Atelier sur l'infini.

Journée de découverte de la recherche en mathématiques,
Besançon, 14 novembre 2012

Comment savoir si deux ensembles finis ont la même taille ?

Comment savoir si deux ensembles finis ont la même taille ?

Par exemple un ensemble de fleurs et un ensemble de vases.

Comment savoir si deux ensembles finis ont la même taille ?

Par exemple un ensemble de fleurs et un ensemble de vases.

On les compte !

Comment savoir si deux ensembles finis ont la même taille ?

Par exemple un ensemble de fleurs et un ensemble de vases.

On les compte !

Et si on ne sait pas compter ?

Comment savoir si deux ensembles finis ont la même taille ?

Par exemple un ensemble de fleurs et un ensemble de vases.

On les compte !

Et si on ne sait pas compter ?

On essaye “d’apparier” les fleurs et les vases.

Comment savoir si deux ensembles finis ont la même taille ?

Par exemple un ensemble de fleurs et un ensemble de vases.

On les compte !

Et si on ne sait pas compter ?

On essaye “d’apparier” les fleurs et les vases.

Les mathématiciens disent qu’on essaye de construire une bijection entre les ensembles.

Comment savoir si deux ensembles finis ont la même taille ?

Par exemple un ensemble de fleurs et un ensemble de vases.

On les compte !

Et si on ne sait pas compter ?

On essaye “d’apparier” les fleurs et les vases.

Les mathématiciens disent qu’on essaye de construire une bijection entre les ensembles.

Définition

Une application f d’un ensemble A dans un ensemble B est une bijection si pour tout élément b de B, il existe un unique a dans A tel que $f(a) = b$.

On ne peut pas compter les ensembles infinis !

On ne peut pas compter les ensembles infinis !

Deux ensembles infinis seront donc “de même taille” si on peut les mettre en bijection, c’est à dire si on peut apparier leurs éléments...

On ne peut pas compter les ensembles infinis !

Deux ensembles infinis seront donc “de même taille” si on peut les mettre en bijection, c’est à dire si on peut apparier leurs éléments... peu importe de quelle façon.

On ne peut pas compter les ensembles infinis !

Deux ensembles infinis seront donc “de même taille” si on peut les mettre en bijection, c’est à dire si on peut apparier leurs éléments... peu importe de quelle façon.

Cette définition réserve quelques surprises que nous allons essayer d’illustrer...

On ne peut pas compter les ensembles infinis !

Deux ensembles infinis seront donc "de même taille" si on peut les mettre en bijection, c'est à dire si on peut apparier leurs éléments... peu importe de quelle façon.

Cette définition réserve quelques surprises que nous allons essayer d'illustrer... mais avant

On ne peut pas compter les ensembles infinis !

Deux ensembles infinis seront donc “de même taille” si on peut les mettre en bijection, c’est à dire si on peut apparier leurs éléments... peu importe de quelle façon.

Cette définition réserve quelques surprises que nous allons essayer d’illustrer... mais avant

Connaissez vous un ensemble infini ?

On ne peut pas compter les ensembles infinis !

Deux ensembles infinis seront donc “de même taille” si on peut les mettre en bijection, c’est à dire si on peut apparier leurs éléments... peu importe de quelle façon.

Cette définition réserve quelques surprises que nous allons essayer d’illustrer... mais avant

Connaissez vous un ensemble infini ?

L’ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels ?

On ne peut pas compter les ensembles infinis !

Deux ensembles infinis seront donc “de même taille” si on peut les mettre en bijection, c’est à dire si on peut apparier leurs éléments... peu importe de quelle façon.

Cette définition réserve quelques surprises que nous allons essayer d’illustrer... mais avant

Connaissez vous un ensemble infini ?

L’ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels ?

Pourquoi est-il infini ?

On ne peut pas compter les ensembles infinis !

Deux ensembles infinis seront donc “de même taille” si on peut les mettre en bijection, c’est à dire si on peut apparier leurs éléments... peu importe de quelle façon.

Cette définition réserve quelques surprises que nous allons essayer d’illustrer... mais avant

Connaissez vous un ensemble infini ?

L’ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels ?

Pourquoi est-il infini ?

Un ensemble “de la même taille” que $\mathbb{N}$ est dit dénombrable.

On ne peut pas compter les ensembles infinis !

Deux ensembles infinis seront donc “de même taille” si on peut les mettre en bijection, c’est à dire si on peut apparier leurs éléments... peu importe de quelle façon.

Cette définition réserve quelques surprises que nous allons essayer d’illustrer... mais avant

Connaissez vous un ensemble infini ?

L’ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels ?

Pourquoi est-il infini ?

Un ensemble “de la même taille” que $\mathbb{N}$ est dit dénombrable. C’est à dire que l’on peut l’énumérer.

L'HÔTEL INFINI DE HILBERT

L'HÔTEL INFINI DE HILBERT

L'hôtel de Hilbert, ou hôtel infini de Hilbert, est une image attribuée au mathématicien allemand David Hilbert (1862-1943) qui illustre plusieurs propriétés surprenantes des ensembles infinis.

L'HÔTEL INFINI DE HILBERT

L'hôtel de Hilbert, ou hôtel infini de Hilbert, est une image attribuée au mathématicien allemand David Hilbert (1862-1943) qui illustre plusieurs propriétés surprenantes des ensembles infinis.
En particulier : une partie d'un ensemble, différente du tout, peut avoir "la même taille" que le tout.

L'HÔTEL INFINI DE HILBERT

L'hôtel de Hilbert, ou hôtel infini de Hilbert, est une image attribuée au mathématicien allemand David Hilbert (1862-1943) qui illustre plusieurs propriétés surprenantes des ensembles infinis.

En particulier : une partie d'un ensemble, différente du tout, peut avoir “la même taille” que le tout.

Autrement dit : elle a autant d'éléments, même s'il en manque...

L'HÔTEL INFINI DE HILBERT

L'hôtel de Hilbert, ou hôtel infini de Hilbert, est une image attribuée au mathématicien allemand David Hilbert (1862-1943) qui illustre plusieurs propriétés surprenantes des ensembles infinis.
En particulier : une partie d'un ensemble, différente du tout, peut avoir "la même taille" que le tout.
Autrement dit : elle a autant d'éléments, même s'il en manque...

Imaginons donc qu'un hôtel (fictif !), tenu par Mr Hilbert, possède une infinité de chambres numérotées par les entiers naturels (par $\mathbb{N}^*$ en fait) : 1,2,3,4,5,6,7,....

Tous les soirs l'hôtel est plein : chaque chambre est occupée par exactement un client.

Tous les soirs l’hôtel est plein : chaque chambre est occupée par exactement un client.

Chaque soir de nouveaux clients arrivent, à la recherche d’une chambre.

Tous les soirs l’hôtel est plein : chaque chambre est occupée par exactement un client.

Chaque soir de nouveaux clients arrivent, à la recherche d’une chambre. La situation semble sans espoir !

Tous les soirs l’hôtel est plein : chaque chambre est occupée par exactement un client.

Chaque soir de nouveaux clients arrivent, à la recherche d’une chambre. La situation semble sans espoir !

Malgré tout, Mr Hilbert essaye de leur trouver une chambre.

Tous les soirs l'hôtel est plein : chaque chambre est occupée par exactement un client.

Chaque soir de nouveaux clients arrivent, à la recherche d'une chambre. La situation semble sans espoir !

Malgré tout, Mr Hilbert essaye de leur trouver une chambre.

Bien entendu, à la fin de l'opération, chaque ancien client doit encore avoir une chambre et être seul dans sa chambre.

Tous les soirs l’hôtel est plein : chaque chambre est occupée par exactement un client.

Chaque soir de nouveaux clients arrivent, à la recherche d’une chambre. La situation semble sans espoir !

Malgré tout, Mr Hilbert essaye de leur trouver une chambre.

Bien entendu, à la fin de l’opération, chaque ancien client doit encore avoir une chambre et être seul dans sa chambre.

Dans chacun des cas suivants, pouvez vous dire si Hilbert va s’en sortir et si oui... comment ?

1) Le premier soir : un nouveau client se présente.

1) Le premier soir : un nouveau client se présente.

2) Le deuxième soir : 18 513 nouveaux clients se présentent.

1) Le premier soir : un nouveau client se présente.

2) Le deuxième soir : 18 513 nouveaux clients se présentent.

3) Le troisième soir : un bus de nouveaux clients se gare devant l'hôtel. De ce bus sort une infinité (dénombrable) de nouveaux clients. Chaque client est vétu d'un T-shirt numéroté : 1,2,3,4,5,6,7,8...

1) Le premier soir : un nouveau client se présente.

2) Le deuxième soir : 18 513 nouveaux clients se présentent.

3) Le troisième soir : un bus de nouveaux clients se gare devant l'hôtel. De ce bus sort une infinité (dénombrable) de nouveaux clients. Chaque client est vétu d'un T-shirt numéroté : 1,2,3,4,5,6,7,8...

4) Le quatrième soir : une infinité (dénombrable) de bus se garent devant l'hôtel

1) Le premier soir : un nouveau client se présente.

2) Le deuxième soir : 18 513 nouveaux clients se présentent.

3) Le troisième soir : un bus de nouveaux clients se gare devant l'hôtel. De ce bus sort une infinité (dénombrable) de nouveaux clients. Chaque client est vétu d'un T-shirt numéroté : 1,2,3,4,5,6,7,8...

4) Le quatrième soir : une infinité (dénombrable) de bus se garent devant l'hôtel (en fait le parking de l'hôtel infini est un parking infini, c'est la moindre des choses).

1) Le premier soir : un nouveau client se présente.

2) Le deuxième soir : 18 513 nouveaux clients se présentent.

3) Le troisième soir : un bus de nouveaux clients se gare devant l'hôtel. De ce bus sort une infinité (dénombrable) de nouveaux clients. Chaque client est vétu d'un T-shirt numéroté : 1,2,3,4,5,6,7,8...

4) Le quatrième soir : une infinité (dénombrable) de bus se garent devant l'hôtel (en fait le parking de l'hôtel infini est un parking infini, c'est la moindre des choses). Les bus sont numérotés 1,2,3,4,5,6,7,8...

1) Le premier soir : un nouveau client se présente.

2) Le deuxième soir : 18 513 nouveaux clients se présentent.

3) Le troisième soir : un bus de nouveaux clients se gare devant l'hôtel. De ce bus sort une infinité (dénombrable) de nouveaux clients. Chaque client est vétu d'un T-shirt numéroté : 1,2,3,4,5,6,7,8...

4) Le quatrième soir : une infinité (dénombrable) de bus se garent devant l'hôtel (en fait le parking de l'hôtel infini est un parking infini, c'est la moindre des choses). Les bus sont numérotés 1,2,3,4,5,6,7,8... De chaque bus sort une infinité (dénombrable) de clients.

1) Le premier soir : un nouveau client se présente.

2) Le deuxième soir : 18 513 nouveaux clients se présentent.

3) Le troisième soir : un bus de nouveaux clients se gare devant l'hôtel. De ce bus sort une infinité (dénombrable) de nouveaux clients. Chaque client est vétu d'un T-shirt numéroté : 1,2,3,4,5,6,7,8...

4) Le quatrième soir : une infinité (dénombrable) de bus se garent devant l'hôtel (en fait le parking de l'hôtel infini est un parking infini, c'est la moindre des choses). Les bus sont numérotés 1,2,3,4,5,6,7,8... De chaque bus sort une infinité (dénombrable) de clients.
Pour être sûrs de ne pas perdre leurs clients, les organisateurs leur font porter un T-shirt sur lequel figure deux numéros :

1) Le premier soir : un nouveau client se présente.

2) Le deuxième soir : 18 513 nouveaux clients se présentent.

3) Le troisième soir : un bus de nouveaux clients se gare devant l'hôtel. De ce bus sort une infinité (dénombrable) de nouveaux clients. Chaque client est vétu d'un T-shirt numéroté : 1,2,3,4,5,6,7,8...

4) Le quatrième soir : une infinité (dénombrable) de bus se garent devant l'hôtel (en fait le parking de l'hôtel infini est un parking infini, c'est la moindre des choses). Les bus sont numérotés 1,2,3,4,5,6,7,8... De chaque bus sort une infinité (dénombrable) de clients.
Pour être sûrs de ne pas perdre leurs clients, les organisateurs leur font porter un T-shirt sur lequel figure deux numéros :
le premier est celui de leur bus et le second est celui de leur place dans ce bus.

Dîner à l’hôtel Hilbert.

Dîner à l'hôtel Hilbert.

L'hôtel Hilbert est en fait un hôtel-restaurant et propose un menu

Dîner à l'hôtel Hilbert.

L'hôtel Hilbert est en fait un hôtel-restaurant et propose un menu infini bien sûr !

Dîner à l’hôtel Hilbert.

L’hôtel Hilbert est en fait un hôtel-restaurant et propose un menu infini bien sûr !

Les plats sont numérotés 1,2,3,4,5,6,7,8....

Dîner à l'hôtel Hilbert.

L'hôtel Hilbert est en fait un hôtel-restaurant et propose un menu infini bien sûr !

Les plats sont numérotés 1,2,3,4,5,6,7,8....

Les clients peuvent choisir n'importe quelle combinaison de ces plats (finie ou infinie).

Dîner à l'hôtel Hilbert.

L'hôtel Hilbert est en fait un hôtel-restaurant et propose un menu infini bien sûr !

Les plats sont numérotés 1,2,3,4,5,6,7,8....

Les clients peuvent choisir n'importe quelle combinaison de ces plats (finie ou infinie).

Une fois de plus, l'hôtel de Hilbert est plein et chaque client choisit une combinaison différente de plats.

Dîner à l’hôtel Hilbert.

L’hôtel Hilbert est en fait un hôtel-restaurant et propose un menu infini bien sûr !

Les plats sont numérotés 1,2,3,4,5,6,7,8....

Les clients peuvent choisir n’importe quelle combinaison de ces plats (finie ou infinie).

Une fois de plus, l’hôtel de Hilbert est plein et chaque client choisit une combinaison différente de plats.

C’est alors qu’un nouveau client se présente et exige un menu différent des autres.

Dîner à l’hôtel Hilbert.

L’hôtel Hilbert est en fait un hôtel-restaurant et propose un menu infini bien sûr !

Les plats sont numérotés 1,2,3,4,5,6,7,8....

Les clients peuvent choisir n’importe quelle combinaison de ces plats (finie ou infinie).

Une fois de plus, l’hôtel de Hilbert est plein et chaque client choisit une combinaison différente de plats.

C’est alors qu’un nouveau client se présente et exige un menu différent des autres.

Montrer que Mr Hilbert peut le satisfaire (quels que soient les choix des précédents clients) !

Dîner à l'hôtel Hilbert.

L'hôtel Hilbert est en fait un hôtel-restaurant et propose un menu infini bien sûr !

Les plats sont numérotés 1,2,3,4,5,6,7,8....

Les clients peuvent choisir n'importe quelle combinaison de ces plats (finie ou infinie).

Une fois de plus, l'hôtel de Hilbert est plein et chaque client choisit une combinaison différente de plats.

C'est alors qu'un nouveau client se présente et exige un menu différent des autres.

Montrer que Mr Hilbert peut le satisfaire (quels que soient les choix des précédents clients) !

Que cela signifie-t-il ?