

# SUR LES MÉTHODES VARIATIONNELLES EN ANALYSE NON LINÉAIRE.

LOUIS JEANJEAN

ABSTRACT. Une méthode variationnelle permet de ramener la recherche d'une solution pour une équation aux dérivées partielles à la preuve qu'une fonction possède un point stationnaire. A travers le traitement de quelques exemples simples, nous présenterons le lien entre l'équation et la fonction, le type d'espace sur lequel la fonction est définie et quelles sont les étapes clés pour prouver l'existence du point stationnaire. Autant que possible nous discuterons aussi des difficultés que l'on rencontre dans ce domaine, en particulier nous verrons que des problèmes liés à un manque de compacité surgissent rapidement.

## 1. NOTIONS PRÉLIMINAIRES

**Définition (convergence faible) :** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace de Banach et  $E^*$  son dual. On dit que  $(u_n) \subset E$  converge faiblement vers  $u \in E$  et on note  $u_n \rightharpoonup u$  si et seulement si

$$\forall \phi \in E^*, \quad \phi(u_n) \rightarrow \phi(u).$$

**Remarque :** Soit  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace de Hilbert. On sait que l'on peut identifier  $H$  et  $H^*$  à travers l'application  $v \in H \rightarrow \phi_v \in H^*$  où

$$\phi_v : w \in H \rightarrow \langle w, v \rangle.$$

En particulier donc  $(u_n) \subset H$  vérifie  $u_n \rightharpoonup u$  si et seulement si

$$\langle u_n, v \rangle \rightarrow \langle u, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

**Exemple :** Soit  $E = L^2(\mathbb{R})$  muni de la norme  $\|\cdot\|_2$  et  $u \in C_c(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$  fixé. Montrons que la suite  $(u_n) \in L^2(\mathbb{R})$  définie par  $u_n(x) = u(x - n)$  vérifie  $u_n \rightharpoonup 0$  (bien que  $\|u_n\|_2 = \|u\|_2 \neq 0$ ). Pour voir cela on prend  $v \in L^2(\mathbb{R})$  arbitraire. On va montrer que  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq n_0$ ,

$$|\langle v, u_n \rangle_2| \leq \varepsilon \|u\|_2.$$

Il vient

$$\langle v, u_n \rangle_2 = \int_{\mathbb{R}} v(x)u_n(x)dx = \int_{[-R,R]} v(x)u_n(x)dx + \int_{\mathbb{R} \setminus [-R,R]} v(x)u_n(x)dx$$

où  $[-R, R]$  est tel que

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-R, R]} v^2(x) dx \leq \varepsilon.$$

Alors

$$\langle v, u_n \rangle_2 \leq \|v\|_{L^2([-R, R])} \|u_n\|_{L^2([-R, R])} + \|v\|_{L^2(\mathbb{R} \setminus [-R, R])} \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R} \setminus [-R, R])}.$$

Observons que  $\|u_n\|_{L^2([-R, R])} = 0$  si  $n \in \mathbb{N}$  est assez grand. On a donc, pour  $n \in \mathbb{N}$  grand

$$|\langle v, u_n \rangle_2| \leq \varepsilon \|u_n\|_2 = \varepsilon \|u\|_2.$$

**Théorème :** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace de Banach. Si  $u_n \rightharpoonup u$  alors

$$\|u\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|.$$

**Théorème :** Soit  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un Hilbert. Alors si  $(u_n) \subset H$  est telle que  $u_n \rightharpoonup u$  faiblement et  $\|u\| \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|$  alors  $u_n \rightarrow u$  fortement.

**Théorème :** Soit  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un Hilbert, alors la boule unité fermée est compacte vis à vis de la convergence faible. En particulier, si une suite  $(u_n) \subset E$  est bornée alors il existe un élément  $u \in E$  et une sous-suite  $(u_{n_k})$  avec  $u_{n_k} \rightharpoonup u$ .

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert.

**Définition :** L'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$  est défini par

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \text{pour lequel il existe } g_1, \dots, g_N \in L^2(\Omega) \text{ tel que}$$

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \phi dx, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega), i = 1, \dots, N\}.$$

Pour  $u \in H^1(\Omega)$  on note  $(\frac{\partial u}{\partial x_i}) := g_i$  et on l'appelle la dérivée faible. Aussi on note

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$$

le gradient. L'espace  $H^1(\Omega)$  peut être muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^1} := \langle u, v \rangle_2 + \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_2$$

et la norme associée est

$$\|u\|_{H^1} = \left( \|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Définition :** On désigne par  $H_0^1(\Omega)$  la fermeture de  $C_c^1(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$  c'est à dire  $u \in H_0^1(\Omega)$  si et seulement si il existe  $(u_n) \in C_c^1(\Omega)$  tel que  $\|u_n - u\|_{H^1} \rightarrow 0$ .

**Théorème :** On suppose  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  à bord régulier. Soit

$$u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}).$$

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes

- (1)  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$
- (2)  $u \in H_0^1(\Omega)$ .

On peut donc dire “en gros” que les fonctions de  $H_0^1(\Omega)$  sont les fonctions de  $H^1(\Omega)$  qui “s’annulent” sur le bord.

**Inégalité de Poincaré :** On suppose que  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  est un ouvert borné. Alors il existe une constante  $C > 0$  (dépendant seulement de  $\Omega$ ) telle que

$$(1.1) \quad \|u\|_2 \leq C \|\nabla u\|_2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

En particulier la quantité  $\|\nabla u\|_2$  est une norme sur  $H^1(\Omega)$  qui est équivalente à la norme  $\|u\|_{H^1}$ .

**Remarque :** L’inégalité de Poincaré n’est plus vraie sur  $H^1(\Omega)$ . En effet les constantes appartiennent à  $H^1(\Omega)$ .

**Inclusions de Sobolev :** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert borné. Alors on a

Si  $N = 1$ ,  $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ ,  $\forall 1 \leq p \leq \infty$ .

Si  $N = 2$ ,  $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ ,  $\forall 1 \leq p < \infty$ .

Si  $N \geq 3$ ,  $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ ,  $\forall 1 \leq p \leq 2^*$

où  $2^* = 2N/(N - 2)$ . Dans chaque cas il existe  $C(p, \Omega) > 0$  telle que

$$\|u\|_p \leq C(p, \Omega) \|u\|_{H^1}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

On a l’injection compacte sans restriction supplémentaire si  $N = 1, 2$  et en supposant que  $1 \leq p < 2^*$  si  $N \geq 3$ . Par injection compacte on veut dire que de toute suite bornée de  $H_0^1(\Omega)$  on peut extraire une sous-suite qui converge (fortement) dans  $L^p(\Omega)$ . En particulier si  $u_n \rightharpoonup u$  faiblement dans  $H_0^1(\Omega)$  on peut supposer, en passant à une sous-suite, que  $u_n \rightarrow u$  fortement dans  $L^p(\Omega)$ .

## 2. POURQUOI LES ESPACES DE SOBOLEV ?

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert borné. On cherche une fonction  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

$$(1) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ sur } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ici  $f \in L^2(\Omega)$  est une fonction donnée. La condition  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$  s’appelle la condition de Dirichlet.

**Définition :** Une solution classique de (1) est une fonction  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  vérifiant (1). Une solution faible de (1) est une fonction  $u \in H_0^1(\Omega)$  vérifiant

$$(2.1) \quad \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Remarquons que toute solution classique est une solution faible. En effet  $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  et donc  $u \in H_0^1(\Omega)$ . D'autre part si  $v \in C_c^1(\Omega)$  on a, en multipliant  $-\Delta u + u = f$  par  $v \in C_c^1(\Omega)$  et en intégrant que

$$(2.2) \quad \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx.$$

Pour monter que

$$\int_{\Omega} -(\Delta u)v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx$$

on utilise la formule de Green qui est la généralisation de la formule d'intégration par partie dans  $\mathbb{R}$ . Il vient, par cette formule,

$$\int_{\Omega} (\Delta u)v \, dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx$$

et comme  $v \equiv 0$  sur  $\Gamma = \partial\Omega$  on a le résultat voulu. Maintenant par densité, cette égalité reste vraie pour  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

Pour résoudre (1) on procède en trois étapes.

**Étape 1:** *Existence d'une solution faible.* Nous allons nous concentrer sur ce point dans la suite du cours.

**Étape 2:** *Régularité de la solution faible.* L'idée est ici de montrer que les solutions faibles ont une régularité qui est plus grande que celle des éléments de  $H_0^1(\Omega)$ .

**Étape 3:** *Retour à la solution classique.* L'étape 3 est en général assez simple.

### 3. GÉNÉRALITÉS, PREMIERS EXEMPLES DE MÉTHODES VARIATIONNELLES

Soit  $E$  un espace de Banach. Une application  $I$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  est appelée une fonctionnelle. On dit que  $I$  est Fréchet différentiable au point  $u \in E$ , s'il existe une forme linéaire continue  $L = L(u)$ ,  $L : E \rightarrow \mathbb{R}$  qui satisfait

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{|I(u+v) - I(u) - Lv|}{\|v\|} = 0.$$

$L$  est généralement notée  $I'(u)$ . On dit que  $I$  est une fonctionnelle de classe  $C^1$  si l'application de  $E$  vers son dual  $E^*$  est continue. On dit que  $u_0$  est un point critique de  $I$  si et seulement si  $I'(u_0) = 0$ , c'est à dire si

$$I'(u_0)v = 0, \quad \forall v \in E.$$

On dit que  $c \in \mathbb{R}$  est une valeur critique, on parle aussi de niveau critique, de  $I$  s'il existe un point critique  $u_0$  de  $I$  tel que  $I(u_0) = c$ .

L'idée de base des méthodes variationnelles est de transformer le problème de l'existence d'une solution d'une EDP en la recherche d'un point critique d'une fonctionnelle. Par exemple considérons le problème (2) : Trouver  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Ici  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  est un ouvert borné (régulier) et où  $p \in ]1, 2[$ . On travaille sur  $H_0^1(\Omega)$  muni de la norme  $\|u\| = \|\nabla u\|_2$ , ce qui est possible par l'inégalité de Poincaré. On définit la fonctionnelle

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p \, dx.$$

On admet que  $I$  est de classe  $C^1$  et que pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$

$$I'(u)v = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx - \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv \, dx.$$

Par suite a un point critique de  $I$  correspond une solution du problème (2). Pour obtenir un point critique de  $I$  on va montrer que  $I$  admet un minimum global sur  $H_0^1(\Omega)$ . On admettra qu'il s'agit alors d'un point critique.

Soit  $(u_n) \subset E$  une suite telle que  $I(u_n) \rightarrow \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} I(u) := m$ . Notons que  $m$  peut être fini ou non.

Observons que par l'inclusion de Sobolev  $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$  et en utilisant l'inégalité de Poincaré il vient que, pour une constante  $C > 0$

$$\int_{\Omega} |u|^p \, dx = \|u\|_p^p \leq C \|u\|_{H^1}^p \leq C \|u\|^p$$

et par suite

$$I(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - C \|u\|^p.$$

Comme  $p < 2$  on en déduit que  $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$  est bornée et on sait alors que, en passant à une sous-suite  $u_n \rightharpoonup u$  pour un  $u \in H_0^1(\Omega)$  faiblement. Maintenant comme  $u_n \rightharpoonup u$  on a que

$$\|u\|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^2.$$

Aussi par la compacité de l'inclusion  $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$  on a que

$$\|u_n\|_p^p \rightarrow \|u\|_p^p.$$

Il vient donc que

$$\begin{aligned}
I(u) &:= \frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_{\Omega} |u|^p dx \\
&\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} \|u_n\|^2 - \int_{\Omega} |u_n|^p dx \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} I(u_n) = m
\end{aligned}$$

D'où  $I(u) = m$  et  $u$  est un minimum global.

#### 4. LE THÉORÈME DU COL

Considérons de nouveau le problème précédent où l'on suppose maintenant que  $p \in ]2, \frac{2N}{N-2}[$  si  $N \geq 3$  et  $p > 2$  si  $N = 1, 2$ . On a toujours

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p dx$$

et nous admettrons que  $I$  est encore de classe  $C^1$  et qu'un point critique de  $I$  correspond à une solution  $I$ . Montrons que  $I$  n'est plus bornée inférieurement. Pour cela fixons  $u \in H_0^1(\Omega)$ ,  $u \neq 0$  arbitraire et calculons  $I(\lambda u)$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ . Il vient

$$I(\lambda u) = \frac{\lambda^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda^p}{2} \int_{\Omega} |u|^p dx.$$

Comme  $p > 2$  on a  $I(\lambda u) \rightarrow -\infty$  lorsque  $\lambda \rightarrow +\infty$  et par suite

$$\inf_{u \in H_0^1(\Omega)} I(u) = -\infty.$$

De même on peut montrer que

$$\sup_{u \in H_0^1(\Omega)} I(u) = +\infty$$

et il n'est donc pas possible de travailler avec  $-I$  au lieu de  $I$  !

Plus généralement on ne pourra pas trouver un point critique sous forme d'un maximum ou d'un minimum global. L'idée va alors être de montrer que  $I$  admet un point critique sous forme de point selle. Pour cela nous allons utiliser le résultat suivant appelé Lemme du Col. La preuve de ce résultat a été donnée en 1973 par Ambrosetti et Rabinowitz.

**Lemme du Col :** Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un espace de Banach et  $J \in C^1(E, \mathbb{R})$  qui satisfait

(H1)  $J(0) = 0$ .

(H2) Il existe  $r > 0$ ,  $\rho > 0$  tels que si  $\|u\| = r$  alors  $J(u) \geq \rho$ .

(H3) Il existe  $u_0 \in E$  tel que si  $\|u_0\| > r$  alors  $J(u_0) \leq 0$ .

On définit

$$\Gamma := \{g \in C([0, 1], E), g(0) = 0 \text{ et } g(1) = u_0\}$$

$$c := \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} J(g(t)).$$

Alors il existe  $(u_k) \subset E$  telle que  $J(u_k) \rightarrow c$  et  $J'(u_k) \rightarrow 0$ .

**Remarque :** La suite  $(u_k) \subset E$  obtenue par le Lemme du col apparait comme une suite de presque points critiques. On appelle une telle suite une suite de Palais-Smale. On observe que si elle admet une sous-suite convergente  $u_{n_k} \rightarrow u$ , alors par continuité de  $J$  il vient  $J(u_{n_k}) \rightarrow J(u)$  et par continuité de  $J'$  il vient  $J'(u_{n_k}) \rightarrow 0$ . Par suite  $u \in E$  satisfait  $J(u) = c$  et  $J'(u) = 0$ , c'est donc un point critique au niveau du col. Cependant, dans les applications montrer la convergence d'une sous-suite n'est pas toujours facile et dans certains cas cela peut être faux.

## 5. EXTENSIONS - PERSPECTIVES

On peut chercher à étendre les résultats précédents à des domaines non bornés (par exemple lorsque  $\Omega$  est remplacé par  $\mathbb{R}^N$ ). Un certain nombre de choses restent vraies mais pas toutes. Les inclusions de Sobolev restent vraies si l'on suppose de plus que  $p \geq 2$ . Il existe encore  $C(p, \Omega) > 0$  telle que

$$\|u\|_p \leq C(p, \Omega) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

En revanche la compacité des inclusions n'est en général plus vraie sur des ouverts non bornés. Pour voir cela il suffit de reprendre le premier exemple dans lequel la suite  $u_n \rightharpoonup 0$  dans  $L^2(\mathbb{R})$  mais n'admet aucune sous-suite convergente dans  $L^p(\mathbb{R})$ , pour  $p \in [2, 2^*]$ .

LOUIS JEANJEAN  
 LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES (UMR 6623)  
 UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ  
 16, ROUTE DE GRAY 25030 BESANÇON CEDEX, FRANCE  
*E-mail address:* louis.jeanjean@univ-fcomte.fr