Le théorème de Stone et von Neumann

Uwe Franz (Université de Bourgogne Franche-Comté)

Séminaire Epiphymath et Ecole thématique du Barboux

Besançon (26/01/2017) et Frasne (31/01–3/02/2017)

Résumé

Je vais introduire le groupe de Heisenberg-Weyl et démontrer le théorème de Stone et von Neumann qui classifie ses représentations unitaires. Je vais aussi parler du rôle de ce théorème dans la démonstration de l'équivalence de la mécanique matricielle de Heisenberg et la mécanique ondulatoire de Schrödinger.

Plan de l'exposé

- Motivation du problème (mécanique quantique)
- Algèbres et groupes de Lie
- Le théorème de Stone von Neumman et sa démonstration

La naissance de la mécanique quantique (a)

La "vieille" mécanique quantique : Depuis la fin du 19ème siècle

- 1900 Max Planck
- 1905 Albert Einstein
- 1913 Niels Bohr
- 1916 Arnold Sommerfeld
- 1924 Louis de Broglie

La naissance de la mécanique quantique (b)

La “révolution” :

- 1925-26 Erwin Schrödinger (mécanique ondulatoire) et Werner Heisenberg (mécanique matricielle)

La naissance de la mécanique quantique (c)

Accomplissement

- 1926-1930 Après la “percée” de Schrödinger et Heisenberg, l’essentiel de la mécanique quantique (et de son formalisme mathématique) était développé très rapidement par Born, Jordan, Dirac, Pauli, von Neumann, Weyl, Wigner, ...

Un exemple

Considérons une particule (1-dim) de masse m dans un potentiel $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, par exemple

- oscillateur harmonique : $V(x) = kx^2$;
- atome d’hydrogène (loi de Coulomb) : $V(x) = \frac{q_1 q_2}{|x|}$.

Elle a l’énergie (= fonction de Hamilton)

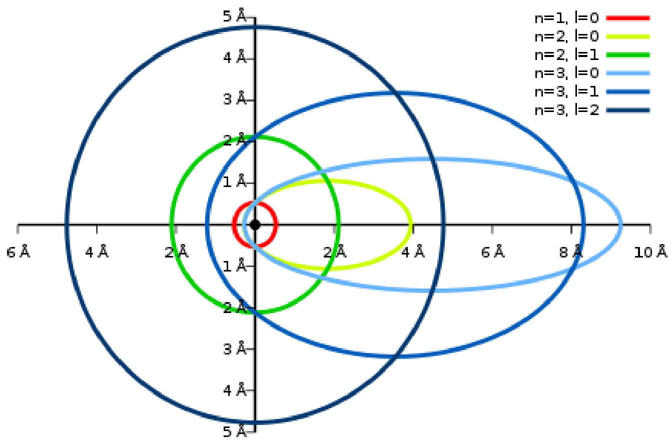
$$E = H(p, x) = \frac{1}{2m}p^2 + V(x)$$

où $p = m\dot{x}$ = impulsion.
En dérivant l’énergie on obtient les équations du movement :

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{p} & = & -V'(x) \\ (\dot{x} & = & \frac{p}{m}) \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad m\ddot{x} = -V'(x)$$

La “vieille” mécanique quantique de Bohr et Sommerfeld

Niels Bohr et Arnold Sommerfeld :



La mécanique matricielle de Heisenberg

Werner Heisenberg cherche un formalisme qui n'utilise pas de quantités qui ne sont pas observable.
Il arrive (avec l'aide de Max Born et Ernst Pascual Jordan) à la procédure suivante :

- remplacer p et x par des "matrices" P et X
- qui vérifient la "relation d'Heisenberg"

$$PX - XP = \frac{h}{2\pi i} I$$

- et qui rendent $H(P, X)$ diagonal.
- Les coefficients diagonaux de $H(P, X)$ (=valeurs propres) sont les valeurs possibles de l'énergie du système.

On impose aussi la condition que P, X, $H(P, X)$ sont auto-adjoints (mais on 1925-1926 ces conditions "techniques" n'étaient pas encore bien formulées).

La mécanique ondulatoire de Schrödinger

Motivée par les idée de Louis De Broglie, Erwin Schrödinger considére un problème variationnel qui l'amène à l'équation

$$\Delta\psi - \frac{2m}{\hbar^2}\Big(E - V(x)\Big)\psi = 0$$

où $\Delta = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$.
Les valeurs de E pour lesquelles l'équation admet des solutions "bornées et bien définies" (dans $L^2(\mathbb{R})$) sont les valeurs possibles de l'énergie du système.

Une question essentielle en 1926

Question

La mécanique ondulatoire de Schrödinger et la mécanique matricielle de Heisenberg donnent les mêmes resultats (pour l'oscillateur harmonique, l'atome d'hydrogène, ...) — sont-elles équivalentes?

L'équivalence en 1926

Aprés la publication de l'article de Schrödinger plusieurs auteurs "démontrent" l'équivalence des deux versions de la mécanique quantiques :

- Erwin Schrödinger (Ann. Physik, manuscrit recu le 18 mars 1926)
- Wolfgang Pauli (dans une lettre à Jordan datée du 12 avril 1926, retrouvée par B.L. van der Waerden dans les années 1970)
- Carl Eckart (Physical Review, manuscrit du 7 juin 1926)

Ces auteurs remarquent que la représentation de Schrödinger

$$Pf = \frac{\hbar}{i}\frac{df}{dx} \quad \text{et} \quad Xf = xf,$$

vérifie la relation de Heisenberg et en déduisent que la mécanique matricielle de Heisenberg implique la mécanique ondulatoire de Schrödinger.

Réalisations inéquivalentes

De 1927 à 1931 (a)

- 1927 Hermann Weyl propose de remplacer la relation de Heisenberg par

$$\exp(iuP)\exp(ivX) = \exp(iuv\hbar)\exp(ivX)\exp(iuP) \qquad \text{pour } u, v \in \mathbb{R}$$

De 1927 à 1931 (b)

- 1930 Marshall Harvey Stone définit les opérateurs

$$T = XPX - P \quad \text{et} \quad S = \frac{X-i}{X+i}$$

et dit que "The determination of their spectra, under the hypothesis of irreducibility, can then be effected and leads easily to the construction of the desired transformation[1] by means of a device previously employed by J.v. Neumann in a rather different connection".

[1] qui donne équivalence unitaire avec la représentation de Schrödinger

De 1927 à 1931 (c)

- 1931 John von Neumann démontre le théorème de Stone et von Neumann, c-à-d ils démontre que toutes les solutions irreductibles de la relation de Weyl sont unitairement équivalentes à celle de Schrödinger.[2]

[2] Il écrit : "Beweisansätze hierfür gab Stone an, jedoch ist ein Beweise auf dieser Gundlage, wie mir Herr Stone freundlichst mitteilte, nicht erbracht worden".

Algèbres de Lie

Definition

Une algèbre de Lie (sur le corps $\mathbb{K}$) $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni d'une application bilinéaire

$$[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

t.q.

(a) $[X, Y] = -[Y, X]$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$, (anti-symétrie);

(b) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, (identité de Jacobi).

Exemples

1. Si A est une algèbre associative, alors $(A, [\cdot,\cdot])$ avec
$$[a,b] = ab - ba \qquad \text{pour } a,b \in A,$$
est une algèbre de Lie.
2. $M_n(\mathbb{R})$ et $M_n(\mathbb{C})$ sont des algèbres de Lie (sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, resp.) avec $[X,Y] = XY - YX$.
3. L'algèbre de Lie de Heisenberg-Weyl :
$\mathbb{R}^3 \cong \mathrm{Lin}\{X,P,E\}$ est une algèbre de Lie avec
$$\big[(u_1,v_1,t_1),(u_2,v_2,t_2)\big] = (0,0,v_1u_2 - u_1v_2)$$
On dénotera cette algèbre de Lie par $\mathfrak{hw}$. Les vecteur de la base $\{X,P,E\}$ vérifient les relations :
$$[P,X] = E, \qquad [X,E] = [P,X] = 0.$$

Définition

Une représentation d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur un espace vectoriel V est une application linéaire
$$\pi : \mathfrak{g} \to \mathcal{L}(V)$$
t.q.
$$\pi([X,Y]) = \pi(X)\pi(Y) - \pi(Y)\pi(X) \qquad \text{pour } X,Y \in \mathfrak{g}.$$

Théorème d'Ado

Toute algèbre de Lie de dimension finie admet une représentation fidèle sur une espace vectoriel de dimension finie.

Voir Theorem 7.4.1 dans Hilgert&Neeb (2012).

Exemples de représentations de $\mathfrak{hw}$

1. $$\rho_\hbar(X) = ix, \qquad \rho_\hbar(P) = \hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \qquad \rho_\hbar(E) = i\hbar,$$
c-à-d (pour $\psi \in S(\mathbb{R})$)
$$\begin{aligned} \rho_\hbar(X)\psi(x) &= ix\psi(x), \\ \rho_\hbar(P)\psi(x) &= \hbar\psi'(x), \\ \rho_\hbar(E)\psi(x) &= i\hbar\psi(x). \end{aligned}$$
définit une représentation de $\mathfrak{hw}$ sur l'espace de Schwartz $S(\mathbb{R})$.
2. $$\pi\big(\underbrace{(u,v,t)}\big) = \begin{pmatrix} 0 & v & t \\ 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = uX + vP + tE$$
définit une représentation de $\mathfrak{hw}$ sur $\mathbb{R}^3$.

Ces deux représentations sont fidèles (c-à-d π est injectif).

Groupes de Lie

Définition

Un groupe de Lie $(G,\bullet)$ est une variété (C^∞), muni d'une multiplication $\bullet : G \times G \to G$ qui en fait un groupe, si de plus la multiplication
$$\bullet : G \times G \to G, \quad (g_1,g_2) \mapsto g_1 \bullet g_2,$$
et l'inverse
$$\cdot^{-1} : G \to G, \quad g \mapsto g^{-1},$$
sont C^∞.

Exemples

$(\mathbb{R}^n,+)$, $(\mathbb{C}^n,+)$, $(GL(n,\mathbb{R}),\circ)$ et $(GL(n,\mathbb{C}),\circ)$ sont des groupes de Lie.

Le groupe de Heisenberg-Weyl $HW = (\mathbb{R}^3, \bullet)$

$\mathbb{R}^3$ est un groupe de Lie avec la multiplication

$$(u_1, v_1, t_1) \bullet (u_2, v_2, t_2) = \left(u_1 + u_2, v_1 + v_2, t_1 + t_2 + \frac{1}{2}(v_1 u_2 - u_1 v_2)\right)$$

est un groupe de Lie.
Notons que l'inverse par rapport à cette multiplication est donné par

$$(u, v, t)^{-1} = (-u, -v, -t).$$

Soit G un groupe de Lie. Pour $g \in G$ notons $L_g : G \to G$ la multiplication à gauche par g, c-à-d $L_g(x) = gx$ pour $x \in G$.

Définition

Un champs vectoriel X sur un groupe de Lie est dit invariant à gauche si

$$X = (L_g)_* X = T(L_g) \circ X \circ L_g^{-1}$$

pour tout $g \in G$. Notons $L(G)$ l'espace des champs vectoriels invariants à gauche sur G.

Exemple

Soit $\gamma : \mathbb{R} \to G$ un homomorphisme de groupes continu. Alors

$$(X^\gamma f)(h) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f\big(h\gamma(t)\big), \qquad f \in C^\infty(G), h \in G,$$

définit un champs vectoriel invariant à gauche sur G.
Tous les champs vectoriel invariant à gauche sur G sont de cette forme.

Théorème

Les champs vectoriel invariant à gauche sur un groupe de Lie G forment une algèbre de Lie avec le crochet

$$[X, Y](g) = X\big(Y(f)\big) - Y\big(X(g)\big)$$

pour $X, Y \in L(G)$, $g \in C^\infty(G)$.

Définition

On appelle $\big(L(G), [\cdot, \cdot]\big)$ l'algèbre de Lie de G.

Le troisième théorème de Lie

Pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension finie il existe un groupe de Lie G tel que

$$\mathfrak{g} = L(G).$$

Voir Theorem 9.4.11 dans Hilgert&Neeb (2012).

Remarques

1. G est unique si on demande qu'il est connexe et simplement connexe.
2. Si $\mathfrak{g} \subseteq M_n(R)$ (ou $\mathfrak{g} \subseteq M_n(C)$), alors on peut prendre pour G le sous-groupe fermé de $GL(n, \mathbb{R})$ (ou $GL(n, \mathbb{C})$, resp.) engendré par

$$\{\exp(X); X \in \mathfrak{g}\}$$

avec

$$\exp(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{X^n}{n!}.$$

Exemple : Le groupe et l'algèbre de Heisenberg-Weyl

On a

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & v & t \\ 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I + \begin{pmatrix} 0 & v & t \\ 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & uv \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & v & t+\frac{uv}{2} \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & v_1 & t_1 \\ 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0 & v_2 & t_2 \\ 0 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & v_1 & t_1+\frac{u_1v_1}{2} \\ 0 & 1 & u_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & v_2 & t+\frac{u_2v_2}{2} \\ 0 & 1 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & v_1+v_2 & t_1+\frac{u_1v_1}{2}+v_1u_2+t_2+\frac{u_2v_2}{2} \\ 0 & 1 & u_1+u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \exp\begin{pmatrix} 1 & v_1+v_2 & t_1+t_2+\frac{v_1u_2-v_2u_1}{2} \\ 0 & 1 & u_1+u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[

label=HW]Conclusion

$$HW \ni (u,v,t) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & v & t+\frac{uv}{2} \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 0 & v & t \\ 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(3,\mathbb{R})$$

est un isomorphisme entre le groupe de Heisenberg-Weyl et le groupe des matrices réelles triangulaires supérieurs de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'algèbre de Lie $L(HW)$

Représentations unitaire

Définition

Soit H un espace de Hilbert. On appelle

$$\mathcal{U}(H) = \{U \in \mathcal{B}(H); U^*U = I_H = UU^*\}$$

le groupe unitaire de H. Muni de la topologie d'opérateurs forte c'est une groupe topologique (c-à-d $(g_1, g_1) \mapsto g_1 \bullet g_2$ et $g \mapsto g^{-1}$ sont continus).

Définition

Soit G un groupe topologique. Une représentation unitaire de G sur un espace de Hilbert H est une homomorphisme (de groupes topologique)

$$\pi : G \to \mathcal{U}(H).$$

Définition

Deux représentations unitaires $\pi_1 : G \to \mathcal{U}(H_1)$ et $\pi_2 : G \to \mathcal{U}(H_2)$ sont dites équivalentes s'il existe un opérateur unitaire $V : H_1 \to H_2$ t.q.

$$\pi_1(g) = V^*\pi_2(g)V \qquad \forall g \in G.$$

Définition

Un sous-espace $K \subseteq H$ est dit invariant si $\pi(g)k \in K$ pour tout $g \in G$ et $k \in K$.
Une représentation unitaire est appelée irréductible si $\{0\}$ est H sont les seuls sous-espaces fermés invariants.

le théorème de Stone et von Neumann

Le but de cet exposé est de démontrer le théorème suivant :

Théorème (Von Neumann 1931)

Toute représentation unitaire irréductible du groupe de Heisenberg-Weyl est équivalente à une représentation des deux familles suivantes :

- les représentations de dimension un (sur $H = \mathbb{C}$) :

$$\theta_{x,p}(u,v,t) = \exp\big(i(ux + vp)\big)$$

  avec $x, y \in \mathbb{R}$;
- les representations de dimension infinie (sur $H = L^2(\mathbb{R})$) :

$$\rho_\hbar(u,v,t)\psi(x) = \exp\big(i\hbar(t + \frac{uv}{2}) + iux\big)\psi(x + \hbar v)$$

  avec $\hbar \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Voir par exemple Theorem (1.59) dans Folland (1989).

Interprétation physique

On a

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \rho_\hbar(t,0,0) &= ix, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \rho_\hbar(0,t,0) &= \hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \rho_\hbar(0,0,t) &= i\hbar I, \end{aligned}$$

sur un domaine convenable (par exemple $S(\mathbb{R})$).
La représentation de Schrödinger est l'unique solution de la relation de Heisenberg qui "s'intègre" en une représentation unitaire irréductible du groupe de Heisenberg-Weyl.

Stratégie

1. Il est clair que les représentation de dim=1 sont irréductibles, et on démontre que le représentation $\rho_\hbar$ le sont aussi.
2. On peut montrer à l'aide du Lemme de Schur ▸ Schur qu'il existe pour toute représentation unitaire irréductible π de HW un réel $\hbar$ tel que

$$\pi(0,0,t) = e^{i\hbar t} I_H$$

3. Si $\hbar = 0$, alors la représentation passe au quotient

$$HW/\{g(0,0,t); t \in \mathbb{R}\} \cong (\mathbb{R}^2, +)$$

   est il est facile à voir que π est équivalente à une des $\theta_{x,p}$.
4. Si $\hbar \neq 0$, alors

$$\sigma_\hbar : HW \to HW, \quad \sigma_\hbar(u,v,t) = (u, v/\hbar, t/\hbar)$$

   définit un automorphisme de HW t.q. $\pi \circ \sigma_\hbar(0,0,t) = e^{it} I_H$, il suffit donc de considérer le cas $\hbar = 1$. (On a bien $\rho_\hbar \circ \sigma_\hbar = \rho_1$.)

Les opérateurs de Weyl

Soit π donc une représentation unitaire irréductible de HW telle que $\pi(0,0,t) = e^{it} I_H$ pour $t \in \mathbb{R}$.
Posons
$$W(u,v) = \pi(u,v,0) \qquad \text{pour } u,v \in \mathbb{R},$$
et
$$W(f) = \int_{\mathbb{R}^2} f(u,v)\pi(u,v,0)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \qquad \text{pour } f \in L^1(\mathbb{R}^2).$$
On peut justifier la définition de $W(f)$ par le théorème de Riesz :
Pour $\phi \in H$ on définit une forme linéaire continue par
$$H \ni \psi \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} f(u,v)\langle \pi(u,v,0)\phi, \psi\rangle \mathrm{d}u\mathrm{d}v \in \mathbb{C},$$
etc.

Les relations de Weyl

On a
$$\begin{aligned} W(u_1,v_1)W(u_2,v_2) &= \pi(u_1,v_1,0)\pi(u_2,v_2,0)\\ &= \pi\big(u_1+u_2, v_1+v_2, \frac{v_1u_2 - u_1v_2}{2}\big)\\ &= exp\big(i\frac{v_1u_2-u_1v_2}{2}\big)W(u_1+u_2, v_+v_2)\\ &= \exp\big(i(v_1u_2-u_1v_2)\big)W(u_2,v_2)W(u_1,v_1)\end{aligned}$$

Proposition

Soient $f, f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $u,v \in \mathbb{R}$. Nous avons

1. $$W(f)^* = W(f^\star)$$
   avec $f^\star(x,y) = \overline{f(-x,-y)}$;
2. $$W(u,v)W(f) = W\big(\ell_{u,v}(f)\big)$$
   avec $\ell_{u,v}f(x,y) = e^{i(vx-uy)/2}f(x-u,y-v)$;
3. $$W(f)W(u,v) = W\big(r_{u,v}(f)\big)$$
   avec $r_{u,v}f(x,y) = e^{i(yu-xv)/2}f(x-u,y-v)$;
4. $$W(f_1)W(f_2) = W(f_1\sharp f_2)$$
   avec $(f_1\sharp f_2)(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2}\exp\big(i\frac{vx-uy}{2}\big)f_1(u,v)f_2(x-u,y-v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ le produit de Moyal ("twisted" convolution).

Lemme

$\pi : L^1(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{B}(H)$ est injectif.

Démonstration : soit $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ t.q. $W(f) = 0$. Alors
$$\begin{aligned} 0 &= \langle \phi, W(u,v)W(f)W(-u,-v)\psi\rangle\\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \exp\big(i(vx-uy)\big)f(x,y)\langle\phi,\pi(x,y,0)\psi\rangle \mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$
pour tous $u,v \in \mathbb{R}$, $\phi,\psi \in H$. D'où (inversion de Fourier)
$$f(x,y)\langle\phi,\pi(x,y,0)\psi\rangle = 0 \qquad \text{p.s.}$$
pour tous $\phi,\psi \in H$, d'où $f = 0$ p.s.

Lemme

Pour $\phi_0(x,y) = \frac{1}{2^{3/2}\pi}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4}\right)$, on a

$$W(\phi_0)W(u,v)W(\phi_0) = \exp\left(-\frac{u^2+v^2}{4}\right)W(\phi_0)$$

En particulier,

$$W(\phi_0)^2 = W(\phi_0) = W(\phi_0)^*$$

c-à-d $\Phi_0 := W(\phi_0)$ est une projection orthogonale.

Démonstration : ▸ Calcul 1

Proposition

Soit K l'image de la projection $\Phi_0 = W(\phi_0)$. Alors π est irréducible ssi $\dim(K) = 1$.

Démonstration : D'après le premier Lemme $\Phi_0 \neq 0$, d'où $\dim(K) \geq 1$.
Soit (ξ_α) une base orthonormale pour K et

$$H_\alpha = \overline{\mathrm{Lin}}\{W(u,v)\xi_\alpha; u,v \in \mathbb{R}\}$$

le sous-espace fermé engendré par $W(u,v)\xi_\alpha$, $u,v\in\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\langle W(u_1,v_1)\xi_\alpha, W(u_2,v_2)\xi_\beta\rangle &= \langle W(u_1,v_1)\Phi_0\xi_\alpha, W(u_2,v_2)\Phi_0\xi_\beta\rangle \\ &= \langle \xi_\alpha, \Phi_0 W(-u_1,-v_1)W(u_2,v_2)\Phi_0\xi_\beta\rangle \\ &= \exp\left(i\frac{u_1v_2-v_1u_2}{2}\right)\exp\left(-\frac{(u_2-u_1)^2+(v_2-v_1)^2}{4}\right)\langle\xi_\alpha,\xi_\beta\rangle.\end{aligned}$$

On a donc $H_\alpha \perp H_\beta$ pour $\alpha \neq \beta$. Les H_α sont des sous-espaces fermés invariants. D'où le résultat.

Corollaire

Les “représentations de Schrödinger” $\rho_\hbar$, $\hbar \neq 0$, sont irreductibles.

Démonstration : Pour $\pi = \rho_1$ on peut démontrer que $\Phi_0 = W(\phi_0)$ est la projection sur l'espace uni-dimensionnelle engendré par

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}}\exp(-x^2/2).$$

▸ Calcul 2

Fin de la démonstration

Soit ξ_0 un vecteur de norme 1 dans $K = \mathrm{Im}(\Phi_0)$. Alors

$$V : \mathrm{Lin}\{W(u,v)\xi_0; u,v\in\mathbb{R}\} \to L^2(\mathbb{R})$$

avec

$$V\big(W(u,v)\xi_0\big) = \rho_1(u,v,0)\psi_0$$

définit une isométrie, qui s'étend en un opérateur unitaire

$$V : H \to L^2(\mathbb{R}),$$

car $\mathrm{Lin}\{W(u,v)\xi_0; u,v\in\mathbb{R}\}$ est dense dans H.
L'unitaire V vérifie bien

$$\pi(u,v,t) = V^*\rho_1(u,v,t)V$$

pour tout $(u,v,t)\in HW$.

Réferences

- Gerald B. Folland, Harmonic Analysis in Phase Space, Annals of Mathematics Studies 122, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.
- Joachim Hilgert and Karl-Hermann Neeb, Structure and geometry of Lie groups. Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2012.
- John von Neumann, Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren. Math. Ann. 104 (1931), no. 1, 570-578.

Merci!

. . . et bon appétit!

Réalisations inéquivalentes

Il était impossible en 1926 de démontrer rigoureusement l'équivalence.
La relation de Heisenberg admet d'autres solutions inéquivalentes :

$$Pf = \frac{\hbar}{i}\frac{df}{dx} \quad \text{et} \quad Xf = xf,$$

sur $L^2[a,b]$, avec domaines de définition

$$\mathrm{Dom}P = \{f; f(b) = e^{i\phi}f(a), \text{ etc.}\}, \qquad \mathrm{Dom}X = \{f; \text{ etc.}\}$$

vérifient $PX - XP = \frac{\hbar}{i}I$ sur

$$\mathrm{Dom}PX \cap \mathrm{Dom}XP = \{f; f(b) = 0 = f(a), \text{ etc.}\},$$

mais

$$\sigma(P) = \left\{\frac{(2\pi k + \phi)\hbar}{b-a}; k \in \mathbb{Z}\right\} \quad \text{and} \quad \sigma(X) = [a,b].$$

Ces réalisations ne sont pas équivalentes à la *représentation de Schrödinger*! $\Rightarrow$ Il faut imposer des conditions de "régularité" !

Retour

L'algèbre de Lie $L(HW)$

Les sous-groupes à un paramètre de HW sont de la forme

$$\gamma(s) = (\alpha s, \beta s, \gamma s + \frac{s^2}{2}\alpha\beta)$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
On trouve

$$(X^\gamma g)(u,v,t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} f\left((u,v,t) \bullet (\alpha s, \beta s, \gamma s + \frac{s^2}{2}\alpha\beta)\right)$$
$$= \cdots$$

à compléter

Retour

Le Lemme de Schur

Théorème

Une représentation unitaire $\pi : G \to \mathcal{U}(H)$ est irréductible ssi

$$\pi(G)' = \{T \in \mathcal{B}(H); T\pi(g) = \pi(g)T \forall g \in G\} = \mathbb{C}I_H/$$

Esquisse de la démonstration : à compléter

Retour

Calcul 1

à compléter

Retour

Calcul 2

à compléter

Retour

Vecteurs analytiques

Liens entre repr. anti-autoadjoints de $L(G)$ et unitaires de G

Théorème (Nelson 1959

à compléter

etc.

Retour