Méthode des différences finies pour le problème de Poisson

Claire Marin, 6 avril 2018

Université de Franche-Comté

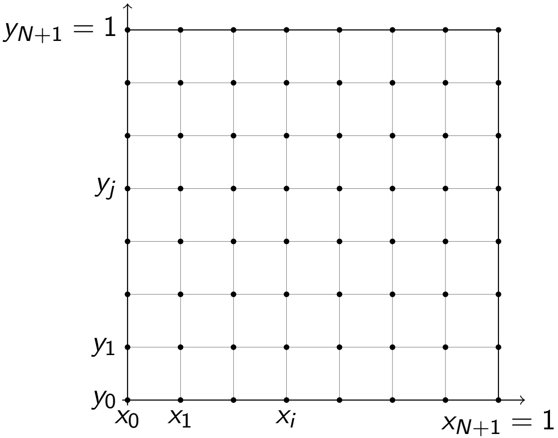
Approche du problème

Problème de Poisson en 2 dimensions

$$\begin{cases} -\Delta u := -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Méthode des différences finies sur un carré

$\Omega =]0,1[^2$. On introduit le maillage suivant :



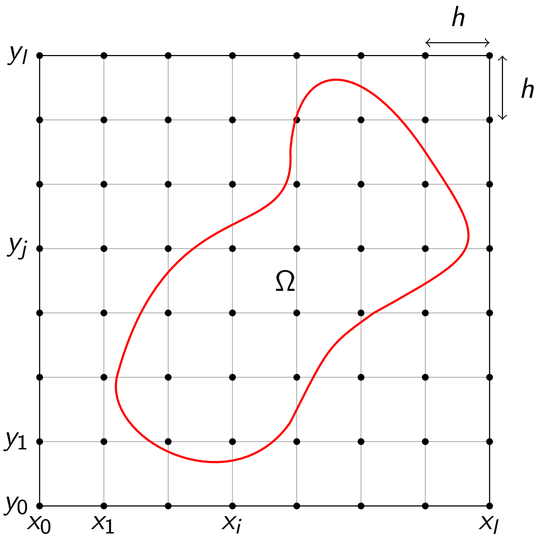
Méthode des différences finies sur un carré

On note $u_{i,j}$ une approximation de $u(x_i, y_j)$. On obtient le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{ll} u_{i,j} = 0, & (i,j) \in \{0, N+1\}^2 \\ \dfrac{-u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} + 4u_{i,j}}{h^2} = f(x_i, y_j), & (i,j) \in [\![1, N]\!]^2 \end{array}\right.$$

Cela revient à résoudre un système linéaire carré $N^2 \times N^2$

$$AU = F$$


h
h
y_I
y_j
y_1
y_0
x_0
x_1
x_i
x_I
Ω

Formule dans un noeud intérieur

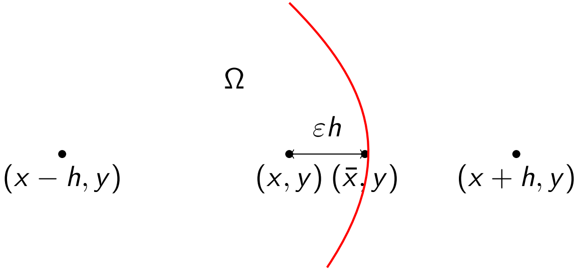
On note $u_{i,j}$ une approximation de $u(x_j, y_i)$.

Si (i,j) noeud intérieur, on pose :

$$\frac{-u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} + 4u_{i,j}}{h^2} = f(x_j, y_i)$$

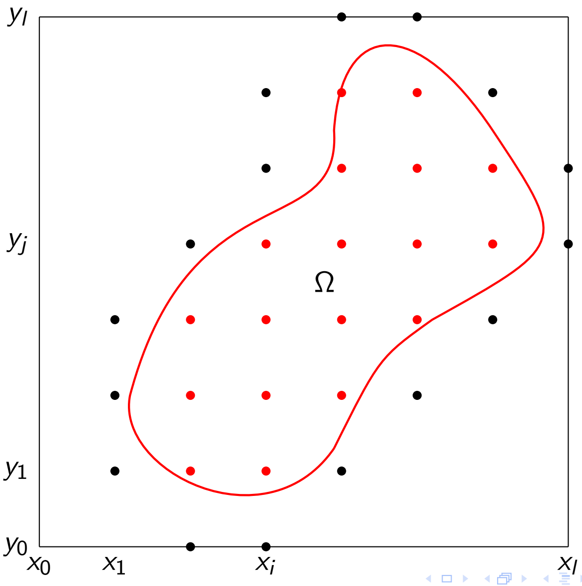
Formule dans un noeud fantôme

Plaçons nous dans le cas suivant :



Si $(i,j+1)$ noeud fantôme, on pose :

$$0=(1-\varepsilon^2)u_{i,j}+\frac{\varepsilon}{2}(\varepsilon+1)u_{i,j+1}+\frac{\varepsilon}{2}(\varepsilon-1)u_{i,j-1}$$


y_I
y_j
y_1
y_0
x_0
x_1
x_i
x_I
Ω

Résumé

On note

- N_i le nombre de noeuds intérieurs
- N_f le nombre de noeuds fantômes
- $N_t = N_f + N_i$ le nombre total de noeuds

Résoudre un système du type

$$AU = F,$$

où :

- *A matrice carrée de taille N_t*
- *U vecteur de taille N_t regroupant les $u_{i,j}$*
- *F vecteur de taille N_t regroupant les $f(x_j, y_i)$.*

Arguments du programme

- la fonction Ψ(notée `Psi` telle que $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \, \Psi(x, y) < 0\}$,
- la borne de la "boîte" (notée `Borne`), c'est-à-dire le réel b tel que $\Omega \subset [-b, b]^2$,
- le pas h,
- la fonction f intervenant dans le problème de départ.

Détection et numérotation des noeuds intérieurs

```
for i=1:l+1
        y = Borne - (i-1)*h
        for j=1:l+1
            x=-Borne + (j-1)*h
            if Psi(x,y)<0 then
                compteur=compteur+1
                N(i,j)=compteur
                V(compteur,1)=i
                V(compteur,2)=j
                F(compteur)=f(x,y)
            end
        end
    end
```

Détection et numérotation des noeuds fantômes

```
    for i=1:M
        k=V(i,1)
        l=V(i,2)

        if N(k-1,l)==0 then
            tot = tot+1
            N(k-1,l)=tot
            V(tot,1)=k-1
            V(tot,2)=l
            V(tot,3)=
epsilon(Psi,-Borne+(l-1)*h,Borne-(k-1)*h,h,[1,0])
            V(tot,4)=1
            V(tot,5)=0
            F(tot)=0
        end
```

Création de la matrice A

On parcourt les noeuds intérieurs.

```
for i=1:compteur

        k=V(i,1)
        l=V(i,2)

        Coord=[Coord;          Coeff=[Coeff;
        [i,N(k-1,l)];          -1/(h^2);
        [i,N(k+1,l)];          -1/(h^2);
        [i,N(k,l-1)];          -1/(h^2);
        [i,N(k,l+1)];          -1/(h^2);
        [i,i]]                  4/(h^2)]

    end
```

Création de la matrice A

On parcourt les noeuds fantômes.

```
for i=comteur+1:tot

        k=V(i,1)
        l=V(i,2)
        eps = V(i,3)
        direc1 = V(i,4)
        direc2 = V(i,5)

        Coord=[Coord;                         Coeff=[Coeff;
        [i,N(k+direc1,l+direc2)];             1-eps^2;
        [i,i];                                (eps/2)*(eps+1);
        [i,N(k+2*direc1,l+2*direc2)]]         (eps/2)*(eps-1)]

    end
```

Cas test

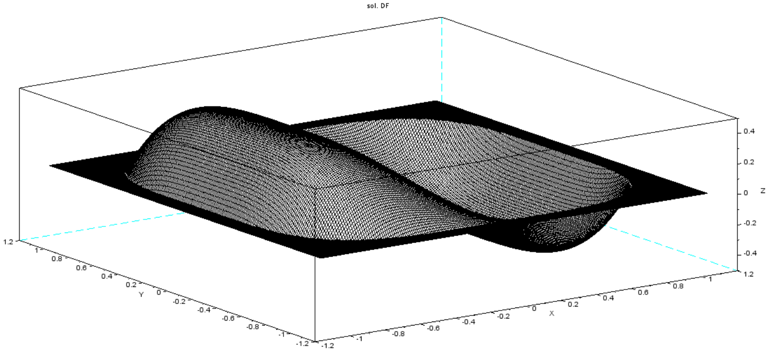
$$\Psi(x,y) = x^4 + y^4 - 1, \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \Psi(x,y) < 0\}$$

$$u(x,y) = \sin(x)(x^4 + y^4 - 1)$$

$$-\Delta u = \sin(x)(x^4 + y^4 - 12x^2 - 12y^2 - 1) - 8x^3 \cos(x) =: f(x,y)$$

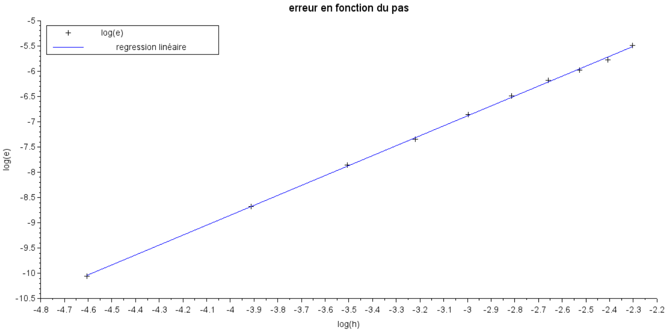
Tracé de la solution

Figure: solution approchée obtenue



Erreur

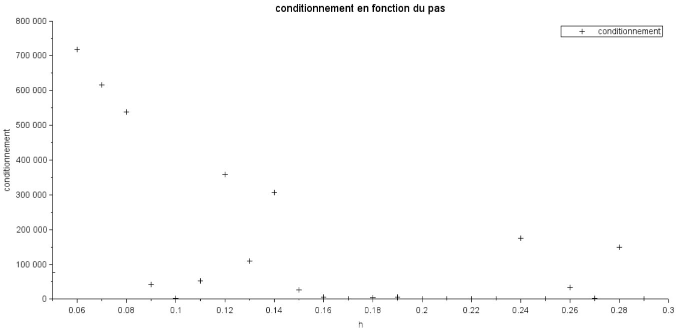
Figure: comportement de l'erreur sous le raffinement du maillage




```
a =1.9649186
```

Conditionnement

Figure: comportement du conditionnement de la matrice A sous le raffinement du maillage



Conditionnement

Figure: pas, ε_{min}, ε_{max}, conditionnement

0,18	0,19	0,2	0,21	0,22	0,23	0,24
0,0759	0,0112	0,1683	0,2459	0,3125	0,055	0,0014
0,9708	0,9456	0,4999	1	0,6156	0,9353	0,835
3,9828e+03	6,0595e+03	1,4223e+03	794,416	531,112	1,4511e+03	1,7554e+05

0,25	0,26	0,27	0,28	0,29	0,3
0,2081	0,0069	0,0792	0,0012	0,0866	0,2552
0,9259	0,9632	0,7778	0,8586	0,7887	0,9999
623,8685	3,3053e+04	2,4735e+03	1,493e+05	1,1292e+03	528,8756

Conclusion