes :

- *l'ensemble M, muni de la loi $+$, est un groupe abélien.*
- $\forall x, y \in M$, $\forall a, b \in A$, *on a*

$$\begin{array}{ll} a \cdot (x+y) = a \cdot x + a \cdot y & (ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x) \\ (a+b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x & 1_A \cdot x = x \end{array}$$

Sous-modules

Définition

Soit M un A-module. Un sous-module de M est un sous-ensemble non-vide N de M tel que

$$\forall x, y \in M, \forall a, b \in A, \quad a \cdot x + b \cdot y \in N$$

Proposition

Soit M un A-module, et N un sous-module de M. Alors, les lois induites sur N par celles de M font de N un A-module.

Applications A-linéaires

Définition

Un morphisme de A-modules ou application A-linéaire est une application $f : M \to N$ telle que $\forall x, y \in M$, $\forall a \in A$,

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$$

Torsion

Soit M un A-module.

Proposition

Pour tout $x \in M$, $a \in A$, *on a :* $a \cdot 0_M = 0_M$ *et* $0_A \cdot x = 0_M$

Définition

Un élément $x \in M$ *pour lequel il existe* $a \in A$, $a \neq 0$, *tel que*

$$a \cdot x = 0_M$$

est appelé un élément de torsion de M.

Définition

L'ensemble des éléments de torsion de M, *noté* $\mathrm{Tor}(M)$, *est un sous-module de* M, *appelé sous-module de torsion.*

Sommaire

Anneaux principaux

Définition

Un anneau A est dit principal s'il est intègre et si tout idéal de A est principal, c'est-à-dire engendré par un seul élément.

Tout idéal d'un anneau principal est donc de la forme

$$\mathfrak{a} = (a) = aA$$

avec $a \in A$.

Structure des modules de type fini pour A principal

Théorème

Soit A un anneau principal et M un A-module de type fini. Alors, on a un isomorphisme de A-modules

$$\boxed{M \simeq A^r \times \frac{A}{(a_1)} \times \cdots \frac{A}{(a_s)}}$$

où $r, s \geq 0$ sont des entiers et où $(a_1), \ldots, (a_s)$ sont des idéaux non-nuls et différents de A tels que $(a_1) \subset \cdots \subset (a_s)$ déterminés de manière unique par la classe d'isomorphisme de M.
De plus, l'entier r et les idéaux $(a_1), \ldots, (a_s)$ caractérisent M à isomorphisme près.

Sommaire

Anneaux de Dedekind

Définition (Anneau de Dedekind)

Un anneau A (unitaire, commutatif et intègre) est dit de Dedekind s'il vérifie les propriétés suivantes :

- *A est noethérien : tout idéal de A est de type fini.*
- *A est intégralement clos : tout élément de son corps des fractions K entier sur A, c'est-à-dire racine d'un polynôme $P \in A[X]$ unitaire, appartient à A.*
- *Tout idéal premier non nul de A est maximal.*

Dans toute la suite,
A désignera un anneau de Dedekind.

Idéaux fractionnaires

Définition

Un idéal fractionnaire J de A (ou de K) est un sous-A-module de type fini de K :

$$J = Ax_1 + \ldots + Ax_n$$

avec $x_1, \ldots, x_n \in K$.
De façon équivalente, J est un idéal fractionnaire de A si, et seulement si, J est un sous-A-module de K avec un "dénominateur commun", i.e. qu'il existe $d \in A$, $d \neq 0$, tel que $dJ \subset A$.
Tout idéal de A (au sens usuel) est un idéal fractionnaire.

Groupe des classes d'idéaux

Théorème

L'ensemble $\mathcal{I}(A)$ des idéaux fractionnaires de A est un groupe abélien (pour la multiplication des idéaux), de neutre A.

Définition

Un idéal fractionnaire est dit principal s'il est de la forme αA, où $\alpha \in K$. L'ensemble des idéaux fractionnaires principaux non nuls forment un sous-groupe du groupe des idéaux fractionnaires non nuls. Le quotient correspondant est appelé le groupe des classes d'idéaux de A, et est noté $\mathrm{Cl}(A)$.

Décomposition en produit d'idéaux premiers

Théorème

Tout idéal fractionnaire I non nul de A s'écrit de manière unique sous la forme

$$I = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(I)}\ ,\ v_{\mathfrak{p}}(I) \in \mathbb{Z}$$

où $\mathfrak{p}$ décrit l'ensemble des idéaux premiers (maximaux) non nuls de A, et où les entiers $v_{\mathfrak{p}}(I)$ sont presque tous nuls.
Pour tout $\mathfrak{p}$, l'entier $v_{\mathfrak{p}}(I)$ s'appelle valuation $\mathfrak{p}$-adique de l'idéal I.
Pour $\alpha \in K$, on note $v_{\mathfrak{p}}(\alpha) = v_{\mathfrak{p}}(\alpha A)$.

Structure des modules de type fini pour A de Dedekind

Théorème

Soit A un anneau de Dedekind, et soit M un A-module de type fini non nul. Alors, il existe deux entier $n \geq 1$ et $r \geq 0$, un idéal fractionnaire I et des idéaux non nuls $\mathfrak{a}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_s \subsetneq A$ tels que

$$\boxed{M \simeq A^{n-1} \times I \times \frac{A}{\mathfrak{a}_1} \times \cdots \times \frac{A}{\mathfrak{a}_s}}$$

De plus, les entiers n, r, les idéaux $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_s$ et la classe d'idéaux de I déterminent M à isomorphisme près. On a $n = rg_A(M)$. Enfin, M est projectif si, et seulement si, il est sans torsion, c'est-à-dire que $r = 0$.