

## L'HÔTEL DE HILBERT

L'hôtel de Hilbert, ou hôtel infini de Hilbert, est une image attribuée au mathématicien allemand David Hilbert (1862-1943) qui illustre une propriété surprenante des ensembles infinis : une partie stricte d'un ensemble peut avoir "autant d'éléments" que le tout.

Imaginons donc qu'un hôtel (fictif!), tenu par Mr Hilbert, possède une infinité de chambres numérotées par les entiers naturels (par  $\mathbb{N}^*$  en fait) : 1,2,3,4,5,6,7,....

Tous les soirs l'hôtel est plein : chaque chambre est occupée par exactement un client. Chaque soir de nouveaux clients arrivent, à la recherche d'une chambre. La situation semble sans espoir. Malgré tout, Mr Hilbert essaye de leur trouver une chambre. Bien entendu, chaque ancien client doit encore avoir une chambre et être seul dans sa chambre.

Dans chacun des cas suivants, pouvez vous dire si Hilbert va s'en sortir et si oui... comment ?

1) Le premier soir un nouveau client se présente.

2) Le deuxième soir, 1 million de nouveaux clients se présentent.

3) Le troisième soir un bus de nouveaux clients se gare devant l'hôtel. De ce bus sort une infinité (dénombrable) de nouveaux clients. Chaque client est vêtu d'un T-shirt numéroté : 1,2,3,4,5,6,7,8,....

4) Le quatrième soir une infinité (dénombrable) de bus se gare devant l'hôtel (en fait le parking de l'hôtel infini est un parking infini, c'est la moindre des choses). Les bus sont numérotés 1,2,3,4,5,6,7,8... De chaque bus sort une infinité (dénombrable) de clients. Pour être sûrs de ne pas perdre leurs clients, les organisateurs leur font porter un T-shirt sur lequel figure deux numéros : le premier est celui de leur bus et le second est celui de leur place dans ce bus.

5) Après toutes ces émotions, la dernière soirée se présente plutôt bien : exceptionnellement, l'hôtel est vide. Détendu, Hilbert se prépare à fermer et à passer une soirée tranquille avec Mme Hilbert. C'est alors qu'un énorme bus arrive. Ce bus contient autant de clients qu'il y a de nombres réels dans l'intervalle  $[0, 1[$ . D'ailleurs, chaque client arbore fièrement un T-shirt (infini) sur lequel est inscrit un nombre réel appartenant à  $[0, 1[$ . Bien entendu chaque réel de  $[0, 1[$  a son client et deux clients n'ont pas le même réel....