Le corps des nombres réels

Observation faite dès l'antiquité : la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 n'est pas un rationnel. $\mathbb{Q}$ n'est donc pas suffisant lorsqu'il s'agit de mesurer les longueurs des figures géométriques élémentaires. Il « existe » (au sens concret du terme) un ensemble de nombres plus grand que $\mathbb{Q}$: l'ensemble des mesures de la longueur de n'importe quel segment. C'est sous cet angle à la fois pragmatique et géométrique que les Grecs de l'antiquité concevaient les réels. Il s'agit plus ou moins du point de vue qui a été adopté lorsque l'on vous a enseigné les nombres réels au lycée avec le concept de « la droite des réels ».

C'est à partir du XVIIème siècle que les limites de ce point de vue se sont faites sentir avec les débuts du calcul infinitésimal initié par les travaux de Leibniz et Newton. Il a fallu attendre le XIXème siècle pour que Weierstrass, Cantor et Dedekind formulent pour la première fois une définition axiomatique de l'ensemble des réels, définition indispensable pour pouvoir développer l'analyse moderne dans un cadre rigoureux.

En ce qui nous concerne, ce formalisme va nous permettre de prouver les résultats fondamentaux concernant les suites et fonctions réelles. Parmi ces résultats, il y en a certains qu'on vous a demandé d'admettre au lycée, comme le théorème de convergence des suites croissantes majorées, le théorème des valeurs intermédiaires ou encore le théorème qui caractérise les variations d'une fonction à l'aide du signe de sa dérivée.

I. Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$

Dans cette partie, on rappelle brièvement certaines propriétés des ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$. Le but étant de rester concis et élémentaire, on évite ici tout formalisme (au détriment de la rigueur).

1. $\mathbb{N}$

L'ensemble de tous les entiers naturels $\{0,1,2,\dots\}$, noté $\mathbb{N}$, est un ensemble muni d'une addition (notée +), d'une multiplication (notée ×), d'un ordre (noté $\leqslant$) et qui vérifie le *principe de récurrence* :
Soit A une partie de $\mathbb{N}$. Si A vérifie

i) $0 \in A$,

ii) $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \in A \Rightarrow n+1 \in A$,

alors $A = \mathbb{N}$.
Défaut de l'addition dans $\mathbb{N}$: l'équation $x+1=0$ (par exemple) n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$.

2. $\mathbb{Z}$

L'ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$, est obtenu « en rajoutant » à $\mathbb{N}$ une solution à chaque équation $x+n=0$ où $n \in \mathbb{N}^*$; cette solution est notée $-n$ et est appelée *opposé* de n.
L'ensemble $\mathbb{Z}$ est muni d'une addition, d'une multiplication et d'un ordre qui prolongent ceux de $\mathbb{N}$.
Défaut de la multiplication dans $\mathbb{Z}$: l'équation $2x-1=0$ (par exemple) n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

3. $\mathbb{Q}$

L'ensemble des nombres rationnels, noté $\mathbb{Q}$, est construit par un procédé algébrique général comme « corps des fractions » de $\mathbb{Z}$.
L'ensemble $\mathbb{Q}$ est muni d'une addition, d'une multiplication et d'un ordre, prolongeant ceux de $\mathbb{Z}$, et qui vérifient les règles élémentaires de calcul vues en collège/lycée.
Dans $\mathbb{Q}$, toute équation $ax-b=0$ où $a \in \mathbb{Z}^*$ et $b \in \mathbb{Z}$ admet une unique solution notée $\frac{b}{a}$.

En fait, vous savez que $\mathbb{Q} = \{\frac{b}{a},\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \text{ et } a \neq 0\}$.
Défauts de $\mathbb{Q}$:

- $\mathbb{Q}$ est « plein de trous » (cf. la remarque du IV.3.).
- L'équation $x^2 - 2 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$.

Preuve
On suppose par l'absurde qu'il existe un rationnel x tel que $x^2 = 2$. On peut écrire $x = \frac{p}{q}$ avec $(p,q) \in (\mathbb{Z}^*)^2$. On peut même supposer que p et q sont premiers entre eux (c'est à dire qu'ils n'ont pas de facteur premier en commun). Comme $x^2 = 2$, on a $p^2 = 2q^2$. L'entier p^2 est donc pair et l'on en déduit que p est nécessairement pair. On peut donc écrire $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On obtient alors $p^2 = 4k^2 = 2q^2$, et on en tire $2k^2 = q^2$. L'entier q^2 est donc pair et alors q aussi. p et q sont donc tous deux pairs ce qui est en contradiction avec le fait que p et q n'ont pas de facteur premier en commun.

II. « Construction » de $\mathbb{R}$

1. Définition axiomatique

Théorème 1 (Théorème fondamental)

Il existe un ensemble, appelé *corps des nombres réels* et noté $\mathbb{R}$, muni de 2 lois (opérations) internes $+$ et $\times$ et d'une relation binaire $\leqslant$ et qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; les opérations et l'ordre sur $\mathbb{R}$ prolongent ceux de $\mathbb{Q}$.
2. $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$ est un *corps commutatif totalement ordonné* :
   (a) *Les lois* $+$ *et* $\times$ *sont commutatives* : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x+y = y+x$ et $x \times y = y \times x$.
   (b) $+$ *et* $\times$ *sont associatives* : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad x+(y+z) = (x+y)+z$ et $x\times(y\times z) = (x\times y)\times z$.
   (c) $+$ *et* $\times$ *ont chacune un unique élément neutre* :
   Le rationnel 0 est un neutre pour la loi $+$: $\forall x \in \mathbb{R} \quad x+0 = x$.
   Le rationnel 1 est un neutre pour la loi $\times$: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad x \times 1 = x$.
   (d) *Tout élément de* $\mathbb{R}$ *possède un symétrique pour la loi* $+$:
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un élément de $\mathbb{R}$ (nécessairement unique) qu'on note $-x$ (appelé opposé de x) et qui vérifie $x + (-x) = 0$.
   (e) *Tout élément de* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *possède un symétrique pour la loi* $\times$:
   Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, il existe un élément de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (nécessairement unique) qu'on note x^{-1} (appelé inverse de x) et qui vérifie $x \times x^{-1} = 1$.
   (f) *La loi* $\times$ *est distributive par rapport à la loi* $+$: $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad x\times(y+z) = x\times y + x\times z$.
   (g) *La relation binaire* $\leqslant$ *est réflexive* : $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leqslant x$.
   (h) $\leqslant$ *est antisymétrique* : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x) \Rightarrow x = y$.
   (i) $\leqslant$ *est transitive* : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z) \Rightarrow x \leqslant z$.
   (j) *L'ordre* $\leqslant$ *est total* : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x \leqslant y \quad \text{ou} \quad y \leqslant x$.
   (k) *Compatibilité des lois avec l'ordre* :
   $$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad x \leqslant y \Rightarrow x+z \leqslant y+z \quad \text{et} \quad (x \leqslant y \text{ et } z \geqslant 0) \Rightarrow x \times z \leqslant y \times z$$
3. $\mathbb{R}$ *a la propriété de la borne supérieure* :
   Toute partie de $\mathbb{R}$ qui est non vide et majorée admet une borne supérieure.

Remarques :

- Ce théorème est admis.
- Les axiomes (a) à (f) expriment que $(\mathbb{R},+,\times)$ un *corps commutatif*. Les axiomes (g) à (j) expriment que $\leqslant$ une *relation d'ordre totale* sur $\mathbb{R}$.
- $(\mathbb{Q},+,\times,\leqslant)$ est aussi un corps commutatif totalement ordonné mais il n'a pas la propriété de la borne supérieure.
- Les propriétés 2 et 3 suffisent à caractériser l'ensemble $\mathbb{R}$ au sens où tout corps commutatif totalement ordonné qui possède la propriété de la borne supérieure est égal (à un changment de notation près) à $(\mathbb{R},+,\times,\leqslant)$.
- Il reste à expliquer ce qu'est la propriété de la borne supérieure. Cette propriété est fondamentale ; c'est d'elle que découlent les propriétés les plus importantes de $\mathbb{R}$. Le paragraphe suivant lui est consacré.

2. La propriété de la borne supérieure

a. Majorant et minorant

Définition 2

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- Un réel M est un *majorant* de A lorsque $\forall x \in A \quad x \leqslant M$.
- Un réel $m \in \mathbb{R}$ est un *minorant* de A lorsque $\forall x \in A \quad m \leqslant x$.
- A est une partie *majorée* lorsqu'il existe un majorant de A.
- A est une partie *minorée* lorsqu'il existe un minorant de A.
- A est une partie *bornée* lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

b. Plus grand et plus petit élément

Définition 3

Soit A une partie de E.

- A possède un plus grand élément s'il existe un élément de A qui est aussi un majorant de A. Un tel élément est nécessairement unique et est appelé *le plus grand élément* de A. On le note $\max(A)$.
- A possède un plus petit élément s'il existe un élément de A qui est aussi un minorant de A. Un tel élément est nécessairement unique et est appelé *le plus petit élément* de A. On le note $\min(A)$.

Remarques :

- On peut reformuler le premier point de la définition précédente : une partie $A \subset \mathbb{R}$ possède un plus grand élément si et seulement si il existe $a_0 \in A$ tel que $\forall a \in A \quad a \leqslant a_0$. L'élément a_0 est alors le plus grand élément de A.
- De manière analogue, une partie $A \subset \mathbb{R}$ possède un plus petit élément si et seulement si il existe $a_0 \in A$ tel que $\forall a \in A \quad a_0 \leqslant a$. L'élément a_0 est alors le plus petit élément de A.
- On admettra que toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ possède un plus grand élément. Similairement, toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ possède un plus petit élément.
- Attention, il y a des parties de $\mathbb{R}$ qui sont bornées et qui n'ont ni plus petit ni plus grand élément. C'est le cas par exemple de $A = \{x \in \mathbb{R},\ 0 < x < 1\}$.
- Pour ces parties bornées qui n'ont pas de plus grand élément, on introduit un substitut qui est la notion de borne supérieure.

c. Borne supérieure et inférieure

Définition 4

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit que A admet une borne supérieure lorsque l'ensemble des majorants de A possède un plus petit élément. Dans ce cas on appelle *borne supérieure de* A, qu'on note $\sup(A)$, le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A.
- On dit que A admet une borne inférieure lorsque l'ensemble des minorants de A possède un plus grand élément. Dans ce cas on appelle *borne inférieure de* A, qu'on note $\inf(A)$, le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A.

Remarques :

- En termes formels une partie $A \subset \mathbb{R}$ admet une borne supérieure si il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\forall a \in A \quad a \leqslant \mu$ (μ est un majorant de A) et pour tout majorant M de A on a $\mu \leqslant M$ (μ est le plus petit des majorants de A). μ est alors la borne supérieure de A.
- De manière analogue, une partie $A \subset \mathbb{R}$ admet une borne inférieure si il existe $\nu \in \mathbb{R}$ tel que $\forall a \in A \quad \nu \leqslant a$ et pour tout minorant m de A on a $m \leqslant \nu$.
- Une partie de $\mathbb{R}$ qui n'est pas majorée n'a pas de borne supérieure. C'est le cas de $\{x \in \mathbb{R},\ x > 1\}$.
- Soit $A = \{x \in \mathbb{R},\ 0 < x < 1\}$. L'ensemble des majorants de A est $\{x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 1\}$ et cet ensemble a un plus petit élément qui vaut 1. Donc A possède une borne supérieure et $\sup(A) = 1$. L'ensemble des minorants de A est $\{x \in \mathbb{R},\ x \leqslant 0\}$ et cet ensemble possède un plus grand élément qui vaut 0. Donc A possède une borne inférieure et $\inf(A) = 0$.
- Comme le montre l'exemple précédent, la borne supérieure (ou inférieure) de A (lorsqu'elle existe) n'est pas forcément un élément de A.

Proposition 5

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
A possède un plus grand élément si et seulement si A admet une borne supérieure et $\sup(A) \in A$.
Si c'est le cas, on a alors $\max(A) = \sup(A)$.

Remarque : On a la propriété similaire :
A possède un plus petit élément si et seulement si A admet une borne inférieure et $\inf(A) \in A$.
Si c'est le cas, on a alors $\min(A) = \inf(A)$.

Preuve
On suppose que A possède un plus grand élément que l'on note a_0 ; a_0 est un majorant de A et $a_0 \in A$.
Soit M un majorant de A. Puisque $a_0 \in A$, on a $a_0 \leqslant M$. Donc a_0 est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A. A admet donc une borne supérieure et $\sup(A) = a_0 = \max(A)$.
Réciproquement, on suppose que A admet une borne supérieure et que $\sup(A) \in A$. Par définition de la borne supérieure, $\sup(A)$ est un majorant de A. Puisque $\sup(A) \in A$, $\sup(A)$ est un élément de A qui est un majorant de A donc A possède un plus grand élément et $\max(A) = \sup(A)$.

Pour une partie de $\mathbb{R}$ donnée, il est facile de savoir si elle admet ou non une borne supérieure (ou inférieure) :

Théorème 6

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

1. A admet une borne supérieure ssi A est non vide et majorée.
2. A admet une borne inférieure ssi A est non vide et minorée.

Preuve
L'ensemble des majorants (ou des minorants) de l'ensemble vide est égal à $\mathbb{R}$ qui n'a pas de plus petit élément (respectivement de plus grand élément). On en déduit que l'ensemble vide n'admet ni borne inférieure ni borne supérieure. Il est également clair qu'une partie qui n'est pas majorée (ou pas minorée) ne peut avoir de borne supérieure (respectivement inférieure).
Compte tenu de ces faits, le premier point n'est qu'une reformulation de l'axiome 3) de la « définition du corps des réels » et pour prouver l'équivalence du 2) il suffit de montrer que toute partie non vide et minorée admet une borne inférieure.
Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. Notons B l'ensemble de tous les opposés des éléments de A. Alors B est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. B admet donc une borne supérieure μ. Pour tout $a \in A$, on a $-a \in B$ donc $-a \leqslant \mu$ d'où $-\mu \leqslant a$. $-\mu$ est donc un minorant de A. De plus, si v est un minorant de A alors $-v$ est un majorant de B d'où $\mu \leqslant -v$ (car μ est le plus petit des majorants de B) et donc $v \leqslant -\mu$. $-\mu$ est donc le plus grand des minorants de A c'est-à-dire la borne inférieure de A.

Proposition 7 (Première caractérisation de la borne supérieure (ou inférieure))

- Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$.

$$\mu = \sup(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{i) pour tout } a \in A,\ a \leqslant \mu \\ \text{ii) pour tout } \varepsilon > 0,\ \exists a \in A \text{ tel que } \mu - \varepsilon < a \end{cases}$$

- De manière similaire, soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$.

$$\mu = \inf(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{i) pour tout } a \in A,\ a \geqslant \mu \\ \text{ii) pour tout } \varepsilon > 0,\ \exists a \in A \text{ tel que } a < \mu + \varepsilon \end{cases}$$

Remarque : Le théorème 6 permet de prouver l'existence d'une borne supérieure (ou inférieure). Une fois l'existence établie, la caractérisation précédente peut permettre d'en trouver la valeur.

Preuve
On ne donne la preuve que du premier point.
On suppose que $\mu = \sup(A)$. Alors i) est vraie car μ est majorant de A. Montrons ii). Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\mu - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A puisque μ est le plus petit majorant. Ainsi, il existe un élément de A qui est strictement supérieur à $\mu - \varepsilon$.
Réciproquement, supposons que i) et ii) sont vraies. Alors i) assure que μ est un majorant de A. Il reste à montrer que c'est le plus petit. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe un majorant m de A qui est strictement plus petit que μ. Posons $\varepsilon = \mu - m > 0$. D'après ii), il existe $a \in A$ tel que $m = \mu - \varepsilon < a$. m ne peut donc pas être un majorant de A, ce qui est absurde.

III. Propriétés de $\mathbb{R}$

1. Valeur absolue

Définition 8

Étant donné un réel x, on appelle *valeur absolue de* x, qu'on note $|x|$, le réel positif défini par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Remarque : On vérifie facilement les deux faits suivants par disjonction de cas ($x \geqslant 0$ ou $x < 0$) :
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad -|x| \leqslant x \leqslant |x|$.
- Soit $m \geqslant 0$. $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| \leqslant m \Leftrightarrow -m \leqslant x \leqslant m$.

Proposition 9

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x \times y| = |x| \times |y|$.
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x + y| \leqslant |x| + |y| \quad$ (*Première inégalité triangulaire*).
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y| \quad$ (*Seconde inégalité triangulaire*).

Preuve
Pour le premier point il suffit de constater que $|0| = 0$ et que si $x \neq 0$ alors $|x| > 0$.
Le second point s'obtient facilement par distinction de cas.
On montre la première inégalité triangulaire. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a d'après la remarque précédente $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$ et $-|y| \leqslant y \leqslant |y|$. Par somme, on obtient $-(|x|+|y|) \leqslant x+y \leqslant |x|+|y|$. D'après le deuxième point de la remarque précédente, on en déduit $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.
On montre la seconde inégalité triangulaire. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. D'après la première inégalité triangulaire, on a

$$|x| = |(x - y) + y| \leqslant |x - y| + |y| \quad \text{d'où} \quad |x| - |y| \leqslant |x - y|$$

En échangeant les rôles de x et de y, on a aussi $|y| - |x| \leqslant |y - x|$ et donc $-|x - y| \leqslant |x| - |y|$. On a obtenu

$$-|x - y| \leqslant |x| - |y| \leqslant |x - y|,$$

d'où l'on déduit $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$.

2. $\mathbb{R}$ est archimédien

Théorème 10

$\mathbb{R}$ est *archimédien* : $\forall x > 0 \ \forall A \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N}, \ nx > A$.

Remarque : Il s'ensuit que (et c'est en fait équivalent à) $\mathbb{N}$ n'est pas une partie majorée de $\mathbb{R}$.
En effet, en appliquant ce qui précède avec $x = 1$, on a pour tout réel A l'existence d'un entier naturel $n > A$.

Preuve
Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $x > 0$ et $A \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $nx \leqslant A$. Considérons $B = \{nx,\ n \in \mathbb{N}\}$. B est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée par A. B possède donc une borne supérieure, notons-la μ. Puisque $x > 0$ et par ii) de la proposition 7, il existe $b \in B$ tel que $\mu - x < b$. Comme $b \in B$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $b = n_1 x$. On a alors : $\mu < x + n_1 x = (n_1 + 1)x$ ce qui est absurde.

3. Partie entière

Proposition 11

Pour tout réel x, il existe un unique entier relatif p tel que $p \leqslant x < p+1$.
On appelle cet entier *partie entière* de x et on le note $E(x)$.

Preuve
Soit x un réel. Notons $A = \{n \in \mathbb{Z},\ n \leqslant x\}$.

- *Unicité :* Supposons qu'il existe un entier p tel que $p \leqslant x < p+1$. Alors p est un élément de A et p est également un majorant de A car si $n \in A$ alors $n \leqslant x < p+1$ donc $p > n-1$ donc $p \geqslant n$. On en déduit que p est le plus grand élément de A d'où son unicité.
- *Existence :* A est une partie non vide de $\mathbb{Z}$. En effet, comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \times 1 > |x|$. Alors $-n_0 < -|x| \leqslant x$ d'où $-n_0 \in A$.
  A est une partie majorée de $\mathbb{Z}$. En effet, $n_0 \in \mathbb{Z}$ et on a $n_0 > |x| > x$. Ainsi, pour tout $n \in A$, on a $n \leqslant x < n_0$ donc n_0 est un majorant de A dans $\mathbb{Z}$.
  A possède donc un plus grand élément (voir la remarque qui suit la définition 3), notons-le p. On a $p \in A$ donc $p \leqslant x$ et l'entier $p+1$ n'est pas dans A donc $x < p+1$, d'où l'existence.

4. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Définition 12

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. A est dite *dense dans* $\mathbb{R}$ lorsque pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$ il existe $a \in A$ tel que $x < a < y$.

Théorème 13

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Preuve
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$.
Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n(y-x) > 1$ et donc $nx + 1 < ny$.
Posons $p = E(nx) + 1 \in \mathbb{Z}$. Par définition de la partie entière, on a $p - 1 \leqslant nx < p$ d'où $nx < p < nx + 1 < ny$.
Le rationnel $\frac{p}{n}$ vérifie $x < \frac{p}{n} < y$.

Remarque : Il existe des réels qui ne sont pas des rationnels. On peut en effet montrer que l'équation $x^2 - 2 = 0$ a une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$, que l'on note $\sqrt{2}$ (cf. partie IV.2.). Comme on a vu que cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$, on en déduit que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel. C'est le cas également des constantes π et e, mais il n'est pas possible de les introduire rigoureusement pour le moment et il est plus compliqué de prouver que ce ne sont pas des rationnels.

Corollaire 14

$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Preuve
Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $x<y$. Quitte à remplacer x par 0, on peut supposer que 0 n'est pas compris strictement entre x et y.
On a $\sqrt{2}x<\sqrt{2}y$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe un rationnel r non nul tel que $\sqrt{2}x<r<\sqrt{2}y$. On a alors $x<\frac{r}{\sqrt{2}}<y$. Il reste à montrer que $\frac{r}{\sqrt{2}}$ n'est pas un rationnel.
Par l'absurde : s'il l'était, il existerait $t\in\mathbb{Q}^*$ tel que $t=\frac{r}{\sqrt{2}}$ et donc $\sqrt{2}=\frac{r}{t}$ serait un rationnel.

IV. Applications

1. Caractérisation des intervalles

Définition 15

On appelle *intervalle* de $\mathbb{R}$ toute partie de $\mathbb{R}$ d'un des types suivants (avec a et b deux réels tels que $a\leqslant b$) :

- $\{x\in\mathbb{R},\ a\leqslant x\leqslant b\}$ qu'on note $[a,b]$
- $\{x\in\mathbb{R},\ a<x\leqslant b\}$ qu'on note $]a,b]$
- $\{x\in\mathbb{R},\ a\leqslant x<b\}$ qu'on note $[a,b[$
- $\{x\in\mathbb{R},\ a<x<b\}$ qu'on note $]a,b[$
- $\{x\in\mathbb{R},\ a\leqslant x\}$ qu'on note $[a,+\infty[$
- $\{x\in\mathbb{R},\ a<x\}$ qu'on note $]a,+\infty[$
- $\{x\in\mathbb{R},\ x\leqslant b\}$ qu'on note $]-\infty,b]$
- $\{x\in\mathbb{R},\ x<b\}$ qu'on note $]-\infty,b[$
- $\mathbb{R}$

Remarque : L'ensemble vide est un intervalle : $\varnothing=]0,0]$. Un singleton est un intervalle : $\{x\}=[x,x]$.

Théorème 16

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties I de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété de convexité suivante :

$$\forall(x,y)\in I^2\quad x\leqslant y\Rightarrow[x,y]\subset I.$$

Preuve
Il est assez facile de voir (c'est la transitivité de l'ordre) que tout intervalle vérifie cette propriété.
Réciproquement, soit I une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant cette propriété. Le vide étant un intervalle, on peut supposer I non vide. Il y a alors 4 cas à distinguer selon que I est majorée ou non, minorée ou non. Nous donnons la démonstration dans le cas où I est minorée et non majorée. Les autres cas sont laissés en exercice.
Comme I est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, on peut considérer $a=\inf(I)$. Pour tout $x\in I$, on a $x\geqslant a$ donc $I\subset[a,+\infty[$. Il reste à montrer que $]a,+\infty[\subset I$ car alors I est soit $[a,+\infty[$, soit $]a,+\infty[$.
Soit $x\in]a,+\infty[$. Montrons que $x\in I$.
Posons $\varepsilon=x-a>0$. Comme $a=\inf(I)$, il existe $s\in I$ tel que $s<a+\varepsilon=x$.

Comme I n'est pas majorée, il existe $t \in I$ tel que $t > x$.
D'après la propriété de convexité, on a alors $[s,t] \subset I$ et comme $x \in [s,t]$, on obtient $x \in I$.

2. Racine carrée

Lemme 17

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. $\quad (\forall \varepsilon > 0 \quad a \leqslant b + \varepsilon) \Rightarrow a \leqslant b$.

Preuve
On suppose, par l'absurde, que $a > b$. On pose $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$, on a $\varepsilon > 0$ et donc $a \leqslant b + \varepsilon = \frac{a+b}{2}$. On en tire $a \leqslant b$ ce qui est une contradiction.

Remarque : La conclusion subsiste si $\quad \exists C \geqslant 0, \forall \varepsilon > 0 \quad a \leqslant b + C\varepsilon \quad (\star)$.
En effet, étant donné $\varepsilon > 0$, on peut appliquer $(\star)$ avec $\frac{\varepsilon}{C+1}$ et on obtient $a \leqslant b + C\frac{\varepsilon}{C+1} \leqslant b + \varepsilon$. On est donc ramené au lemme.

Proposition 18

Pour tout réel $a \geqslant 0$, il existe un unique réel positif x tel que $x^2 = a$.
x est appelé la *racine carrée* de a et est noté $\sqrt{a}$.

Preuve
Unicité : Soient x et y deux réels positifs tels que $x^2 = y^2 = a$.
On a alors $x^2 - y^2 = 0$ ou encore $(x+y)(x-y) = 0$ et donc $x = y$ ou $x = -y$. Puisque x et y sont positifs, on obtient $x = y$.

Existence : Considérons $A = \{x \in \mathbb{R}_+,\ x^2 \leqslant a\}$.
La partie A n'est pas vide car $0 \in A$.
La partie A est majorée. En effet, si $x \in A$ alors $x \leqslant \max(1, x^2)$ (distinguer les cas $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $x > 1$). On a alors $\forall x \in A \quad x \leqslant \max(1, a)$.
On en déduit que A possède une borne supérieure que l'on note μ. On va montrer que $\mu^2 = a$.
Montrons que $\mu^2 \leqslant a$. Soit $\varepsilon > 0$.
D'après la caractérisation de la borne supérieure, il existe $x \in A$ tel que $\mu - \varepsilon < x$. On a alors $0 \leqslant \mu - x < \varepsilon$ et on en déduit :

$$\mu^2 - x^2 = (\mu + x)(\mu - x) \leqslant (\mu + x)\varepsilon \leqslant 2\mu\varepsilon$$

Puisque $x^2 \leqslant a$, on en tire $\mu^2 \leqslant a + 2\mu\varepsilon$. Grâce au lemme précédent (et sa remarque), on conclut que $\mu^2 \leqslant a$.
Il reste à montrer que $a \leqslant \mu^2$. Par l'absurde, supposons que $\mu^2 < a$.
Pour $\varepsilon \in]0,1]$ on a l'estimation suivante :

$$(\mu + \varepsilon)^2 - \mu^2 = \varepsilon(2\mu + \varepsilon) \leqslant (2\mu + 1)\varepsilon$$

Si l'on choisit $\varepsilon = \min(1, \frac{a-\mu^2}{2\mu+1})$, on a alors $(2\mu+1)\varepsilon \leqslant a - \mu^2$ et on en déduit

$$(\mu + \varepsilon)^2 - \mu^2 \leqslant (2\mu + 1)\varepsilon \leqslant a - \mu^2$$

On en tire $(\mu + \varepsilon)^2 \leqslant a$ donc $\mu + \varepsilon \in A$. On a alors $\mu + \varepsilon \leqslant \sup(A) = \mu$, ce qui est une contradiction.

Remarque : Une preuve analogue (mais un peu plus technique) permettrait de définir la racine $n-$*ème* d'un réel positif avec n un entier supérieur ou égal à 2.

3. Coupures

Définition 19

On appelle *coupure* de $\mathbb{R}$, tout couple (A, B) de parties de $\mathbb{R}$ vérifiant :

1. A et B sont non vides
2. $A \cap B = \varnothing$
3. $A \cup B = \mathbb{R}$
4. $\forall (a, b) \in A \times B,\ a \leqslant b$

Remarque : Faire un dessin.

Proposition 20

Soit (A, B) une coupure de $\mathbb{R}$. Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$(A, B) = (]-\infty, c],]c, +\infty[) \quad \text{ou} \quad (A, B) = (]-\infty, c[, [c, +\infty[).$$

Preuve
Soit (A, B) une coupure de $\mathbb{R}$.
Soit $a \in A$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $x < a$. Si x n'appartient pas à A, alors d'après 3. on a $x \in B$, et donc d'après 4. $a \leqslant x$, ce qui est absurde. Donc pour tout $x < a$, $x \in A$. On a montré que pour tout $a \in A$, $]-\infty, a] \subset A$.
En particulier si $(x, y) \in A^2$ tel que $x \leqslant y$, $[x, y] \subset]-\infty, y] \subset A$. Donc d'après le Théorème 16, A est un intervalle.
De plus A est non vide (1.), non minoré et majoré (par un élément quelconque de B d'après 4. et 1.). Il existe donc $c \in \mathbb{R}$, ($c = \sup(A)$) tel que A est l'intervalle $]-\infty, c]$ ou $]-\infty, c[$ (ce sont les seuls types d'intervalles non vides, non minorés et majorés).
D'après 2. et 3., B est le complémentaire de A dans $\mathbb{R}$, et on en déduit le résultat.

Remarque : Le fait que toute coupure de $\mathbb{R}$ soit nécessairement de la forme donnée dans la proposition précédente indique que $\mathbb{R}$ est un ensemble « sans trou ». En termes grossiers : « lorsque l'on coupe $\mathbb{R}$ en deux, on coupe toujours au niveau d'un point charnière (le point c) ». Notons que ce n'est pas le cas dans $\mathbb{Q}$, il existe en effet des coupures de $\mathbb{Q}$ (il en existe même une infinité non dénombrable !) « sans point charnière » (dans $\mathbb{Q}$). Sous cet angle $\mathbb{Q}$ est un ensemble « plein de trous ».

Suites numériques

Préliminaire

Définition 1

On appelle *droite numérique achevée*, qu'on note $\overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble $\mathbb{R}$ auquel on adjoint deux éléments $-\infty$ et $+\infty$.
On prolonge à $\overline{\mathbb{R}}$ l'ordre de $\mathbb{R}$ en posant $-\infty \leqslant +\infty$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $-\infty \leqslant x$ et $x \leqslant +\infty$.
Ainsi défini, $(\overline{\mathbb{R}}, \leqslant)$ est un ensemble totalement ordonné qui possède un plus petit et un plus grand élément.

On prolonge aussi (en partie) les opérations + et × à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + (+\infty) = +\infty \quad \text{et} \quad x + (-\infty) = -\infty$
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- $\forall x > 0, \quad x \times (+\infty) = +\infty \quad \text{et} \quad x \times (-\infty) = -\infty$
- $\forall x < 0, \quad x \times (+\infty) = -\infty \quad \text{et} \quad x \times (-\infty) = +\infty$
- $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$, $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$, $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$

Remarque Bien noter que ni $(+\infty) + (-\infty)$ ni $0 \times (\pm\infty)$ n'ont été définis.

I. Généralités

Définition 2

Une *suite numérique* est une application u de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui à l'entier naturel n associe le réel $u(n)$ qu'on note aussi u_n et qu'on appelle *terme de rang* n de la suite.

Notations

- La suite numérique u est traditionnellement notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ voire (u_n).
- L'ensemble des suites numériques est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Remarque Une suite u peut n'être définie qu'à partir d'un certain rang n_0. On note $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une telle suite.
Exemples : $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n \geqslant 1}$ et $\left(\dfrac{1}{n^2 - n}\right)_{n \geqslant 2}$.

Définition 3

Une suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite :

- *(strictement) croissante* si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$ (respectivement $u_{n+1} > u_n$).
- *(strictement) décroissante* si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$ (respectivement $u_{n+1} < u_n$).
- *(strictement) monotone* si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est (strictement) croissante ou $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est (strictement) décroissante.
- *majorée (respectivement minorée)* si $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une partie majorée (respectivement minorée) de $\mathbb{R}$.
- *bornée* si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée et minorée.
- *constante* si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.

Remarque Il existe des suites qui ne sont pas monotones, par exemple la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée *suite extraite (ou sous-suite)* de (u_n) s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante, telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.

Remarque Concrètement une suite extraite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est obtenue en sélectionnant, dans l'ordre des rangs croissants, une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Exemple Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Les suites des termes de rangs pairs $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et des termes de rangs impairs $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Les applications strictement croissantes associées sont respectivement $\varphi(n) = 2n$ et $\psi(n) = 2n+1$.

II. Convergence et divergence

1. Définitions et premières propriétés

Définition 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant n_0 \quad |u_n - \ell| < \varepsilon$$

Remarques

- La définition traduit en termes rigoureux le fait que « les termes de la suite doivent se rapprocher arbitrairement près de ℓ lorsque n augmente ». Cette définition signifie, qu'une précision $\varepsilon > 0$ étant fixée, si l'on souhaite que les termes de la suite soient à une distance plus petite que ε de ℓ, on doit aller au delà d'un certain rang n_0.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0 \quad u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.
- Comme tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient également un intervalle du type $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ pour un certain $\varepsilon > 0$, la formulation précédente est aussi équivalente à :

$$\forall I \text{ intervalle ouvert contenant } \ell \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant n_0 \quad u_n \in I$$

- Dans la caractérisation précédente, pour un intervalle I donné, il y a au plus n_0 termes de la suite qui ne sont pas dans I. On en déduit qu'on peut encore la reformuler de la manière suivante :
  Pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ, il n'y a qu'un nombre fini de termes de la suite qui sont à l'extérieur de I.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \Leftrightarrow (u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $0 \Leftrightarrow (|u_n - \ell|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Définition 6

On dit qu'une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *convergente* lorsqu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Une suite est dite *divergente* lorsqu'elle n'est pas convergente.

Remarque La convergence (ou la divergence) d'une suite ne dépend pas d'un nombre fini (même très grand) de ses termes.

Proposition 7

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique convergente alors il existe un unique réel ℓ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. On appelle ce réel *la limite de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on le note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Preuve
Supposons, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente à la fois vers les réels ℓ_1 et ℓ_2. Soit $\varepsilon > 0$.

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant n_1 \quad |u_n - \ell_1| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \exists n_2 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant n_2 \quad |u_n - \ell_2| < \varepsilon$$

Soit $n_3 = \max(n_1, n_2)$, puisque $n_3 \geqslant n_1$ et $n_3 \geqslant n_2$ on a $\quad |u_{n_3} - \ell_1| < \varepsilon$ et $|u_{n_3} - \ell_2| < \varepsilon$.
Par inégalité triangulaire, on en déduit que : $\quad |\ell_1 - \ell_2| \leqslant |\ell_1 - u_{n_3}| + |u_{n_3} - \ell_2| < 2\varepsilon$.
On a ainsi obtenu : $\forall \varepsilon > 0$, $|\ell_1 - \ell_2| < 2\varepsilon$ ce qui implique (lemme 17, chapitre 1) que $|\ell_1 - \ell_2| \leqslant 0$ et donc $\ell_1 = \ell_2$.

Proposition 8

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Preuve
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique convergente. Notons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
Appliquons la définition de la convergence avec $\varepsilon = 1$. Il existe un rang n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0 \quad |u_n - \ell| < 1$.
Par inégalité triangulaire, on a pour $n \geqslant n_0 \quad |u_n| = |(u_n - \ell) + \ell| \leqslant |u_n - \ell| + |\ell| \leqslant 1 + |\ell|$.
Par ailleurs, $\{u_n,\ 0 \leqslant n \leqslant n_0 - 1\}$ est un ensemble fini de nombres réels, il est donc borné (il a même un plus petit et un plus grand élément). Donc il existe M tel que pour tout $n \leqslant n_0 - 1 \quad |u_n| \leqslant M$.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leqslant \max(1 + |\ell|, M)$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite bornée.

Définition 9

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ lorsque $\quad \forall A > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0 \quad u_n > A$.
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ lorsque $\quad \forall B < 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0 \quad u_n < B$.

Remarque Lorsqu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) on dit également que la suite a pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$), et on le note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (respectivement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$).

Proposition 10

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui a une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $\ell \neq 0$ alors à partir d'un certain rang u_n est du même signe que sa limite. Plus précisément :

- Si $\ell > 0$ alors il existe $\alpha > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0 \quad u_n > \alpha > 0$
- Si $\ell < 0$ alors il existe $\beta < 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0 \quad u_n < \beta < 0$

Preuve
Les deux cas où les limites sont infinies sont immédiats grâce à la définition précédente, on peut même choisir n'importe quel $\alpha > 0$ (respectivement $\beta < 0$).

Prouvons le cas $\ell < 0$. Appliquons la définition de la convergence avec $\varepsilon = |\ell|/2$.
Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0 \quad |u_n - \ell| < |\ell|/2$. Autrement dit, pour $n \geqslant n_0$ on a $\ell - \frac{|\ell|}{2} < u_n < \ell + \frac{|\ell|}{2}$.
Or $|\ell| = -\ell$, d'où pour $n \geqslant n_0 \quad u_n < \frac{\ell}{2} < 0$. D'où le résultat en prenant $\beta = \ell/2$.

2. Comparaisons et limites

Proposition 11 (Passage à la limite dans les inégalités)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques convergentes.
On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geqslant n_0 \quad u_n \leqslant v_n$.
Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Preuve
Notons ℓ et ℓ' les limites respectives de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a : $\quad (\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_1 \quad \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon)$ et $(\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_2 \quad \ell' - \varepsilon < v_n < \ell' + \varepsilon)$.
Soit $n_3 = \max(n_0, n_1, n_2)$. On a $\ell - \varepsilon < u_{n_3} \leqslant v_{n_3} < \ell' + \varepsilon$ et donc $\ell < \ell' + 2\varepsilon$. On en déduit que $\ell \leqslant \ell'$.

Proposition 12

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques.
On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geqslant n_0 \quad u_n \leqslant v_n$.
- si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge aussi vers $+\infty$
- si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge aussi vers $-\infty$

Preuve
Prouvons le premier point, la preuve du second est analogue.
Soit $A > 0$. Il existe n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1 \;\; u_n > A$. Soit $n_2 = \max(n_0, n_1)$. Pour tout $n \geqslant n_2$, on a $v_n \geqslant u_n > A$.
Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Théorème 13 (Théorème d'encadrement)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites numériques.
On suppose que
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite qu'on note ℓ
- il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0 \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$

Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Preuve
Soit $\varepsilon > 0$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes deux vers ℓ donc :

$$(\exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant n_1 \quad \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon) \quad \text{et} \quad (\exists n_2 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant n_2 \quad \ell - \varepsilon < w_n < \ell + \varepsilon)$$

Posons $n_3 = \max(n_0, n_1, n_2)$. Pour tout $n \geqslant n_3$ on a : $\quad \ell - \varepsilon < u_n \leqslant v_n \leqslant w_n < \ell + \varepsilon$.
$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente vers ℓ.

3. Propriétés de $\mathbb{R}$ et suites

Proposition 14

La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ et la suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Preuve
Soit $A>0$. On pose $n_0=E(A)+1$, on a $n_0>A$. Pour tout $n\geqslant n_0$, on a $n>A$. La suite (n) diverge donc vers $+\infty$.
Soit $\varepsilon>0$. On pose $n_0=E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)+1$, on a $n_0>\frac{1}{\varepsilon}$ et donc $\frac{1}{n_0}<\varepsilon$. Pour tout $n\geqslant n_0$ $\quad 0\leqslant\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{n_0}<\varepsilon$. D'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$.

Proposition 15 (Seconde caractérisation de la borne supérieure / inférieure)

- Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et soit $\mu\in\mathbb{R}$.

$$\mu=\sup(A)\Leftrightarrow\begin{cases}\text{i) pour tout } a\in A \quad a\leqslant\mu\\ \text{ii) il existe une suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ d'éléments de } A \text{ telle que } \displaystyle\lim_{n\to+\infty}a_n=\mu\end{cases}$$

- Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ et soit $\nu\in\mathbb{R}$.

$$\nu=\inf(A)\Leftrightarrow\begin{cases}\text{i) pour tout } a\in A \quad \nu\leqslant a\\ \text{ii) il existe une suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ d'éléments de } A \text{ telle que } \displaystyle\lim_{n\to+\infty}a_n=\nu\end{cases}$$

Preuve
Supposons que $\mu=\sup(A)$. i) est vérifié puisque μ est un majorant de A. De plus d'après la première caractérisation de la borne supérieure, $\forall\varepsilon>0\ \exists a\in A$ tel que $\mu-\varepsilon<a$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on utilise cette propriété avec $\varepsilon=\frac{1}{n+1}$ et on choisit un élément $a_n\in A$ tel que $\mu-\frac{1}{n+1}<a_n$. Puisque $a_n\in A$ et $\mu=\sup(A)$, on a également pour tout $n\in\mathbb{N}$ $\quad a_n\leqslant\mu$. On en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}$ $\quad -\frac{1}{n+1}<a_n-\mu\leqslant 0$, ou encore $0\leqslant|a_n-\mu|<\frac{1}{n+1}$.
Grâce au théorème d'encadrement, on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}|a_n-\mu|=0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}a_n=\mu$.
Réciproquement, grâce à i), μ est un majorant de A, montrons que c'est le plus petit. Soit $M\in\mathbb{R}$ un majorant de A. Soit (a_n) une suite d'élements de A qui converge vers μ. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ $\quad a_n\leqslant M$. Par passage à la limite dans ces inégalités, on en déduit $\mu\leqslant M$. μ est donc la borne supérieure de A.

Proposition 16 (Caractérisation de la densité par les suites)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

$$A \text{ est dense dans } \mathbb{R}\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}\ \exists\,(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ une suite d'éléments de } A \text{ telle que } \lim_{n\to+\infty}a_n=x$$

Remarque En particulier pour tout $x\in\mathbb{R}$ il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels et une suite $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'irrationnels telles que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}r_n=\lim_{n\to+\infty}i_n=x$.

Preuve
Supposons A dense dans $\mathbb{R}$. Soit $x\in\mathbb{R}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on peut choisir un élement de A, noté a_n, dans l'intervalle $]x-1/n,x+1/n[$. Par théorème d'encadrement, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente vers x.
Réciproquement, soit $a<b$ deux réels et posons $x=(a+b)/2$. Il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x. Posons $\varepsilon=(b-a)/2$. Par convergence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que

$$\forall n\geqslant n_0\quad a_n\in]x-\varepsilon,x+\varepsilon[=]\tfrac{a+b}{2}-\tfrac{b-a}{2},\tfrac{a+b}{2}+\tfrac{b-a}{2}[=]a,b[$$

a_{n_0} est un élément de A qui est dans l'intervalle $]a,b[$. A est donc dense dans $\mathbb{R}$.

4. Opérations et limites

Proposition 17

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites ayant des limites dans $\overline{\mathbb{R}}$. Soit λ un réel.
Alors, dès que l'opération figurant dans le membre de droite a un sens dans $\overline{\mathbb{R}}$:

- $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
- $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite et $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda u_n) = \lambda \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
- $(u_n\times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Preuve
Le premier point est laissé en exercice. Le second découle du troisième. Nous prouvons le troisième point dans le cas où les limites des suites sont finies. Notons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente, elle est bornée : $\exists K>0,\ \forall n\in\mathbb{N}\quad |v_n|\leqslant K$.
Soit $\varepsilon>0$. Par convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$(\exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\geqslant n_0\quad |u_n-\ell|<\varepsilon)\quad \text{et}\quad (\exists n_1\in\mathbb{N}\ \forall n\geqslant n_1\quad |v_n-\ell'|<\varepsilon)$$

Soit $n_2=\max(n_0,n_1)$. Pour tout $n\geqslant n_2$ on a :

$$|u_nv_n-\ell\ell'| = |(u_n-\ell)v_n+\ell(v_n-\ell')| \leqslant |(u_n-\ell)v_n|+|\ell(v_n-\ell')| < (K+|\ell|)\varepsilon$$

Donc $(u_n\times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et sa limite vaut $\ell\ell'$.

Proposition 18

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n\neq 0$, alors la suite (u_n/v_n) est définie à partir d'un certain rang, est convergente et on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n}$$

Preuve
Grâce au troisième point de la proposition précédente il suffit de prouver la proposition lorsque $u_n=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Comme la limite de $(|v_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle : $\exists\alpha>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant n_0\quad |v_n|>\alpha>0$.
En particulier, la suite $(1/v_n)$ est définie à partir du rang n_0.
Notons $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. Soit $\varepsilon>0$. Par convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\quad\exists n_1\in\mathbb{N}\ \forall n\geqslant n_1\quad |v_n-\ell|<\varepsilon$.
Soit $n_2=\max(n_0,n_1)$. Pour tout $n\geqslant n_2$ on a : $\left|\dfrac{1}{v_n}-\dfrac{1}{\ell}\right| = \dfrac{|\ell-v_n|}{|v_n\ell|}\leqslant\dfrac{\varepsilon}{|\ell|\alpha}$
D'où la convergence de $(1/v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $1/\ell$.

5. Extraction et limites

Lemme 19

Soit $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ une application strictement croissante. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\varphi(n)\geqslant n$.

| *Preuve* Par récurrence, laissée en exercice (voir TD).

Proposition 20

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite ℓ alors toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a également ℓ pour limite.

Preuve
On donne la preuve du cas $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante) une suite extraite.
Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0 \quad |u_n - \ell| < \varepsilon$.
D'après le lemme précédent, $\forall n \geqslant n_0 \quad \varphi(n) \geqslant n \geqslant n_0$ et donc $|u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$. $(u_{\varphi(n)})$ converge donc vers ℓ.

Remarque La proposition sert souvent pour montrer qu'une suite (u_n) est divergente. En effet il suffit de trouver deux sous-suites qui n'ont pas la même limite pour obtenir que (u_n) diverge. Par exemple on peut prouver que la suite $(u_n) = ((-1)^n)$ est divergente en considérant les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

6. Suites de référence

On admet l'existence et les propriétés usuelles des fonctions exponentielle et logarithme. On rappelle que pour $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, x^α est par définition égal à $e^{\alpha \ln(x)}$.

Proposition 21

- Pour tout $a > 1 \quad \lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$ et pour tout $a \in]-1, 1[\quad \lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$.
- Pour tout $\alpha > 0 \quad \lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$.
- Pour tout $\alpha > 0$ et $a > 1 \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$.
- Pour tout $\alpha > 0$ et $a \in]-1, 1[\quad \lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha a^n = 0$.
- Pour tout $\alpha > 0$ et $\beta > 0 \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln(n))^\beta}{n^\alpha} = 0$.
- Pour tout $a > 1 \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

| *Preuve* En exercice (voir TD).

III. Critères de convergence

1. Suites monotones

Théorème 22

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite monotone.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et non minorée alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Preuve
Quitte à considérer la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut se limiter au cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Le cas (u_n) non majorée sera vu en TD.
Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Dans ce cas l'ensemble $\{u_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ est non vide et majoré, il possède donc une borne supérieure. Notons-la μ et montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers μ.
Soit $\varepsilon > 0$. D'après la première caractérisation de la borne supérieure, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu - \varepsilon < u_{n_0}$. Par croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout $n \geqslant n_0 \quad \mu - \varepsilon < u_{n_0} \leqslant u_n$. Comme μ majore $\{u_n,\ n\in\mathbb{N}\}$, on a pour tout $n \geqslant n_0 \quad \mu - \varepsilon < u_n \leqslant \mu$ et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers μ.

Définition 23

Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites *adjacentes* lorsque :
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
- $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Remarque On a alors nécessairement : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$. En effet si ce n'est pas le cas, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} - v_{n_0} > 0$ et par monotonie des deux suites on a pour tout $n \geqslant n_0 \quad u_n - v_n \geqslant u_{n_0} - v_{n_0} > 0$. Par passage à la limite on en déduit $0 \geqslant u_{n_0} - v_{n_0} > 0$ ce qui est absurde.

Théorème 24

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes.
Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Preuve
D'après la remarque, on a pour tout $n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant v_n$ et puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N} \quad u_0 \leqslant u_n$ et $v_n \leqslant v_0$. Il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbb{N} \quad u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. En particulier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et bornées, donc elles convergent. Puisque $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont même limite.

On rappelle qu'un segment I de $\mathbb{R}$ est un intervalle du type $[a, b]$ où a et b sont deux réels tels que $a \leqslant b$. On appelle *longueur* du segment I, notée $\ell(I)$, la quantité $\ell(I) = b - a$.

Corollaire 25 (Théorème des segments emboîtés)

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments de $\mathbb{R}$ qui vérifie :
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{n+1} \subset I_n$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell(I_n) = 0$.

Alors, il existe un unique réel x qui appartient à tous les I_n.

Preuve
Il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = [a_n, b_n]$. Le premier point de l'hypothèse garantit la croissance de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la décroissance de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$; le second point donne $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} b_n - a_n = 0$. Ces deux suites étant adjacentes, elles convergent vers un réel ℓ. On rappelle que $\ell = \sup\{a_n,\ n\in\mathbb{N}\} = \inf\{b_n,\ n\in\mathbb{N}\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$, autrement dit ℓ appartient à tous les I_n.
Montrons l'unicité. Si le réel x appartient à tous les I_n alors pour tout $n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant x \leqslant b_n$ et par passage à la limite on a $\ell \leqslant x \leqslant \ell$, c'est-à-dire $x = \ell$

2. Suites bornées

Théorème 26 (Bolzano-Weierstrass)

De toute suite bornée il est possible d'extraire une suite convergente.

Remarque Nous savons que toute suite convergente est bornée, mais la réciproque de cette implication est fausse comme le montre l'exemple de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le théorème de Bolzano-Weierstrass constitue une réciproque affaiblie (il suffit de passer à une sous-suite).

Preuve
Étant donné un segment $I = [a,b]$, on note $I^- = [a, \frac{a+b}{2}]$ et $I^+ = [\frac{a+b}{2}, b]$.
Soit (u_n) une suite bornée ; il existe $K > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| < K$. Le segment $I_0 = [-K, K]$ contient donc tous les termes de la suite et $\ell(I_0) = 2K$.
Supposons déjà construits des segments $I_0 \supset \cdots \supset I_n$ tels que pour tout $j \in \{0,\dots,n\}$ le segment I_j contient une infinité de termes de la suite (u_n) et $\ell(I_j) = 2^{-j+1}K$. On choisit, parmi les deux segments I_n^- et I_n^+, un segment qui contient une infinité de termes de la suite et on le nomme I_{n+1} (un tel segment existe puisque I_n contient une infinité de termes de la suite). On a alors $I_{n+1} \subset I_n$ et $\ell(I_{n+1}) = \ell(I_n)/2 = 2^{-n}K$.
Par récurrence, on obtient ainsi une suite (I_n) de segments, décroissante pour l'inclusion, dont la longueur tend vers 0 et telle que chaque I_n contient une infinité de termes de la suite (u_n).
D'après le théorème des segments emboîtés, il existe un unique réel x appartenant à tous les I_n.
On pose $\varphi(0) = 0$. On suppose déjà construits des entiers $\varphi(0) < \cdots < \varphi(n)$ tels que $\forall j \in \{0,\dots,n\} \quad u_{\varphi(j)} \in I_j$.
L'ensemble $\{k \in \mathbb{N},\ u_k \in I_{n+1}\}$ étant infini, il existe un entier $p > \varphi(n)$ tel que $u_p \in I_{n+1}$. On pose $\varphi(n+1) = p$.
Par récurrence on obtient ainsi une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante, telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{\varphi(n)} \in I_n$.
x et $u_{\varphi(n)}$ étant deux éléments de I_n, on a $|u_{\varphi(n)} - x| \leqslant \ell(I_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_{\varphi(n)} - x| = 0$.
On en déduit que la sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ est convergente vers x.

3. Suites de Cauchy

Définition 27

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée *suite de Cauchy* lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p,q \geqslant n_0 \quad |u_p - u_q| < \varepsilon$$

Remarque La définition est équivalente à :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant n_0 \text{ et } \forall k \geqslant 0 \quad |u_{n+k} - u_n| < \varepsilon$$

Exemple
On prendra garde à ne pas confondre les suites de Cauchy avec les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$.
On montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$ (voir TD) et la suite $(\sqrt{n})$ n'est pas de Cauchy car elle n'est pas bornée (lemme ci-dessous).

Lemme 28

Toute suite de Cauchy est bornée.

Preuve
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Il existe un rang n_0 tel que pour tout $p, q \geqslant n_0 \quad |u_p - u_q| < 1$.
En particulier, pour tout $n \geqslant n_0 \quad |u_n| \leqslant |u_{n_0}| + |u_n - u_{n_0}| < |u_{n_0}| + 1$.
Et donc pour tout $n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leqslant \max\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{n_0-1}|, |u_{n_0}| + 1\}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Lemme 29

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.
S'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge (vers $\ell \in \mathbb{R}$) alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers ℓ).

Preuve
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy et supposons qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante tels que $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geqslant n_0 \quad |u_p - u_q| < \varepsilon$.
Par convergence de la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_1$ on a $|u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$.
Soit $n_2 = \max(n_0, n_1)$. Soit $n \geqslant n_2$.
Puisque $n \geqslant n_1$, on a $|u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$. Comme $\varphi(n) \geqslant n \geqslant n_0$, on a $|u_{\varphi(n)} - u_n| < \varepsilon$. Par inégalité triangulaire,

$$|u_n - \ell| \leqslant |u_n - u_{\varphi(n)}| + |u_{\varphi(n)} - \ell| < 2\varepsilon$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers ℓ.

Théorème 30

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Remarque On résume le théorème précédent est disant que « $\mathbb{R}$ est complet ».

Preuve
Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers le réel ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$ on a $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Pour tout $p, q \geqslant n_0$ on a donc par inégalité triangulaire :

$$|u_p - u_q| \leqslant |u_p - \ell| + |\ell - u_q| < 2\varepsilon$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de Cauchy.
Réciproquement, soit (u_n) une suite de Cauchy. Elle est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite de (u_n) qui converge, et grâce au lemme précédent on en déduit que la suite (u_n) est convergente.

IV. Complément : comparaisons asymptotiques

1. Définitions

Définition 31

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que

- (u_n) est *négligeable devant* (v_n) lorsqu'il existe une suite (ε_n) telle que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0 \quad u_n = \varepsilon_n v_n \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$$

- (u_n) est *dominée par* (v_n) lorsqu'il existe une suite (ε_n) telle que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0 \quad u_n = \varepsilon_n v_n \quad \text{avec} \quad (\varepsilon_n) \text{ est bornée}$$

- (u_n) est *équivalente à* (v_n) lorsqu'il existe une suite (ε_n) telle que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0 \quad u_n = \varepsilon_n v_n \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 1$$

Notations On utilise les notations rendues populaires par le mathématicien Edmund Landau :

- (u_n) est *négligeable devant* (v_n) est noté $u_n = o(v_n)$ qui se lit « (u_n) est un petit o de (v_n) ».
- (u_n) est *dominée par* (v_n) est noté $u_n = O(v_n)$ qui se lit « (u_n) est un grand O de (v_n) ».
- (u_n) est *équivalente à* (v_n) est noté $u_n \sim v_n$.

Remarque Comme toute suite (ε_n) convergente (vers 0 ou 1) est bornée, on a

$$(u_n = o(v_n) \text{ ou } u_n \sim v_n) \Rightarrow u_n = O(v_n)$$

Proposition 32

Soit (u_n) et (v_n) deux suites tel que, à partir d'un certain rang N, (v_n) ne s'annule pas.

- $u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$
- $u_n = O(v_n) \Leftrightarrow$ la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant N}$ est bornée
- $u_n \sim v_n \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$

Preuve
Les sens directs découlent immédiatement des définitions en divisant par v_n pour $n \geqslant \max(n_0, N)$.
Pour les réciproques, on définit dans chaque cas la suite (ε_n) par $\varepsilon_n = 1$ pour $n < N$ et $\varepsilon_n = \frac{u_n}{v_n}$ pour $n \geqslant N$.
Pour entier n_0 on prend alors N, et par construction de (ε_n) on a : $\forall n \geqslant n_0 \quad u_n = \varepsilon_n v_n$.
La propriété concernant la limite (ou le caractère borné) de (ε_n) découle alors de celle de $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant N}$.

Exemples

- On a $\quad n+2 = o(n^2) \qquad n^2+n+2 \sim n^2 \quad$ et $\quad 2(-1)^n n^2 + n + 2 = O(n^2)$.
- On peut réécrire les limites de référence du paragraphe II.6 en terme de négligeabilité, par exemple :

$$\forall \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0 \quad (\ln(n))^\beta = o(n^\alpha) \qquad \forall \alpha > 0 \text{ et } a > 1 \quad n^\alpha = o(a^n) \qquad \forall a > 1 \quad a^n = o(n!)$$

2. Négligeabilité et domination

Proposition 33

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) des suites réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $(u_n) = o(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0, \qquad (u_n) = O(1) \Leftrightarrow (u_n)$ est bornée.
2. $(u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(v_n)) \Rightarrow u_n + w_n = o(v_n)$.
3. $u_n = o(v_n) \Rightarrow u_n \times w_n = o(v_n \times w_n)$.
4. $u_n = o(v_n) \Rightarrow \lambda u_n = o(v_n)$ et si $\lambda \neq 0$ $u_n = o(\lambda v_n) \Rightarrow u_n = o(v_n)$.
5. Les points 2 à 4 sont vrais avec O à la place de o.

Exemples

- $n = o(n^2)$ et $\ln(n) = o(n^2)$ donc grâce au point 2 on a $n + \ln(n) = o(n^2)$.
- $\ln(n) = o(n)$ donc grâce au point 3 on a $n\ln(n) = o(n^2)$.
- $\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc grâce au point 4 on a $\frac{10^9}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Preuve

Le 1 est immédiat grâce à la reformulation de la proposition 32.
Pour le 2, il existe deux suites (ε_n) et (ε'_n) ainsi que deux rangs n_0 et n_1 tel que

$$\forall n \geqslant n_0 \quad u_n = \varepsilon_n v_n, \quad \forall n \geqslant n_1 \quad w_n = \varepsilon'_n v_n, \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon'_n = 0.$$

Pour tout $n \geqslant \max(n_0, n_1)$ on a alors $u_n + w_n = (\varepsilon_n + \varepsilon'_n) v_n$.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n + \varepsilon'_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n + \lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon'_n = 0$, on a obtenu que $u_n + w_n = o(v_n)$.
Pour le 3, pour tout $n \geqslant n_0$ on a alors $u_n \times w_n = \varepsilon_n v_n \times w_n$. On en déduit que $u_n \times w_n = o(v_n \times w_n)$.
Pour la première partie du 4, on a pour tout $n \geqslant n_0$ $\lambda u_n = \lambda \varepsilon_n v_n$ et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda\varepsilon_n = 0$ on en déduit que $\lambda u_n = o(v_n)$.
Pour la seconde partie du 4, on a pour tout $n \geqslant n_0$ $\lambda u_n = \varepsilon_n v_n$ et donc $u_n = \frac{1}{\lambda}\varepsilon_n v_n$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\lambda}\varepsilon_n = 0$ on en déduit que $u_n = o(v_n)$.
Pour le 5, il suffit d'observer qu'on peut remplacer dans la preuve ci-dessus « $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ » par « (ε_n) bornée ».

3. Équivalence

Proposition 34

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n - v_n = o(v_n)$.

Preuve

Pour le sens direct, il existe une suite (ε_n) qui converge vers 1 et un rang n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0 \quad u_n = \varepsilon_n v_n$.
Pour tout $n \geqslant n_0$ on a donc $u_n - v_n = (\varepsilon_n - 1)v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n - 1 = 0$, donc $u_n - v_n = o(v_n)$.
Réciproquement, il existe une suite (ε_n) qui converge vers 0 et un rang n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0 \quad u_n - v_n = \varepsilon_n v_n$.
Pour tout $n \geqslant n_0$ on a donc $u_n = (1 + \varepsilon_n)v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \varepsilon_n = 1$, donc $u_n \sim v_n$.

Proposition 35

$\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites réelles :

- *réflexivité* : pour toute suite (u_n) on a $u_n \sim u_n$.
- *symétrie* : pour toute suite (u_n) et (v_n) tel que $u_n \sim v_n$ on a $v_n \sim u_n$.
- *transitivité* : pour toute suite (u_n), (v_n) et (w_n) tel que $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ on a $u_n \sim w_n$.

Preuve
Pour la réflexivité il suffit de choisir pour suite (ε_n) la suite constante (1).
Pour la symétrie, il existe une suite (ε_n) convergente vers 1 et un rang n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0 \quad u_n = \varepsilon_n v_n$. Puisque (ε_n) converge vers une limite non nulle, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_1 \quad \varepsilon_n \neq 0$. Pour tout $n \geqslant \max(n_0, n_1)$ on a $v_n = \frac{1}{\varepsilon_n} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\varepsilon_n} = 1$ donc $v_n \sim u_n$.
Pour la transitivité, il existe des suites (ε_n) et (ε'_n) ainsi que des rangs n_0 et n_1 tel que

$$\forall n \geqslant n_0 \quad u_n = \varepsilon_n v_n, \quad \forall n \geqslant n_1 \quad v_n = \varepsilon'_n w_n, \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon'_n = 1.$$

Pour tout $n \geqslant \max(n_0, n_1)$ on a $u_n = \varepsilon_n \varepsilon'_n w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n \varepsilon'_n = 1$ donc $u_n \sim w_n$.

Proposition 36

Soit (u_n), (u'_n), (v_n) et (v'_n) des suites réelles.

1. Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$ alors $u_n \times u'_n \sim v_n \times v'_n$.
2. Sous les mêmes hypothèses et si (u'_n) et (v'_n) ne s'annulent pas à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{u_n}{u'_n} \sim \dfrac{v_n}{v'_n}$.

Preuve
Pour le 1, il existe des suites (ε_n) et (ε'_n) ainsi que des rangs n_0 et n_1 tel que

$$\forall n \geqslant n_0 \quad u_n = \varepsilon_n v_n, \quad \forall n \geqslant n_1 \quad u'_n = \varepsilon'_n v'_n, \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon'_n = 1.$$

Pour tout $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on a $u_n u'_n = (\varepsilon_n \varepsilon'_n) v_n v'_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n \varepsilon'_n = 1$ donc $u_n u'_n \sim v_n v'_n$.
Pour le 2, on est ramené à montrer (grâce au 1) que $\frac{1}{u'_n} \sim \frac{1}{v'_n}$. Par hypothèse il existe un rang n_2 et un rang n_3 tel que $\forall n \geqslant n_2 \quad u'_n \neq 0$ et $\forall n \geqslant n_3 \quad v'_n \neq 0$. Pour tout $n \geqslant \max(n_1, n_2, n_3)$ on a $u'_n = \varepsilon'_n v'_n$ et donc par passage à l'inverse $\frac{1}{u'_n} = \frac{1}{\varepsilon'_n} \frac{1}{v'_n}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\varepsilon'_n} = 1$ et on en déduit que $\frac{u_n}{u'_n} \sim \frac{v_n}{v'_n}$.

Remarque

- Attention, on ne peut en général pas « sommer des équivalents », c'est à dire que l'analogue du 1 avec la somme n'est pas vrai. Par exemple, on a $n + \sqrt{n} \sim n$ et $-n \sim -n$ mais $\sqrt{n} \not\sim 0$.
- On ne peut en général pas non plus « composer des équivalents par des fonctions ». Par exemple on a $n+1 \sim n$ mais $e^{n+1} \not\sim e^n$ (en effet le quotient tend vers $e \neq 1$).

Proposition 37

Soit (u_n) et (v_n) deux suites.
Si (v_n) admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $u_n \sim v_n$ alors (u_n) admet une limite et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Preuve

Il existe une suite (ε_n) qui converge vers 1 et un rang n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0 \quad u_n = \varepsilon_n v_n$. Puisque (ε_n) converge vers 1, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n v_n = \ell$. Donc (u_n) admet une limite et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Limites et continuité des fonctions réelles

Préliminaires

Définition 1

Soit I un intervalle réel. I est appelé :
- *intervalle ouvert* si I est de la forme $]a,b[$ ou $]-\infty,b[$ ou $]a,+\infty[$ ou $]-\infty,+\infty[$ ($(a,b)\in\mathbb{R}^2$).
- *intervalle fermé* si I est de la forme $[a,b]$ ou $]-\infty,b]$ ou $[a,+\infty[$ ou $]-\infty,+\infty[$ ($(a,b)\in\mathbb{R}^2$).
- *segment* si il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $I=[a,b]$.

Remarque. $\mathbb{R}$ et l'ensemble vide sont deux intervalles à la fois ouverts et fermés. Un intervalle est un segment si et seulement si c'est un intervalle fermé et borné.

Définition 2

Soit V un sous ensemble de $\mathbb{R}$. V est appelé :
- *voisinage de* $+\infty$ si $\exists A>0$ tel que $]A,+\infty[\subset V$.
- *voisinage de* $-\infty$ si $\exists B<0$ tel que $]-\infty,B[\subset V$.
- *voisinage du réel* x_0 si $\exists\varepsilon>0$ tel que $]x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon[\subset V$.
- *voisinage à droite (respectivement à gauche) du réel* x_0 si $\exists\varepsilon>0$ tel que $[x_0,x_0+\varepsilon[\subset V$ (respectivement $]x_0-\varepsilon,x_0]\subset V$).

Remarques.
- Étant donné $\varepsilon>0$, l'intervalle $]x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon[$ est un voisinage particulier de x_0. De même les intervalles $]A,+\infty[$ (respectivement $]-\infty,B[$) sont des voisinages particuliers de $+\infty$ (respectivement $-\infty$).
- Cette notion de voisinage sera à notre niveau d'un intérêt pratique : elle permet de formuler certains énoncés valables à la fois pour un réel ou pour $\pm\infty$ sans avoir à faire de distinction de cas.

I. Limites

Les fonctions considérées ici sont des fonctions à valeurs réelles définies sur un sous ensemble de $\mathbb{R}$.
Étant donnée une telle fonction f, on va énoncer une définition rigoureuse de $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ où $a\in\overline{\mathbb{R}}$. Pour que ceci ait un minimum de sens, il est nécessaire de faire une hypothèse sur a (il est par exemple hors de question de s'intéresser à la limite en -1 d'une fonction qui ne serait définie que sur $\mathbb{R}_+$).

Dans la suite, à chaque fois que nous envisagerons la limite de f en a, nous supposerons toujours que f est au moins définie sur un voisinage (à droite ou à gauche) de a éventuellement privé de a. Pour ne pas alourdir les énoncés, cette hypothèse sera le plus souvent omise.

1. Définitions et premières propriétés

Définition 3

Soit $(a,\ell) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ et f une fonction. La fonction f *a pour limite* ℓ *en* a lorsque :

$$\forall W \text{ voisinage de } \ell \ \exists V \text{voisinage de } a \ \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{D}_f \quad x \in V \Longrightarrow f(x) \in W$$

La définition précédente, englobe en fait 9 cas différents selon que a ou ℓ est un réel, $+\infty$ ou $-\infty$. Les définitions plus précises qui suivent sont obtenues en particularisant les voisinages selon ces cas.

Définition 4 (Limites d'une fonction en un réel x_0)

Soit x_0 un réel et f une fonction. La fonction f *a pour limite*
- *le réel* ℓ *en* x_0 lorsque $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in]x_0-\eta, x_0+\eta[\cap \mathcal{D}_f$ on a $f(x) \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$
- $+\infty$ *en* x_0 lorsque $\forall A > 0 \ \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in]x_0-\eta, x_0+\eta[\cap \mathcal{D}_f$ on a $f(x) \in]A, +\infty[$
- $-\infty$ *en* x_0 lorsque $\forall B < 0 \ \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in]x_0-\eta, x_0+\eta[\cap \mathcal{D}_f$ on a $f(x) \in]-\infty, B[$

Remarques.
- Le premier énoncé (par exemple) peut être reformulé ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{D}_f \ (|x-x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon)$$

- Faire des dessins pour localiser dans chacun des cas dans quelle « boîte » se situe le graphe de f.
- Si f a une limite en x_0 et si $x_0 \in \mathcal{D}_f$, alors cette limite ℓ est nécessairement égale à $f(x_0)$. En effet, soit $\varepsilon > 0$ et un réel $\eta > 0$ associé à cet ε par la définition de la limite. Puisque $x_0 \in]x_0-\eta, x_0+\eta[\cap \mathcal{D}_f$, on a alors $|f(x_0)-\ell| < \varepsilon$. Puisque cette inégalité est vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $|f(x_0)-\ell| \leqslant 0$ et donc que $\ell = f(x_0)$.

Définition 5 (Limites d'une fonction en $+\infty$)

Soit f une fonction. La fonction f *a pour limite*
- *le réel* ℓ *en* $+\infty$ lorsque $\forall \varepsilon > 0 \ \exists A > 0$ tel que $\forall x \in]A, +\infty[\cap \mathcal{D}_f$ on a $f(x) \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$
- $+\infty$ *en* $+\infty$ lorsque $\forall A > 0 \ \exists C > 0$ tel que $\forall x \in]C, +\infty[\cap \mathcal{D}_f$ on a $f(x) \in]A, +\infty[$
- $-\infty$ *en* $+\infty$ lorsque $\forall B < 0 \ \exists A > 0$ tel que $\forall x \in]A, +\infty[\cap \mathcal{D}_f$ on a $f(x) \in]-\infty, B[$

Définition 6 (Limites d'une fonction en $-\infty$)

Soit f une fonction. La fonction f *a pour limite*
- *le réel* ℓ *en* $-\infty$ lorsque $\forall \varepsilon > 0 \ \exists B < 0$ tel que $\forall x \in]-\infty, B[\cap \mathcal{D}_f$ on a $f(x) \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$
- $+\infty$ *en* $-\infty$ lorsque $\forall A > 0 \ \exists B < 0$ tel que $\forall x \in]-\infty, B[\cap \mathcal{D}_f$ on a $f(x) \in]A, +\infty[$
- $-\infty$ *en* $-\infty$ lorsque $\forall B < 0 \ \exists C < 0$ tel que $\forall x \in]-\infty, C[\cap \mathcal{D}_f$ on a $f(x) \in]-\infty, B[$

Proposition 7 (Unicité de la limite)

Soit f une fonction. Soit $(a,\ell,\ell') \in \overline{\mathbb{R}}^3$.
Si f a pour limite ℓ en a et f a aussi pour limite ℓ' en a, alors $\ell = \ell'$.
On peut donc parler de *la* limite de f en a, et on la note $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Preuve.
Dans le cas où a, ℓ et ℓ' sont des réels. Soit $\varepsilon > 0$.

$$\exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{D}_f \ (|x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2})$$

et

$$\exists \eta' > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{D}_f \ (|x-a| < \eta' \Longrightarrow |f(x) - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2})$$

Soit $\delta = \min(\eta, \eta')$ et fixons $x_0 \in \mathcal{D}_f$ tel que $|x_0 - a| < \delta$. Pour cet x_0 on a à la fois $|f(x_0) - \ell| < \varepsilon/2$ et $|f(x_0) - \ell'| < \varepsilon/2$. Par inégalité triangulaire on obtient

$$|\ell - \ell'| \leqslant |\ell - f(x_0)| + |f(x_0) - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

On a ainsi pour tout $\varepsilon > 0$ $|\ell - \ell'| < \varepsilon$ donc $\ell = \ell'$.

Définition 8 (Limite à droite (ou à gauche) en un réel)

Soit f une fonction, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose f définie sur un voisinage à droite (respectivement à gauche) de x_0 sauf éventuellement en x_0. On dit que f a pour limite ℓ à droite (resp. à gauche) en x_0 lorsque

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]x_0, x_0 + \eta[\text{ on a } |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$(\text{resp. } \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]x_0 - \eta, x_0[)$$

Lorsqu'elle existe, on note $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ la limite à droite en x_0 (resp. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ la limite à gauche en x_0).

Remarque. La définition précédente s'étend aussi au cas d'une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Formuler les définitions dans le cas $\ell = +\infty$ et $\ell = -\infty$ (en exercice).

L'énoncé suivant précise les liens existants entre les limites latérales et bilatérales.

Proposition 9

Soit f une fonction définie sur un voisinage du réel x_0 sauf éventuellement en x_0.

- Si f a une limite en x_0, alors elle a une limite à droite et à gauche en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
- Si f n'est pas définie en x_0 et si f a des limites à droite et à gauche en x_0 qui sont égales alors f a une limite en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.
- Si f est définie en x_0 et si f a des limites à droite et à gauche en x_0 qui sont toutes deux égales à $f(x_0)$, alors f a une limite en x_0 (qui vaut $f(x_0)$).

Preuve.
Le premier point découle de la définition de la limite et des inclusions $]x_0 - \eta, x_0[\subset]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ et $]x_0, x_0 + \eta[\subset]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$.
Pour prouver le second point, notons $\ell \in \mathbb{R}$ la valeur commune des limites à droite et à gauche de f en x_0.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe η_1 et η_2 deux réels strictement positifs tels que

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \cap]x_0, x_0 + \eta_1[\quad |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]x_0 - \eta_2, x_0[\quad |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

En posant $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \cap (]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\setminus \{x_0\}) \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Et puisque $x_0 \notin \mathcal{D}_f$, on a $\forall x \in \mathcal{D}_f \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$, on a ainsi obtenu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.
Pour le troisième point, on peut reprendre le début de l'argument du deuxième point. Étant donné $\varepsilon > 0$, on obtient l'existence de $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \cap (]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\setminus \{x_0\}) \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Puisque $|f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$, il suit que $\forall x \in \mathcal{D}_f \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Donc $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Caractérisation de la limite par les suites

Théorème 10

Soit f une fonction et $(a, \ell) \in \overline{\mathbb{R}}^2$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \left(\forall\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ suite d'éléments de } \mathcal{D}_f \quad \lim_{n \to +\infty} x_n = a \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell\right).$$

Remarque. Les deux sens de l'équivalence sont très utiles. Par exemple, sachant que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ on peut en déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} n \sin(\frac{1}{n}) = 1$. La réciproque permet, en autres choses, de prouver des résultats sur les limites de fonctions à partir de ceux déjà obtenus sur les limites de suites.

Preuve.
Nous prouvons le théorème dans le cas où a et ℓ sont deux réels. L'adapation de la preuve aux autres cas est laissée en exercice.
Supposons que f a pour limite ℓ en a. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}_f$ qui converge vers a.
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad |x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$, il existe n_0 tel que $n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - a| < \eta$.
En combinant les deux assertions précédentes, on obtient pour tout $n \geqslant n_0$, $|f(u_n) - \ell| < \varepsilon$ et donc $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ.
Pour prouver l'implication réciproque, montrons sa contraposée. Supposons que f n'admet pas pour limite ℓ en a. Ceci signifie que :

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall \eta > 0\ \exists x_\eta \in \mathcal{D}_f \text{ tel que } (|x - a| < \eta \text{ et } |f(x) - \ell| \geqslant \varepsilon)$$

Appliquons cette propriété, avec comme valeurs successives de η les nombres $\frac{1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Pour chaque entier naturel n, nous choisissons un réel $x_n \in \mathcal{D}_f$ tel que $|x_n - a| < \frac{1}{n+1}$ et $|f(x_n) - \ell| \geqslant \varepsilon$.
Grâce au théorème d'encadrement, on a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$. Mais puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(x_n) - \ell| \geqslant \varepsilon$, la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers ℓ.

3. Opérations et limites

Proposition 11

Soit f, g des fonctions, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que f et g ont une limite (dans $\overline{\mathbb{R}}$) en a.
Dès que l'opération figurant dans le membre de droite a un sens dans $\overline{\mathbb{R}}$, on a :

- $f+g$ a une limite en a et $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$
- λf a une limite en a et $\lim\limits_{x\to a}(\lambda f(x)) = \lambda \times \lim\limits_{x\to a} f(x)$
- $f\times g$ a une limite en a et $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\times g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \times \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Remarque. Dans le cas où l'opération figurant dans un des membres de droite n'est pas définie dans $\overline{\mathbb{R}}$ on parle de forme indéterminée.

Preuve.
L'argument est basé sur les résultats analogues concernant les limites de suites et la caractérisation de la limite par les suites. On détaille seulement le dernier point, les autres sont analogues.
On note $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\ell' = \lim\limits_{x\to a} g(x)$. Soit (x_n) une suite d'éléments de $\mathcal{D}_{f\times g}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. D'après le théorème de caractérisation de la limite par les suites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = \ell'$. On en déduit (proposition 17 du chapitre II) que $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(x_n)\times g(x_n)) = \ell\ell'$. On conclut, grâce au théorème de caractérisation de la limite par les suites, que $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\times g(x)) = \ell\ell'$.

Proposition 12

Soit f, g des fonctions et $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que f et g ont une limite finie en a et que $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Alors f/g est définie au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$.

Preuve.
Justifions que f/g est définie au voisinage de a. On considère le cas où $\ell = \lim\limits_{x\to a} g(x) > 0$.
Posons $\varepsilon = \ell/2 > 0$. Il existe un voisinage V de a sur lequel $|g(x)-\ell| < \varepsilon$. Pour tout $x \in V$, on a donc $g(x) > \ell - \varepsilon = \ell/2 > 0$. g ne s'annule donc pas sur V et f/g est donc définie au voisinage de a.
Le reste de la preuve résulte du théorème de caractérisation de la limite par les suites et de la proposition 18 du chapitre II.

Proposition 13 (Composition des limites)

Soit f et g deux fonctions. Soit $(a,\ell,\ell') \in \overline{\mathbb{R}}^3$.

$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{x\to \ell} g(x) = \ell'\right) \Longrightarrow \lim_{x\to a} g\circ f(x) = \ell'$$

Preuve.
On utilise le théorème de caractérisation de la limite par les suites pour prouver que $\lim_{x\to a} g\circ f(x) = \ell'$.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élements de $\mathcal{D}_{g\circ f}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$.
Puisque $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, grâce au théorème de caractérisation de la limite par les suites on a $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$.
Comme on a $\lim_{x\to\ell} g(x) = \ell'$, en appliquant à nouveau le théorème à la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient $\lim_{n\to+\infty} g(f(x_n)) = \ell'$. Il s'ensuit que $\lim_{x\to a} g\circ f(x) = \ell'$.

4. Comparaisons et limites

Théorème 14 (Passage à la limite dans les inégalités)

Soit f et g deux fonctions. Soit $a\in\overline{\mathbb{R}}$. On suppose f et g définies sur un voisinage V de a sauf éventuellement en a.
On suppose également que f et g ont chacune une limite finie en a et que

$$\forall x\in V\setminus\{a\}\quad f(x)\leqslant g(x)$$

Alors $\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x)$.

Preuve.
Puisque V est un voisinage de a il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $V\setminus\{a\}$ qui a pour limite a. Fixons une telle suite. D'après le théorème de caractérisation de la limite par les suites, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$) converge vers $\lim_{x\to a} f(x)$ (resp. $\lim_{x\to a} g(x)$). Par hypothèse on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f(x_n)\leqslant g(x_n)$. Donc d'après le théorème de passage à la limite dans les inégalités (dans sa version pour les suites) on a $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \leqslant \lim_{n\to+\infty} g(x_n)$, et donc $\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x)$.

Proposition 15

Soit f et g deux fonctions et $a\in\overline{\mathbb{R}}$. On suppose f et g définies sur un voisinage V de a sauf en a.
On suppose également que $\forall x\in V\setminus\{a\}\quad f(x)\leqslant g(x)$. Alors :
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$
- Si $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

Preuve.
Prouvons le premier, le reste de la preuve est analogue et laissé en exercice.
Soit (x_n) une suite d'éléments de $V\setminus\{a\}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$. Puisque $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, on a $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$. De plus pour tout $n\in\mathbb{N}\quad f(x_n)\leqslant g(x_n)$. Grâce à la proposition 12 du chapitre II, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} g(x_n) = +\infty$. Par le théorème de caractérisation de la limite par les suites, il suit que $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$.

Théorème 16 (Théorème d'encadrement)

Soit f, g et h des fonctions. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose f, g et h définies sur un voisinage V de a (resp. sur V mais pas en a).
On suppose également que

1. pour tout $x \in V$ (resp. $\forall x \in V \setminus \{a\}$), $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$
2. f et h ont une limite finie en a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x)$

Alors g a une limite en a et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x)$.

Preuve.
On donne la preuve dans le cas où f, g et h sont définies sur $V \setminus \{a\}$. On note ℓ le réel $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.
Soit (x_n) une suite d'éléments de $V \setminus \{a\}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$. Puisque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} h(x_n) = \ell$. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad f(x_n) \leqslant g(x_n) \leqslant h(x_n)$. Grâce au théorème d'encadrement (dans sa version pour les suites), on en déduit que la suite $(g(x_n))$ converge et que $\lim\limits_{n \to +\infty} g(x_n) = \ell$.
Par le théorème de caractérisation de la limite par les suites, il suit que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$.

5. Limites des fonctions monotones

Théorème 17

Soit a un réel et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $a < b$. Soit f une fonction croissante sur $[a, b[$.

- Si f est *majorée sur* $[a, b[$, c'est-à-dire s'il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in [a, b[\quad f(x) \leqslant M$, alors f admet une limite à gauche finie en b et $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \sup\{f(x),\ x \in [a, b[\}$.
- Si f n'est pas majorée sur $[a, b[$ alors $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$.

Preuve.
On commence par le premier point. On note $A = \{f(x),\ x \in [a, b[\}$. A est non vide (car $[a, b[\neq \varnothing$) et majoré car f est majorée sur $[a, b[$. A admet donc une borne supérieure dans $\mathbb{R}$, on note $\ell = \sup(A)$.
Soit $\varepsilon > 0$. D'après la première caractérisation de la borne supérieure, il existe $x_0 \in [a, b[$ tel que $f(x_0) > \ell - \varepsilon$.
On pose $\eta = b - x_0 > 0$. Soit $x \in]b - \eta, b[$, on a alors $x \in]x_0, b[$. Par croissance de f, on a $f(x) \geqslant f(x_0) > \ell - \varepsilon$.
Comme ℓ majore A, on a aussi $f(x) \leqslant \ell$. Donc $\forall x \in]b - \eta, b[\quad \ell - \varepsilon < f(x) \leqslant \ell$, d'où $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \ell$.
Pour le second point, puisque f n'est pas majorée sur $[a, b[$, on a $\forall M > 0\ \exists x_M \in [a, b[,\ f(x_M) > M$. Soit $M > 0$, posons $\eta = b - x_M$. Soit $x \in]b - \eta, b[$, on a alors $x \in]x_M, b[$ et donc (par croissance de f) $\quad f(x) \geqslant f(x_M) > M$.
On en conclut que $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$.

Remarque. Le théorème est également valable, pour la limite à droite en a sur un intervalle du type $]a, b]$ en changeant « majorée » par « minorée » et le sup par un inf. On peut également l'énoncer pour une fonction décroissante avec les modifications adéquates (en exercice).

Corollaire 18

Soit I un intervalle. On note $a,\ b \in \overline{\mathbb{R}}$ les bornes gauche et droite de I. Soit f une fonction monotone sur I.

- Si $c \in]a,b[$, f admet des limites à droite et à gauche en c et ces limites sont finies.
- f admet une limite à droite en a et une limite à gauche en b.

Preuve.
Le deuxième point découle du théorème précédent (et de sa remarque).
Montrons le premier point. Quitte à considérer $-f$ on peut supposer que f est croissante sur I. Puisque $c \in]a,b[$, il existe $\delta > 0$ tel que $[c-\delta, c+\delta] \subset]a,b[$. On peut alors appliquer le théorème précédent (et sa remarque) aux restrictions de f aux intervalles $[c-\delta, c[$ et $]c, c+\delta]$, pour obtenir l'existence de limites à gauche et à droite en c. De plus, comme f est majorée sur $[c-\delta, c[$ (par $f(c)$) et minorée sur $]c, c+\delta]$ (par $f(c)$) ces limites sont finies d'après ce même théorème.

Remarque. Si f est croissante et $c \in]a,b[$ on a

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \sup\{f(x),\ x \in I \text{ et } x < c\} \leqslant f(c) \leqslant \lim_{x\to c^+} f(x) = \inf\{f(x),\ x \in I \text{ et } x > c\}$$

6. Critère de Cauchy

Théorème 19 (Critère de Cauchy pour la limite d'une fonction)

Soit f une fonction et x_0 un réel.

$$f \text{ admet une limite finie en } x_0 \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0,\ \forall x,\ y \in \mathcal{D}_f \quad \left\{ \begin{array}{l} |x - x_0| < \eta \\ |y - x_0| < \eta \end{array} \right. \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \ (\star)$$

Remarque. C'est l'analogue du critère de Cauchy pour les suites de nombres réels. L'avantage de ce critère est le même que celui concernant les suites : il permet de prouver qu'une limite existe sans avoir à la deviner au préalable.

Preuve.
Pour le sens direct, on note $\ell = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ et on fixe $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in \mathcal{D}_f \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ on a $|f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $x,\ y \in \mathcal{D}_f$ tel que $|x - x_0| < \eta$ et $|y - x_0| < \eta$; on a alors $|f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|f(y) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. Par inégalité triangulaire on en déduit

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - \ell| + |\ell - f(y)| < \varepsilon$$

Pour montrer la réciproque on découpe l'argument en deux étapes.

Étape 1 : On montre que pour toute suite (u_n) d'éléments de $\mathcal{D}_f$ qui converge vers x_0 la suite $(f(u_n))$ est convergente.
Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ associé à cet ε par $(\star)$. Pour une telle suite (u_n) il existe un rang n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0 \quad |u_n - x_0| < \eta$. Alors pour tout $p,\ q \geqslant n_0$ on a grâce à $(\star) \quad |f(u_p) - f(u_q)| < \varepsilon$. La suite $(f(u_n))$ est ainsi une suite de Cauchy de nombres réels ; elle converge donc vers un réel que l'on note ℓ_u.

Étape 2 : On montre que la limite ℓ_u de la suite $(f(u_n))$ est indépendante de la suite (u_n) convergente vers x_0.

On considère une autre suite (v_n) d'éléments de $\mathcal{D}_f$ convergente vers x_0. On note ℓ_v la limite de la suite $(f(v_n))$. Soit la suite (w_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_{2n} = u_n$ et $w_{2n+1} = v_n$. Comme (u_n) et (v_n) convergent vers x_0, la suite (w_n) est également convergente vers x_0 (en exercice). D'après la première étape, $(f(w_n))$ est convergente vers ℓ_w. Puisque les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ sont extraites de $(f(w_n))$ on en déduit que $\ell_u = \ell_w = \ell_v$.
Notons $\ell = \ell_u$. On a montré que pour toute suite (u_n) d'éléments de $\mathcal{D}_f$ convergente vers x_0, la suite $(f(u_n))$ converge vers ℓ. D'après le théorème de caractérisation de la limite par les suites, f admet une limite en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

II. Continuité

1. Définitions et premières propriétés

Définition 20

Soit f une fonction et $x_0 \in \mathcal{D}_f$ tel que f est définie au moins sur un voisinage (éventuellement à droite ou à gauche) de x_0. f est *continue en* x_0 lorsque la limite de f en x_0 existe.

Remarque. Puisque f est définie en x_0, cette limite est nécessairement égale à $f(x_0)$. Donc f est continue en x_0 si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{D}_f \quad |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Définition 21

Soit f une fonction et $A \subset \mathcal{D}_f$. f est *continue sur* A lorsque f est continue en tout point de A.

Définition 22

Soit f une fonction et $x_0 \in \mathcal{D}_f$ tel que f est définie sur un voisinage à droite (resp. à gauche) de x_0. f est *continue à droite en* x_0 (resp. *à gauche*) lorsque la limite de f à droite (resp. à gauche) en x_0 existe et est égale à $f(x_0)$.

En vertu de la proposition explicitant les liens entre limite, limite à droite et limite à gauche, on a l'énoncé suivant :

Proposition 23

Soit f une fonction définie sur un voisinage du point x_0.
f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à droite et à gauche en x_0.

Proposition 24 (Continuité d'une fonction composée)

Soit f et g deux fonctions. On suppose f continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$.
Alors la fonction $g \circ f$ est continue en x_0.

Preuve.
C'est un cas particulier de composition de limites (proposition 13).

Proposition 25

Soit f et g deux fonctions continues en x_0.
Alors $f+g$, $f\times g$ sont continues en x_0. Si $g(x_0)\neq 0$ alors f/g est continue en x_0.

Remarque. Une conséquence utile : les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$, les fractions rationnelles sont continues sur leur domaine de définition.

Preuve.
Tout découle des propriétés analogues concernant les limites (propositions 11 et 12).

Définition 26

Soit A, $B\subset\mathbb{R}$ et $f : A\to\mathbb{R}$ une fonction.
Une fonction $g : B\to\mathbb{R}$ est un *prolongement de* f lorsque $A\subset B$ et $\forall x\in A \quad g(x)=f(x)$.

Proposition 27

Soit $x_0\in\mathbb{R}$ et V un voisinage de x_0. Soit f une fonction définie sur $V\setminus\{x_0\}$.
Il existe $g : V\to\mathbb{R}$ un prolongement de f continu en $x_0 \iff f$ admet une limite finie ℓ en x_0.
De plus, un tel prolongement est unique et est appelé *prolongement par continuité de* f *en* x_0.
Il s'agit de la fonction g définie par

$$\forall x\in V \quad g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\neq x_0 \\ \ell & \text{si } x=x_0 \end{cases}$$

Preuve.
Si $g : V\to\mathbb{R}$ est un prolongement de f continu en x_0, alors $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$, c'est-à-dire :

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\eta>0,\ \forall x\in V \quad |x-x_0|<\eta \Longrightarrow |g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$$

En particulier on a $\quad \forall\varepsilon>0\ \exists\eta>0,\ \forall x\in V\setminus\{x_0\} \quad |x-x_0|<\eta \Longrightarrow |g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$.
Puisque g prolonge f, on a donc $\quad \forall\varepsilon>0\ \exists\eta>0,\ \forall x\in V\setminus\{x_0\} \quad |x-x_0|<\eta \Longrightarrow |f(x)-g(x_0)|<\varepsilon$.
On en déduit que f admet une limite finie en x_0 et que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=g(x_0)$. On a donc montré le sens direct et aussi l'unicité de g : en effet on vient de voir que g est nécessairement donnée par

$$\forall x\in V \quad g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\neq x_0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) & \text{si } x=x_0 \end{cases}$$

Pour la réciproque, on considère la fonction g précédente. Il s'agit d'un prolongement de f à V.
Puisque $g(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, on a $\quad \forall\varepsilon>0\ \exists\eta>0,\ \forall x\in V\setminus\{x_0\} \quad |x-x_0|<\eta \Longrightarrow |f(x)-g(x_0)|<\varepsilon$.
Puisque g prolonge f, on obtient $\quad \forall\varepsilon>0\ \exists\eta>0,\ \forall x\in V\setminus\{x_0\} \quad |x-x_0|<\eta \Longrightarrow |g(x)-g(x_0)|<\varepsilon \quad (\star)$.
Enfin comme l'implication dans $(\star)$ est aussi vraie pour $x=x_0$, on en déduit

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\eta>0,\ \forall x\in V \quad |x-x_0|<\eta \Longrightarrow |g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$$

g est donc continue en x_0.

Exemple. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. C'est un résultat classique que f admet une limite en 0 et que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Son prolongement par continuité en 0 est la fonction g d'efinie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

g est continue en 0 et elle est même continue sur $\mathbb{R}$.

2. Continuité sur un intervalle

Théorème 28 (Théorème des valeurs intermédiaires-TVI)

Soit $a < b$ deux réels et soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$.
Pour tout réel c compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = c$.

Remarques.

- Dans l'énoncé du théorème, « compris entre $f(a)$ et $f(b)$ » signifie que $c \in [f(a), f(b)]$ dans le cas où $f(a) \leqslant f(b)$ et que $c \in [f(b), f(a)]$ dans le cas contraire.
- Faire un dessin.
- On prendra bien garde que sans hypothèse supplémentaire sur f on ne peut pas garantir l'unicité de x_0 (penser à la fonction valeur absolue sur $[-1,1]$ et prendre $c = 1$).

Preuve.
Quitte à considérer $-f$ au lieu de f on peut se ramener au cas où $f(a) \leqslant f(b)$. Soit $c \in [f(a), f(b)]$. Considérons le sous-ensemble A de $\mathbb{R}$: $A = \{x \in [a,b],\ f(x) \leqslant c\}$. A est non vide car $a \in A$ et A est majoré par b. A possède donc une borne supérieure, notons-la μ, on a nécessairement $\mu \in [a,b]$. Nous allons prouver que $f(\mu) = c$.

Étape 1 : $f(\mu) \leqslant c$.
Comme μ est la borne supérieure de A, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers μ. Comme f est continue en μ, la suite $(f(a_n))_{n\geqslant 1}$ converge vers $f(\mu)$. Or, pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_n \in A$ donc $f(a_n) \leqslant c$. Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient $f(\mu) \leqslant c$.

Étape 2 : $f(\mu) \geqslant c$.
Supposons par l'absurde que $f(\mu) < c$ (on a alors nécessairement $\mu \neq b$). Posons $\varepsilon = c - f(\mu) > 0$. Par continuité de f en μ il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [a,b], \quad |x-\mu| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(\mu)| < \varepsilon$$

Fixons un réel $x_0 \in [a,b] \cap]\mu, \mu+\eta[$, ce qui est possible car $\mu \neq b$. On a alors $|f(x_0) - f(\mu)| < \varepsilon$ et donc en particulier $f(x_0) < f(\mu) + \varepsilon = c$. x_0 est donc un élément de A, ce qui est absurde car $x_0 > \mu = \sup(A)$.

Rappelons que si f est une fonction et A un sous-ensemble de $\mathcal{D}_f$, l'ensemble image de A par f, noté $f(A)$, est

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R},\ \exists x \in A \text{ tel que } y = f(x)\} = \{f(x),\ x \in A\}.$$

Corollaire 29

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. L'ensemble image $f(I)$ est alors un intervalle.

Preuve.
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour montrer que $f(I)$ est un intervalle il suffit de montrer que $f(I)$ vérifie la caractérisation énoncée dans le premier chapitre. Soit donc $(y_1, y_2) \in f(I)^2$ tel que $y_1 \leqslant y_2$, on doit prouver que $[y_1, y_2] \subset f(I)$.
Tout d'abord, il existe $(x_1, x_2) \in I^2$ tel que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. Pour fixer les idées supposons que $x_1 \leqslant x_2$ (l'argument est inchangé dans le cas contraire).
Soit $y \in [y_1, y_2]$, y est alors compris entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$. On peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction continue f sur l'intervalle $[x_1, x_2]$. Il existe donc $x \in [x_1, x_2] \subset I$ tel que $f(x) = y$. y est donc un élément de $f(I)$ et on a bien $[y_1, y_2] \subset f(I)$.

Remarque. Attention, si I est un intervalle d'un type particulier (ouvert, fermé, borné ou non borné) $f(I)$ n'a aucune raison d'être du même type et ceci même si f est continue et monotone sur I. Le théorème suivant précise l'intervalle image lorsque f est continue strictement monotone sur I.

Théorème 30

Soit I un intervalle de bornes a et b, où $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ et $a \leqslant b$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et continue sur I.

Si f est strictement croissante sur I et si

- $I = [a,b]$, alors $f(I) = [f(a), f(b)]$
- $I = [a,b[$, alors $f(I) = [f(a), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$
- $I =]a,b]$, alors $f(I) =]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), f(b)]$
- $I =]a,b[$, alors $f(I) =]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$

Si f est strictement décroissante sur I et si

- $I = [a,b]$, alors $f(I) = [f(b), f(a)]$
- $I = [a,b[$, alors $f(I) =]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), f(a)]$
- $I =]a,b]$, alors $f(I) = [f(b), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$
- $I =]a,b[$, alors $f(I) =]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)[$

Preuve.
Nous faisons la preuve du second point lorsque f est strictement croissante, le reste est analogue et est laissé en exercice.
Rappelons que $f(I)$ est un intervalle. Par croissance de f, $f(a)$ est le plus petit élément de $f(I)$ et donc $f(a)$ est la borne gauche de l'intervalle $f(I)$ et cette borne appartient à $f(I)$. Notons $c \in \overline{\mathbb{R}}$ la borne droite de l'intervalle $f(I)$. Si c appartient à $f(I)$, alors il existe $x_0 \in [a,b[$ tel que $f(x_0) = c$. Mais pour x_1 tel que $x_0 < x_1 < b$ on a $f(x_1) \in I$ et $f(x_1) > f(x_0) = c$, ce qui est absurde. Donc c n'appartient pas à $f(I)$ et $f(I) = [f(a), c[$. Il y a ensuite deux cas à distinguer : $c \in \mathbb{R}$ ou $c = +\infty$.

- Si $c = +\infty$, alors $f(I) = [f(a), +\infty[$ et f est donc non majorée sur $I = [a,b[$. D'après le théorème 17, on a alors $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$ et donc $f(I) = [f(a), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$.
- Si $c \in \mathbb{R}$ alors f est majoré sur $[a,b[$. Donc d'après le théorème 17 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \sup\{f(x),\ x \in [a,b[\} = \sup(f(I))$. Donc $c = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ et $f(I) = [f(a), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$.

Remarque. En particulier, l'image par une fonction strictement monotone et continue d'un intervalle ouvert est un intervalle ouvert. Par contre l'image d'un intervalle borné ou fermé n'est pas nécessairement bornée ou fermée comme le montre l'exemple de la fonction $f : x \mapsto 1/x$ qui est continue strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour laquelle $f(]0,1]) = [1, +\infty[$ et $f([1, +\infty[) =]0, 1]$.

Théorème 31

Soit $a < b$ deux réels et soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$. Alors :

- f est bornée sur $[a,b]$: l'ensemble image $f([a,b])$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$.
- f admet un maximum et un minimum sur $[a,b]$: il existe $(\alpha,\beta) \in [a,b]^2$ tel que

$$\forall x \in [a,b] \quad f(\beta) \leqslant f(x) \leqslant f(\alpha)$$

Remarque. On peut reformuler le deuxième point de la manière suivante : il existe $(\alpha,\beta) \in [a,b]^2$ tel que

$$f(\alpha) = \max(f([a,b])) \quad \text{et} \quad f(\beta) = \min(f([a,b]))\,.$$

Preuve.
Quitte à considérer $-f$ au lieu de f, on peut se limiter à prouver que f est majorée sur $[a,b]$ et qu'il existe $\alpha \in [a,b]$ tel que $f(\alpha) = \sup(f([a,b]))$.

Étape 1 : Montrons que $f([a,b])$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ majoré.
Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas : pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) > M$.
Pour tout entier n on choisit alors un réel $x_n \in [a,b]$ tel que $f(x_n) > n$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de l'intervalle $[a,b]$, elle est donc bornée. Par théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge. Soit donc $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante telle que la suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente. Notons $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite, on a nécessairement $\ell \in [a,b]$. Puisque f est continue en l la suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$.
D'autre part, par construction de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_{\varphi(n)}) > \varphi(n) \geqslant n$. La suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ ce qui est absurde.
$f([a,b])$ est donc un sous-ensemble majoré et non vide (car $[a,b]$ est non vide) de $\mathbb{R}$, il admet donc une borne supérieure.

Étape 2 : Montrons qu'il existe $\alpha \in [a,b]$ tel que $f(\alpha) = \sup(f([a,b]))$.
Notons $\mu = \sup(f([a,b]))$. Il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $f([a,b])$ qui converge vers μ. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ choisissons $x_n \in [a,b]$ tel que $y_n = f(x_n)$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $[a,b]$ à laquelle on applique le même traitement que dans l'étape 1 pour obtenir une suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un certain $\alpha \in [a,b]$.
Par continuité de f en α, $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\alpha)$.
Par ailleurs, la suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite convergente $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$. $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers μ. Par unicité de la limite : $\mu = f(\alpha)$ et comme $\alpha \in [a,b]$ on a prouvé le théorème.

Corollaire 32

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Preuve.
Soit $a < b$ deux réels et f une fonction continue sur le segment $[a,b]$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires $f([a,b])$ est un intervalle. D'après le théorème précédent cet intervalle est borné et possède un plus petit et un plus grand élément. Parmi les différents types d'intervalle seul un segment a ces propriétés. $f([a,b])$ est donc un segment.

3. Continuité, monotonie et bijectivité

Proposition 33

Soit f une fonction monotone sur un intervalle I.
Si $f(I)$ est un intervalle alors f est continue sur I.

Preuve.
Quitte à considérer $-f$ au lieu de f on peut supposer que f est croissante sur I. Soit $x_0 \in I$. Nous prouvons la continuité de f en x_0 dans le cas où $f(x_0)$ n'est pas une borne de l'intervalle $f(I)$ et nous laissons en exercice l'adaptation de la preuve au cas où $f(x_0)$ est une borne.
Puisque $f(x_0)$ n'est pas une borne de $f(I)$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $[f(x_0)-\varepsilon_0, f(x_0)+\varepsilon_0] \subset f(I)$. Soit $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$. Par définition de l'ensemble image, il existe $(x_1, x_2) \in I^2$ tel que $f(x_1) = f(x_0) - \varepsilon$ et $f(x_2) = f(x_0) + \varepsilon$. Par croissance de f on a nécessairement $x_1 < x_0 < x_2$. Notons $\eta = \min(x_0 - x_1, x_2 - x_0) > 0$. Soit $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, alors $x_1 < x < x_2$ et par croissance de f, $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$, i.e. $f(x_0) - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon$. D'où la continuité de f en x_0.

Théorème 34 (Théorème de la bijection)

Soit I un intervalle et f une fonction continue et strictement monotone sur I. Notons $J = f(I)$. On a alors :
- J est un intervalle et l'application $f : I \to J$ est une bijection. On note $f^{-1} : J \to I$ son application réciproque.
- f^{-1} est continue et strictement monotone sur J, de même sens de variation que f.

Preuve.
Le fait que $J = f(I)$ soit un intervalle découle du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires. Considérons l'application $f : I \to J$. Comme f est strictement monotone sur I, f est injective. De plus $J = f(I)$ donc f est surjective. f est donc une bijection de I sur J.
Soit $f^{-1} : J \to I$ son application réciproque. Supposons, par exemple f strictement croissante.
Par l'absurde, si f^{-1} n'est pas strictement croissante alors il existe $(y_1, y_2) \in J^2$ tel que $y_1 < y_2$ et $f^{-1}(y_1) \geqslant f^{-1}(y_2)$. Notons $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$. x_1 et x_2 sont des éléments de I et $x_1 \geqslant x_2$ donc par croissance de f : $y_1 = f(x_1) \geqslant f(x_2) = y_2$ ce qui est contradictoire.
f^{-1} est une application (strictement) monotone sur l'intervalle J et $f^{-1}(J) = I$ est un intervalle. D'après la proposition précédente f^{-1} est continue sur J.

Remarques.
- Le théorème précédent sert en particulier à construire le logarithme à partir de l'exponentielle et les fonctions trigonométriques réciproques (arccos, arcsin et arctan). Il permet également de retrouver l'existence et l'unicité de la racine n−ième d'un nombre positif.
- Notons $\mathcal{G}_f$ le graphe de f, il s'agit du sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ suivant : $\mathcal{G}_f = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R},\ y = f(x)\}$. Puisque

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x \in I \text{ et } y = f(x)) \Longleftrightarrow (y \in J \text{ et } x = f^{-1}(y))$$

  Le graphe de f^{-1} est égal à $\{(y, x) \in \mathbb{R}^2,\ (x, y) \in \mathcal{G}_f\}$. Or la transformation du plan qui permute les coordonnées d'un point est la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$). $\mathcal{G}_{f^{-1}}$ s'obtient donc en prenant le symétrique de $\mathcal{G}_f$ par rapport à la première bissectrice.

Proposition 35

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I.
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une application injective alors f est strictement monotone sur I.

Preuve.
Comme une application monotone et injective est strictement monotone, il suffit de prouver que f est monotone sur I. Pour $(x_0, x) \in I^2$ on note $\phi_{x_0}(x) = (f(x) - f(x_0))(x - x_0)$. L'injectivité de f se traduit par : $\forall (x_0, x) \in I^2$, tel que $x \neq x_0$ on a $\phi_{x_0}(x) \neq 0$.
Étape 1 :
f est croissante (respectivement décroissante) sur I ssi pour tout $(x_0, x) \in I^2$, $\phi_{x_0}(x) \geqslant 0$ (respectivement $\leqslant 0$). Pour montrer que f est monotone sur I, il suffit en fait de montrer que pour tout $x_0 \in I$, la fonction ϕ_{x_0} est de signe constant sur I (ce qui est plus faible puisque ce signe peut a priori dépendre de x_0). En effet si c'est le cas, pour $(x_0, x_1) \in I^2$ avec $x_1 \neq x_0$, le signe de ϕ_{x_0} sur I est le même que celui de $\phi_{x_0}(x_1)(\neq 0)$. Or $\phi_{x_0}(x_1) = \phi_{x_1}(x_0)$ et donc ϕ_{x_1} a le même signe sur I que ϕ_{x_0}. Il s'ensuit que le signe de ϕ_{x_0} sur I est indépendant du point x_0 de I et donc que f est monotone sur I.
Étape 2 :
Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $x_0 \in I$ pour lequel ϕ_{x_0} n'est pas de signe constant sur I. Ceci signifie qu'il existe $(x_1, x_2) \in I^2$ tel que $\phi_{x_0}(x_1) < 0$ et $\phi_{x_0}(x_2) > 0$. La fonction ϕ_{x_0} est continue sur I. Il y a plusieurs cas à envisager selon la position de x_1 et x_2 par rapport à x_0 :

- Si $(x_1, x_2) \in (I \cap]-\infty, x_0[)^2$, alors d'après le TVI, il existe $c \in I \cap]-\infty, x_0[$ tel que $\phi_{x_0}(c) = 0$, ce qui est absurde.
- Si $(x_1, x_2) \in (I \cap]x_0, +\infty[)^2$, le raisonnement est analogue au premier point.
- Si $(x_1, x_2) \in (I \cap]-\infty, x_0[) \times (I \cap]x_0, +\infty[)$. Si $\phi_{x_2}(x_1) < 0$, comme $\phi_{x_2}(x_0) = \phi_{x_0}(x_2) > 0$, d'après le TVI, il existe $d \in]x_0, x_1[$ tel que $\phi_{x_2}(d) = 0$ ce qui est absurde. Si $\phi_{x_2}(x_1) > 0$, alors $\phi_{x_1}(x_2) > 0$ et comme $\phi_{x_1}(x_0) = \phi_{x_0}(x_1) < 0$, d'après le TVI il existe $e \in]x_0, x_2[$ tel que $\phi_{x_1}(e) = 0$ ce qui est absurde.
- Si $(x_1, x_2) \in (I \cap]x_0, +\infty[) \times (I \cap]-\infty, x_0[)$, le raisonnement est analogue au troisième point.

Dans tous les cas, on obtient une contradiction, f est donc strictement monotone sur I.

Théorème 36

Soit I un intervalle et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. Deux assertions quelconques parmi les suivantes entraînent la troisième.
i) $J = f(I)$ est un intervalle et $f : I \to J$ est une bijection.
ii) f est continue sur I.
iii) f est strictement monotone sur I.

Preuve.
i) et ii) $\Longrightarrow$ iii) : il s'agit de la proposition 35.
i) et iii) $\Longrightarrow$ ii) : grâce à la proposition 33.
ii) et iii) $\Longrightarrow$ i) : grâce au théorème 34.

Dérivation des fonctions réelles

I. Généralités

Dans la suite f désigne une fonction réelle définie sur I qui est un intervalle ou une réunion finie d'intervalles.

1. Dérivabilité

Définition 1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$.

- Pour $x \neq x_0$, on appelle *taux d'accroissement de f entre x_0 et x* le rapport $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ qu'on note $T_{x_0}^f(x)$.
- La fonction f est *dérivable en x_0* lorsque la fonction $T_{x_0}^f$ admet une limite finie en x_0. On note alors $f'(x_0)$ cette limite, qu'on appelle dérivée de f en x_0. On a

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} T_{x_0}^f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

- La fonction f est *dérivable sur I* lorsque f est dérivable en tout point de I.

Remarques.

- $T_{x_0}^f(x) = T_x^f(x_0)$.
- On note aussi parfois $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ la dérivée de f en x_0.
- Dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé notons M_0 et M les points de coordonnées respectives $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$. La droite (M_0M) est appelée corde, elle coupe la courbe de f en les points M_0 et M et elle a pour pente $T_{x_0}^f(x)$. Lorsque f est dérivable en x_0, « la position limite des cordes (M_0M) lorsque M tend vers M_0 » est la droite tangente à la courbe de f au point M_0.

Définition 2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$.
La *tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0* est la droite dont l'équation cartésienne dans un repère orthonormé du plan est $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$.

Remarque. Lorsque $\lim\limits_{x\to x_0} T_{x_0}^f(x) = \pm\infty$ (f n'est bien sûr pas dérivable en x_0) on dit que la courbe de f admet une tangente verticale en x_0. C'est le cas par exemple pour la fonction $\sqrt{}$ en 0.

Proposition 3

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$.
f est dérivable en x_0 si et seulement si il existe deux réels a et b, un voisinage V de x_0 et ε une fonction définie sur $V \cap I$ tel que

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in V \cap I \quad f(x) = a + b(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

Dans ce cas, on a nécessairement $a = f(x_0)$ et $b = f'(x_0)$.

Remarque. La formule de la proposition précédente est un cas particulier de développement limité à l'ordre 1 d'une fonction au voisinage d'un point x_0. Pour une fonction définie en x_0, la dérivabilité de f en x_0 est donc équivalente à l'existence d'un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de x_0.

Preuve.
Supposons f dérivable en x_0. On note $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ le prolongement par continuité de $T_{x_0}^f(.) - f'(x_0)$ en x_0. Par construction, ε a une limite nulle en x_0 et pour tout $x \in I$:

$$(x - x_0)\varepsilon(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{ou encore} \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

Réciproquement supposons que f a un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de x_0.
Alors $f(x) = a + b(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$ admet une limite en x_0 et cette limite est égale à a.
Par définition f est alors continue en x_0 et $a = f(x_0)$. Pour tout $x \in V \cap I$, avec $x \neq x_0$, on a :

$$f(x) - f(x_0) = b(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \quad \text{d'où} \quad T_{x_0}^f(x) = b + \varepsilon(x) \quad \text{et donc} \quad \lim_{x \to x_0} T_{x_0}^f(x) = b.$$

f est donc dérivable en x_0 et $f'(x_0) = b$.

Corollaire 4

Si f est dérivable en x_0 alors elle y est continue.

Remarque. La réciproque est fausse : la fonction valeur absolue est continue en 0 mais n'y est pas dérivable.

Preuve.
Le développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de x_0 garantit que f a une limite en x_0.

Définition 5

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. On suppose que I est un voisinage à droite (respectivement à gauche) de x_0.
f admet *une dérivée à droite en* x_0 (respectivement à gauche) lorsque $T_{x_0}^f$ admet une limite finie à droite (respectivement à gauche) en x_0. Lorsqu'elle existe, on note $f'_d(x_0)$ (respectivement $f'_g(x_0)$) cette dérivée. On a donc :

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} T_{x_0}^f(x) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{et} \quad f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} T_{x_0}^f(x) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Proposition 6

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. On suppose que I est un voisinage de x_0.
f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Remarque. Lorsque f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et que $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$, la fonction f n'est pas dérivable en x_0. La courbe de f admet des demi-tangentes, l'une à droite et l'autre à gauche de x_0, mais qui n'ont pas la même pente. Dans ce cas on dit que la courbe de f admet en $(x_0, f(x_0))$ un point anguleux. C'est le cas par exemple de la fonction valeur absolue au point $(0,0)$.

Preuve.
C'est immédiat d'après le lien entre limites latérales et limite en un point.

2. Dérivation et opérations

Proposition 7

Soit f et g deux fonctions définies sur I, $x_0 \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose f et g dérivables en x_0.

- $f + g$ est dérivable en x_0 et $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
- $f \times g$ est dérivable en x_0 et $(f \times g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
- λf est dérivable en x_0 et $(\lambda f)'(x_0) = \lambda . f'(x_0)$.
- Si $g(x_0) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

Preuve.
Démontrons par exemple le deuxième point. Pour $x \neq x_0$:

$$T_{x_0}^{fg}(x) = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = f(x)T_{x_0}^{g}(x) + g(x_0)T_{x_0}^{f}(x)$$

f et g étant dérivables ne x_0, on a $\lim\limits_{x \to x_0} T_{x_0}^{f}(x) = f'(x_0)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} T_{x_0}^{g}(x) = g'(x_0)$. De plus f étant continue en x_0 (car dérivable en x_0) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Donc fg est dérivable en x_0 et par passage à la limite on a : $(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)$.

Proposition 8

Soit f et g deux fonctions et x_0 un réel. On suppose que la composée $g \circ f$ est définie sur un voisinage de x_0.
Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$$

Preuve.
Par dérivabilité de f et g, il existe V un voisinage de x_0, W un voisingae de $f(x_0)$ et des fonctions $\varepsilon_1 : V \to \mathbb{R}$ et $\varepsilon_2 : W \to \mathbb{R}$ de limite nulle respectivement en x_0 et en $f(x_0)$ telles que

$$\forall x \in V \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon_1(x) \tag{1}$$

$$\forall y\in W \quad g(y)=g(f(x_0))+g'(f(x_0))(y-f(x_0))+(y-f(x_0))\varepsilon_2(y) \tag{2}$$

Puisque f est continue en x_0, il existe V' un voisinage de x_0 tel que pour tout $x\in V'$ on a $f(x)\in W$. Donc si $x\in V\cap V'$, (1) est vérifiée en x et (2) en $y=f(x)$ et donc :

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(x_0))+g'(f(x_0))(f(x)-f(x_0))+(f(x)-f(x_0))\varepsilon_2(f(x)) \\ &= g(f(x_0))+g'(f(x_0))[f'(x_0)(x-x_0)+(x-x_0)\varepsilon_1(x)]+[f'(x_0)(x-x_0)+(x-x_0)\varepsilon_1(x)]\varepsilon_2(f(x)) \\ &= g(f(x_0))+g'(f(x_0))f'(x_0)(x-x_0)+(x-x_0)[\varepsilon_1(x)(g'(f(x_0))+\varepsilon_2(f(x)))+\varepsilon_2(f(x))f'(x_0)] \end{aligned}$$

Pour $x\in V\cap V'$ posons $\varepsilon_3(x)=\varepsilon_1(x)(g'(f(x_0))+\varepsilon_2(f(x)))+\varepsilon_2(f(x))f'(x_0)$. Il reste à vérifier que ε_3 a une limite nulle en x_0. Par continuité de f en x_0 et composition de limites $\varepsilon_2(f(x))$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0. Rappelons aussi que ε_1 a pour limite 0 en x_0. D'après les règles concernant les limites des sommes et produits, ε_3 a une limite nulle en x_0.

3. Dérivation et application réciproque

Théorème 9

Soit I et J deux intervalles et $f: I\to J$ une application bijective et continue. Soit $x_0\in I$.
Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0)\neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0=f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{(f'\circ f^{-1})(y_0)}$$

Remarque. C'est ce théorème qui permet en particulier d'obtenir la dérivabilité et les formules pour les dérivées des fonctions trigonométriques réciproques.

Preuve.
Pour $y\in J$ tel que $y\neq y_0$ $\quad T_{y_0}^{f^{-1}}=\dfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{f(f^{-1}(y))-f(f^{-1}(y_0))}=\dfrac{1}{T^f_{f^{-1}(y_0)}(f^{-1}(y))}=\dfrac{1}{T^f_{x_0}(f^{-1}(y))}$.
$f: I\to J$ étant bijective et continue, f est strictement monotone sur I et le théorème de la bijection garantit que f^{-1} est continue sur J. En particulier, f^{-1} est continue en y_0, i.e. $\lim\limits_{y\to y_0} f^{-1}(y)=f^{-1}(y_0)=x_0$.
Comme f est dérivable en x_0, $\lim\limits_{x\to x_0} T^f_{x_0}(x)=f'(x_0)$. Par composition des limites, on en déduit que $\lim\limits_{y\to y_0} T^{f^{-1}}_{y_0}(y)=1/f'(x_0)=1/(f'\circ f^{-1})(y_0)$.

4. Dérivées d'ordre supérieur

Définition 10

Soit $f: I\to\mathbb{R}$. On définit de proche en proche les dérivées successives de f sur I (sous-réserve qu'elles existent) par :

- On pose $f^{(0)}=f$.
- Si $f^{(0)}$ est dérivable sur I, on pose $f^{(1)}=(f^{(0)})'=f'$.
- Si f est dérivable sur I et $f^{(1)}$ est dérivable sur I, on dit que f est 2−*fois dérivable sur* I et on pose $f^{(2)}=(f^{(1)})'$.
- Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, si f est $(k-1)$−fois dérivables sur I et que $f^{(k-1)}$ est dérivable sur I alors on dit que f est k−*fois dérivable sur* I et on pose $f^{(k)}=(f^{(k-1)})'$.

Remarque. Si f est $(n+1)$−fois dérivable sur I, alors f' est n−fois dérivable sur I et $f^{(n+1)} = (f')^{(n)}$.

Définition 11

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f est
- *de classe D^n sur I* lorsque f est n−fois dérivable sur I.
- *de classe C^n sur I* lorsque f est n−fois dérivable sur I et que $f^{(n)}$ est continue sur I.
- *de classe C^∞ sur I* lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^n sur I.

Remarque. f est de classe C^∞ sur I ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n−fois dérivable sur I.

Exemples. La fonction exponentielle, les polynômes et les fonctions cosinus et sinus sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 12

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions, $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que f et g sont de classe D^n sur I. Alors,
- $f + g$ est de classe D^n sur I et $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$.
- $f \times g$ est de classe D^n sur I.
- λf est de classe D^n sur I et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$.
- Si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est de classe D^n sur I.

Remarques.
- L'énoncé précédent et les suivants sont vrais lorsque l'on remplace partout « de classe D^n sur I » par « de classe C^n sur I » ou encore par « de classe C^∞ sur I ».
- Le théorème suivant donne une formule explicite pour la dérivée n−ième du produit fg de deux fonctions de classe D^n.

Exemples. De la proposition précédente on déduit que les fractions rationnelles sont C^∞ sur leur ensemble de définition et que la fonction tangente est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Preuve.
Tous les points se démontrent par récurrence en utilisant le résultat établi pour la dérivée première. Nous détaillons uniquement la preuve du second point (en supposant le premier point déjà démontré), les autres sont laissés en exercice.
Pour $n = 0$, il n'y a rien à démontrer. Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons la propriété vraie au rang n, montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. Soient f et g de classe D^{n+1} sur I. Alors f et g sont dérivables sur I et $(fg)' = f'g + fg'$. Par hypothèse de récurrence et puisque f' et g' sont de classe D^n sur I, les fonctions $f'g$ et fg' sont de classe D^n sur I. D'après le premier point leur somme $f'g + fg'$ est aussi de classe D^n sur I. Donc $(fg)'$ est de classe D^n sur I, i.e. fg est de classe D^{n+1} sur I.
Par principe de récurrence la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 13 (Formule de Leibniz)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe D^n sur I où $n \in \mathbb{N}$. Alors, fg est de classe D^n sur I et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Remarque. On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, n\}$, le coefficient binômial $\binom{n}{k}$ vaut $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.
Il s'agit du nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments. On rappelle également la formule du triangle de Pascal : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$ qui peut se démontrer directement à partir de la définition.

Preuve.
On démontre la propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
La formule est vraie pour $n = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons-la vraie au rang n et montrons-la au rang $n+1$. Soit f et g deux fonctions de classe D^{n+1} sur I. On sait déjà que le produit fg est de classe D^{n+1} sur I. De plus, par hypothèse de récurrence

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Et donc

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} = (fg^{(n)})' = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}
\end{aligned}$$

On change d'indice dans la première somme en posant $p = k+1$:

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \sum_{p=1}^{n+1} \binom{n}{p-1} f^{(p)} g^{(n+1-p)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= f^{(n+1)} g + f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= f^{(n+1)} g + f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}
\end{aligned}$$

On a obtenu la formule au rang $n+1$. Par principe de récurrence elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 14

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f et g deux fonctions de classe D^n respectivement sur I et sur J. On suppose que $f(I) \subset J$.
Alors la composée $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est de classe D^n sur I.

Preuve.
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ en utilisant le résultat établi pour la dérivée première.
Pour $n = 1$, il s'agit de la proposition 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons la propriété vraie au rang n et démontrons-la au rang $n+1$.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe D^{n+1} sur I et $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction de classe D^{n+1} sur J telles que $f(I) \subset J$. Grâce à la proposition 8, $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I,\ (g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x) \times f'(x)$$

Par hypothèse, g', f et f' sont de classe D^n. Par hypothèse de récurrence, la composée $g' \circ f$ est de classe D^n sur I. Par produit (proposition 12), $(g' \circ f) \times f'$ est de classe D^n sur I, i.e. $(g \circ f)'$ est de classe D^n sur I. Donc $g \circ f$ est de classe D^{n+1} sur I. Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 15

Soit I et J des intervalles, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \to J$ une application bijective et de classe D^n sur I. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \neq 0$, alors $f^{-1} : J \to I$ est de classe D^n sur J.

Preuve.
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ en utilisant le résultat établi pour la dérivée première.
Pour $n = 1$, il s'agit du théorème 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons la propriété vraie au rang n et démontrons-la au rang $n+1$.
Soit $f : I \to J$ une application bijective et de classe D^{n+1} sur I telle que pour tout $x \in I$, $f'(x) \neq 0$. Par hypothèse de récurrence f^{-1} est de classe D^n sur I et grâce au théorème 9 :

$$\forall y \in J,\ (f^{-1})'(y) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y)}$$

Par hypothèse de récurrence f^{-1} et f' sont de classe D^n. Leur composée $f' \circ f^{-1}$ est de classe D^n sur J grâce à la propriété 14. Par la proposition 12, son inverse est aussi de classe D^n sur J, i.e. $(f^{-1})'$ est de classe D^n.
Donc f^{-1} est de classe D^{n+1} sur J. Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemples. De la proposition précédente on déduit que la fonction logarithme est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, les fonctions arcsin et arccos sont de classe C^∞ sur $]-1,1[$ et que la fonction arctan est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

II. Accroissements finis et applications

1. Extrema d'une fonction

Définition 16

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. On dit que f admet :

- *un minimum global en x_0* lorsque $\forall x \in I \quad f(x) \geqslant f(x_0)$.
- *un maximum global en x_0* lorsque $\forall x \in I \quad f(x) \leqslant f(x_0)$.
- *un minimum local en x_0* s'il existe V un voisinage de x_0 tel que $\forall x \in V \cap I \quad f(x) \geqslant f(x_0)$.
- *un maximum local en x_0* s'il existe V un voisinage de x_0 tel que $\forall x \in V \cap I \quad f(x) \leqslant f(x_0)$.
- *un extremum global en x_0* lorsqu'elle y admet un minimum ou un maximum global.
- *un extremum local en x_0* lorsqu'elle y admet un minimum ou un maximum local.

Remarque. Tout extremum global est en particulier un extremum local, la réciproque est par contre fausse.

Théorème 17 (Condition nécessaire d'extremum)

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit x_0 un élément de I qui n'est pas une borne de I.
On suppose f dérivable en x_0.
Si f admet un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Remarques.

- La réciproque à cet énoncé est fausse comme le montre l'exemple de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à $x \longmapsto x^3$. Sa dérivée s'annule en 0 et pourtant f n'y admet pas d'extremum local.
- Attention, on ne peut pas s'affranchir de l'hypothèse « x_0 n'est pas une borne de I ». La fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ qui à $x \longmapsto x$ admet en 0 un minimum local et pourtant $f'(0) = 1$.
- Si $I = [a, b]$ (par exemple) les extrema locaux d'une fonction dérivable sur $]a, b[$ sont à rechercher en a, b et aux points de $]a, b[$ où la dérivée s'annule.

Preuve.
Quitte à changer f en $-f$ on peut supposer que x_0 est un minimum local de f.
Par hypothèse, il existe V un voisinage de x_0 tel que pour tout $x \in V \cap I$, $f(x_0) \leqslant f(x)$. Comme x_0 n'est pas une borne de I il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset V \cap I$.
Pour $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0[$, on a $f(x_0) - f(x) \leqslant 0$ et $x_0 - x > 0$, donc $T^f_{x_0}(x) \leqslant 0$. Par passage à la limite, on en déduit que $f'(x_0) \leqslant 0$.
Pour $x \in]x_0, x_0 + \varepsilon[$, on a $f(x_0) - f(x) \leqslant 0$ et $x_0 - x < 0$, donc $T^f_{x_0}(x) \geqslant 0$. Par passage à la limite, on en déduit que $f'(x_0) \geqslant 0$.
Donc $f'(x_0) = 0$.

2. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Théorème 18 (Théorème de Rolle)

Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
On suppose que $f(a) = f(b)$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve.
Puisque f est continue sur le segmet $[a, b]$, f y admet un maximum global et un minimum global : il existe $(\alpha, \beta) \in [a, b]^2$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $f(\beta) \leqslant f(x) \leqslant f(\alpha)$.
Si α et β sont tous deux des bornes de l'intervalle et comme $f(a) = f(b)$, f est constante sur $[a, b]$ et donc $c = (a + b)/2$ (par exemple) convient.
Sinon, l'un au moins des éléments α et β n'est pas une borne de $[a, b]$. Supposons par exemple qu'il s'agit de β. Comme f admet un minimum local (car global) en β et qu'elle est dérivable en β, on a $f'(\beta) = 0$. $c = \beta$ convient.

Théorème 19 (Théorème des accroissements finis-TAF)

Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Remarque. Le théorème garantit qu'il y a au moins un point de l'intervalle $]a, b[$ en lequel la dérivée prend la valeur du taux d'accroissement de f entre a et b. Au point correspondant du graphe de f, la tangente est parallèle à la corde passant par les points d'abscisse a et b (faire un dessin).

Preuve.
Pour tout $x \in [a, b]$, on pose $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$. On a $g(a) = g(b) = 0$, g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or, pour $x \in]a, b[$, $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On a donc $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Corollaire 20 (Inégalité des accroissements finis-IAF)

Soit $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
On suppose qu'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in]a,b[$, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$.
Alors $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$.

Remarques.

- Sur un dessin, l'inégalité des accroissements finis signifie que le graphe de f est situé dans un cône délimité par les deux demi-droites d'équations $y = f(a) + m(x-a)$ et $y = f(a) + M(x-a)$.
- Si il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in]a,b[$, $|f'(x)| \leqslant M$, la conclusion du corollaire précédent se réécrit sous la forme $|f(b) - f(a)| \leqslant M(b-a)$.
- Si f est de classe C^1 sur $[a,b]$ alors les hypothèses du corollaire sont satisfaites. En effet, f' étant continue sur le segment $[a,b]$, elle y est bornée.

Preuve.
D'après le Théorème des accroissements finis (TAF dans la suite), il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. Par hypothèse $m \leqslant f'(c) \leqslant M$, et en multipliant par $b-a \geqslant 0$ on obtient $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$.

3. Applications

Théorème 21 (Variations d'une fonction dérivable sur un intervalle)

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

- f est croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I \quad f'(x) \geqslant 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I \quad f'(x) \leqslant 0$.
- f est constante sur I si et seulement si pour tout $x \in I \quad f'(x) = 0$.

Remarque. Attention, l'hypothèse « I est un intervalle » est cruciale :

- Soit $A = [0,1] \cup [2,3]$ et $f : A \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in [0,1] \quad f(x) = 0$ et $\forall x \in [2,3] \quad f(x) = 1$. f est dérivable sur A, de dérivée nulle, et pourtant f n'est pas constante sur A.
- la fonction $f : x \mapsto 1/x$ a une dérivée négative sur $\mathbb{R}^*$ et pourtant elle n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ (comparer $f(-1)$ et $f(1)$).

Preuve.
Le deuxième point se déduit du premier en changeant f en $-f$. Le troisième point se déduit des deux premiers (f constante sur $I \Leftrightarrow f$ est à la fois croissante et décroissante sur I). Il suffit donc de prouver le premier point.
Supposons que f est croissante sur I. Soit $x_0 \in I$. Par croissance de f, pour tout $x \in I$ avec $x \neq x_0$, les quantités $f(x) - f(x_0)$ et $x - x_0$ sont du même signe donc leur quotient $T_{x_0}^f(x)$ est positif ou nul. Par passage à la limite, on en déduit que $f'(x_0) \geqslant 0$.
Réciproquement, supposons que pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$. Soit $(x,y) \in I^2$ tel que $x < y$. D'après le TAF appliqué sur l'intervalle $[x,y]$, il existe $c \in]x,y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y-x)$. Comme $f'(c) \geqslant 0$ et $y - x > 0$, on en déduit que $f(x) \leqslant f(y)$. f est donc croissante sur I.

Corollaire 22

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

- f est strictement croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I \quad f'(x) \geqslant 0$ et f' n'est nulle sur aucun sous-intervalle ouvert et non vide de I.
- f est strictement décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I \quad f'(x) \leqslant 0$ et f' n'est nulle sur aucun sous-intervalle ouvert et non vide de I.

Remarque. En particulier si f' est positive sur I et ne s'y annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.

Preuve.
Il suffit de démontrer le premier point.
Supposons f strictement croissante sur I. Alors d'après le théorème précédent, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$. Si f' est nulle sur un sous-intervalle ouvert et non vide de I, alors il existe $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$ et f' est nulle sur $]x, y[$. Mais alors f est constante sur $]x, y[$, ce qui est absurde puisque f y est strictement croissante.
Réciproquement supposons que pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ et que f' n'est nulle sur aucun sous-intervalle ouvert et non vide de I. Alors f est croissante sur I. Si elle n'est pas strictement croissante sur I, il existe $x < y$ deux éléments de I tels que $f(x) \geqslant f(y)$. Par croissance de f, on a nécessairement $f(x) = f(y)$ et donc f est constante sur l'intervalle $[x, y]$. En particulier f' est nulle sur l'intervalle ouvert et non vide $]x, y[$, ce qui est absurde.

Définition 23

Soit I un intervalle. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *lipschitzienne sur I* si il existe $k \geqslant 0$ tel que pour tout $(x, y) \in I^2 \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$.

Remarques.

- Une fonction qui vérifie l'inégalité de la définition avec la constante k est dite $k-$*lipschitzienne* sur I.
- Toute fonction lipschitzienne sur un intervalle I est continue sur I (en exercice).

Proposition 24

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.
f est $k-$lipschtzienne sur I si et seulement si $\forall x \in I \quad |f'(x)| \leqslant k$.

Preuve.
Supposons f $k-$lipschitzienne sur I. Fixons $x \in I$.
Pour tout $y \in I$, avec $y \neq x$, on a $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$ et donc $|T_x^f(y)| \leqslant k$. Comme f est dérivable en x, on obtient par passage à la limite lorsque y tend vers x : $|f'(x)| \leqslant k$.
Réciproquement, supposons $\forall x \in I \quad |f'(x)| \leqslant k$. Il faut prouver :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(y) - f(x)| \leqslant k|y - x|$$

Par symétrie, il suffit de montrer cette inégalité lorsque $x \leqslant y$. Comme elle vraie lorsque $x = y$, on peut donc se limiter au cas où $x < y$. Il suffit alors d'appliquer l'IAF sur l'intervalle $[x, y]$: $|f(y) - f(x)| \leqslant k(y - x)$.

Théorème 25 (Prolongement dérivable)

Soit $a < b$ deux réels. Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[a, b[$.
On suppose que f' admet une limite finie ℓ en b.
Alors f se prolonge en une application dérivable sur $[a, b]$. De plus, notant encore f ce prolongement, on a $f'(b) = \ell$.

Remarque. Le théorème est bien sûr valable pour $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ avec les changements adéquats.

Preuve.
Étape 1 : On montre que f est lipschitzienne au voisinage de b.
Utilisant le fait que $\lim\limits_{x \to b} f'(x) = \ell$, il existe $\eta > 0$ (que l'on peut supposer plus petit que $b - a$) tel que
$\forall x \in]b - \eta, b[\quad |f'(x) - \ell| < 1$. Grâce à la seconde inégalité triangulaire, on en déduit que
$\forall x \in]b - \eta, b[\quad \big||f'(x)| - |\ell|\big| < 1$ et donc que $|f'(x)| < |\ell| + 1$. Notant $k = |\ell| + 1$, on déduit de la proposition précédente que f est k-lipschitzienne sur $]b - \eta, b[$.

Étape 2 : On montre que f a un prolongement par continuité en b.
Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\alpha = \min(\eta, \frac{\varepsilon}{2k})$.
Soit $(x, y) \in]b - \alpha, b[^2$. On a alors $(x, y) \in]b - \eta, b[^2$. Par l'étape 1 et l'inégalité triangulaire :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y| \leqslant k\big(|x - b| + |b - y|\big) < 2\alpha k \leqslant \varepsilon.$$

Par le critère de Cauchy d'existence d'une limite, f admet une limite finie au point b. Par conséquent f admet un prolongement par continuité au point b. On note encore f ce prolongement.

Étape 3 : On montre que f est dérivable en b.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta' > 0$ (que l'on peut supposer plus petit que $b - a$) tel que $\forall x \in]b - \eta', b[\quad |f'(x) - \ell| < \varepsilon$.
Soit $x \in]b - \eta', b[$. On peut appliquer le TAF à la fonction f sur le segment $[x, b]$: il existe $c_x \in]x, b[$ tel que $T_b^f(x) = f'(c_x)$. Comme c_x appartient à $]x, b[\subset]b - \eta', b[$ on a

$$|T_b^f(x) - \ell| = |f'(c_x) - \ell| < \varepsilon.$$

f est donc dérivable en b et $f'(b) = \ell$.

Corollaire 26

Soit I un intervalle et $x_0 \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I.
- Si f est dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$ et f' admet une limite finie ℓ en x_0 alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$.
- Si f est de classe C^n sur $I \setminus \{x_0\}$ et $\forall k \in \{1, \dots n\}$, $f^{(k)}$ admet une limite finie en x_0 alors f est de classe C^n sur I.

Preuve.
Pour le premier point, si x_0 est une borne de I il s'agit directement du théorème précédent. Sinon, il suffit d'appliquer le théorème à droite et à gauche de x_0.
Une fois le premier point établi, le second point se démontre par récurrence (les détails sont laissés en exercice).

III. Formules de Taylor

1. Comparaison locale et asymptotique des fonctions

Définition 27

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soient f et g deux fonctions définies sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, noté D, qui contient un voisinage de a (sauf peut-être a). On dit que :

- *f est négligeable devant g en a*, que l'on note $f = o_a(g)$, lorsqu'il existe un voisinage V de a, une fonction $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in V \cap D \quad f(x) = \varepsilon(x) g(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

- *f est dominée par g en a*, que l'on note $f = O_a(g)$, lorsqu'il existe un voisinage V de a, une fonction $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in V \cap D \quad f(x) = \varepsilon(x) g(x) \quad \text{avec} \quad \varepsilon \text{ une fonction bornée sur } V.$$

- *f est équivalente à g en a*, que l'on note $f \sim_a g$, lorsqu'il existe un voisinage V de a, une fonction $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in V \cap D \quad f(x) = \varepsilon(x) g(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 1.$$

Remarques.

- Ces notions ont déjà été étudiées pour les suites numériques. Toutes les propriétés établies dans le cadre des suites ont leurs analogues pour les fonctions. On n'énoncera pas toutes ces propriétés, vous vous assurerez de savoir les formuler (et les prouver).
- Par exemple, lorsque g ne s'annule pas au voisinage de a (sauf peut-être en a) $f = o_a(g)$ ssi f/g a une limite nulle en a.

Exemples. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n < p$.

- Si $a \in \mathbb{R}$ alors $(x-a)^p = o_a((x-a)^n)$.
- $x^n = o_{+\infty}(x^p)$.

2. Formule de Taylor-Young

Théorème 28 (Formule de Taylor-Young)

Soit I un intervalle non vide, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in I$. Soit f une fonction de classe D^{n-1} sur I et n−fois dérivable en a. Alors, au voisinage de a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o_a((x-a)^n)$$

Remarques.

- Le cas $n = 1$ de la formule de Taylor-Young traduit la dérivabilité de f en a.
- Plus rigoureusement, la formule de Taylor-Young s'écrit :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o_a((x-a)^n)$$

- Le terme $o_a((x-a)^n)$ est appelé reste de Young. En vertu de ce qui précède, on peut aussi l'écrire plus explicitement sous la forme $\varepsilon(x)(x-a)^n$ où ε est une fonction de limite nulle en a.

Preuve.
On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n = 1$ la formule est déjà connue (cf. remarque).
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons-la vraie au rang n. Soit f de classe D^n sur I et $n+1$–fois dérivable en a.
Posons $g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$, d'après l'hypothèse faite sur f, g' est de classe D^{n-1} sur I et n–fois dérivable en a. D'ailleurs, on a pour tout $k \in \{0,\dots,n+1\}$, $g^{(k)}(a) = 0$. Par hypothèse de récurrence, on a donc $g'(x) = o_a((x-a)^n)$. D'après le TAF, pour tout $x \in I$, il existe $c(x)$ compris (strictement) entre a et x tel que $g(x) = g(x) - g(a) = g'(c(x))(x-a)$. Puisque $c(x)$ est compris entre a et x, on a $|c(x)-a| \leqslant |x-a|$ et en particulier $\lim_{x\to a} c(x) = a$. On a :

$$\left|\frac{g(x)}{(x-a)^{n+1}}\right| = \left|\frac{g'(c(x))(x-a)}{(x-a)^{n+1}}\right| = \frac{|g'(c(x))|}{|x-a|^n} \leqslant \frac{|g'(c(x))|}{|c(x)-a|^n}$$

Or $g'(x) = o_a((x-a)^n)$ donc $g'(x)/(x-a)^n$ a une limite nulle en a. Puisque $\lim_{x\to a} c(x) = a$, par composition de limites $g'(c(x))/(c(x)-a)^n$ a une limite nulle en a. D'après la majoration ci-dessus, $g(x)/(x-a)^{n+1}$ a aussi une limite nulle en a, ce qui signifie que $g(x) = o_a((x-a)^{n+1})$ et termine la preuve.

3. Formule de Taylor-Lagrange

Théorème 29 (Formule de Taylor-Lagrange)

Soit $a < b$ deux réels, $n \in \mathbb{N}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a,b]$ et D^{n+1} sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Remarques.

- Le cas $n = 0$ de la formule de Taylor-Lagrange est le théorème des accroissements finis.
- Le terme $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$ est appelé reste de Lagrange.
- La formule de Taylor-Lagrange est également valable lorsque $a > b$. En effet, si $a > b$, la formule de Taylor-Lagrange appliquée à $g : x \longmapsto f(b+a-x)$ sur $]b,a[$ donne l'existence d'un $c \in]b,a[$ tel que :

$$g(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(b)}{k!}(a-b)^k + \frac{g^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(a-b)^{n+1}$$

  Or, il est facile de voir que $g(a) = f(b)$ et pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$, $g^{(k)}(b) = (-1)^k f^{(k)}(a)$. On a aussi $g^{(n+1)}(c) = (-1)^{n+1} f^{(n+1)}(b+a-c)$. Posant $d = b+a-c \in]b,a[$, on a obtenu :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(d)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

- En posant $h = b-a$ et $\theta = \frac{c-a}{b-a}$, on a $\theta \in]0,1[$ et $c = a+\theta h$. La formule de Taylor-Lagrange se réécrit :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

Preuve.
Comme on l'a déjà fait remarquer le cas $n=0$ est connu. On suppose donc $n \geqslant 1$ et on considère la fonction $g(x)=f(b)-f(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - A(b-x)^{n+1}$ où A est un réel qui est choisi de sorte que $g(a)=0$, ce qui est possible car $b \neq a$. On a $g(a)=g(b)=0$ et d'après les hypothèses de régularité faites sur f, g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On peut donc lui appliquer le théorème de Rolle : il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c)=0$. Or pour tout $x \in]a,b[$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -f'(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} + A(n+1)(b-x)^n \\ &= -f'(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + A(n+1)(b-x)^n \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + A(n+1)(b-x)^n \end{aligned}$$

$g'(c)=0$ signifie donc que $A=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$. En renvoyant cette valeur dans l'expression $g(b)=0$, on obtient la formule souhaitée.

Corollaire 30 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit I un intervalle, $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction de classe D^{n+1} sur I.
On suppose qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que $\forall x \in I \quad |f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$. Alors pour tout $(a,b) \in I^2$:

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant \frac{M|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Preuve.
Si $a=b$ tout est nul et l'inégalité est vraie. Sinon, $a<b$ ou $b>a$ et dans les deux cas on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange entre a et b (cf. remarque précédente) : il existe c compris entre a et b tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Et en majorant $|f^{(n+1)}(c)|$ par M on a :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \right| \leqslant \frac{M|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Exemple. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Appliquons l'inégalité à l'ordre n à la fonction exponentielle entre 0 et x.
Pour tout $t \in [-|x|,|x|] \quad |\exp^{(n+1)}(t)| = \exp(t) \leqslant \exp(|x|)$. D'où :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

La suite $\left(\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 d'après les résultats de croissances comparées des suites de référence. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e^x.

4. Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 31 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soit $a < b$ deux réels, $n \in \mathbb{N}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} sur $[a,b]$. Alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Remarques.

- Le terme $\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$ est appelé reste intégral ou reste de Laplace.
- Le cas $n = 0$ s'écrit : pour f de classe C^1 sur $[a,b]$, $\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$. Il s'agit du théorème fondamental de l'analyse pour l'intégrale de Riemann (cf. cours d'intégration de deuxième année pour une preuve).

Preuve.
On commence par rappeler la formule d'intégration par parties pour les fonctions de classe C^1 sur $[a,b]$:

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = [f(t)g(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt$$

Montrons la proposition par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Nous supposons connu le cas $n = 0$ (cf. remarque).
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons établie la formule au rang n et prouvons-la au rang $n+1$. Soit f de classe C^{n+2} sur $[a,b]$. Par hypothèse de récurrence :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Appliquons la formule d'intégration par parties sur le reste :

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt &= \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_{t=a}^{t=b} + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt\end{aligned}$$

La formule au rang $n+1$ s'en déduit. Par principe de récurrence, ceci termine la preuve.

Développements limités

I. Généralités

1. Définition

Définition 1

Soit x_0 un réel et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un voisinage (éventuellement latéral) de x_0 sauf peut-être en x_0. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On dit que f *admet un développement limité à l'ordre n en x_0* lorsqu'il existe P_n un polynôme de degré inférieur ou ègal à n tel que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x - x_0)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Ceci revient à dire que $f(x) - P_n(x - x_0) = o_{x_0}((x - x_0)^n)$, que l'on écrit aussi

$$f(x) = P_n(x - x_0) + o_{x_0}((x - x_0)^n) \tag{1}$$

Le polynôme $P_n(x - x_0)$ est appelé *partie régulière* du développement limité et $o_{x_0}((x - x_0)^n)$ est son *reste*.

Remarques.

- La formule (1) est appelée développement limité de f à l'ordre n en x_0. Dans toute la suite du cours, on abrévie « développement limité à l'ordre n en x_0 » par $d\ell_n(x_0)$.
- De manière plus détaillée, f admet un $d\ell_n(x_0)$ ssi il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, V un voisinage de x_0 et $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ une fonction de limite nulle en x_0 telle que

$$\forall x \in V \cap I,\ f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

- f admet un $d\ell_n(x_0)$ ssi $g : h \mapsto f(x_0 + h)$ admet un $d\ell_n(0)$. Plus précisément, si $P_n(h)$ est la partie régulière du $d\ell_n(0)$ de g, alors $P_n(x - x_0)$ est la partie régulière du $d\ell_n(x_0)$ de f. En pratique, quitte à effectuer une translation, on peut donc toujours se ramener à la détermination d'un développement limité en 0.

Exemple. Pour $x \neq 1$, la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ a pour valeur :

$$1 + x + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

On en déduit que pour tout $x \neq 1$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + \dots + x^n + x^n \frac{x}{1 - x}$$

La fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ définie par $\varepsilon(x) = \frac{x}{1-x}$ est une fonction de limite nulle en 0. Il s'ensuit que $f : x \mapsto (1 - x)^{-1}$, admet un développement limité à tout ordre en 0.

Définition 2

Soit I un voisinage de $+\infty$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On dit que f *admet un développement asymptotique à l'ordre n en $+\infty$* lorsqu'il existe P_n un polynôme de degré inférieur ou ègal à n tel que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - P_n(\frac{1}{x})}{(\frac{1}{x})^n} = 0$$

Ceci revient à dire que

$$f(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

Remarques.

- Attention, ce n'est pas la définition la plus générale de développement asymptotique, mais celle-ci sera suffisante pour les besoins de ce cours.
- La définition s'adapte de manière évidente pour définir les développements asymptotiques en $-\infty$.
- f admet un développement asymptotique à l'ordre n en $+\infty$ ssi il existe $(a_0,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, V un voisinage de $+\infty$ et $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ une fonction de limite nulle en $+\infty$ telle que
$$\forall x \in V \cap I,\ f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon(x)$$
- f admet un développement asymptotique à l'ordre n en $+\infty$ ssi $g : h \mapsto f(1/h)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 à droite (abrévié $d\ell_n(0^+)$). En pratique, on se ramène donc à la détermination d'un développement limité en 0 (à droite).

2. Premières propriétés

Proposition 3 (Unicité)

S'il existe, un développement limité d'une fonction f en un point x_0 est unique.
Plus précisément s'il existe $n \in \mathbb{N}$, $(a_0,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $(b_0,\dots,b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$f(x) = a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+o_{x_0}((x-x_0)^n) = b_0+b_1(x-x_0)+\cdots+b_n(x-x_0)^n+o_{x_0}((x-x_0)^n)$$

Alors, pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$, $a_k = b_k$.

Preuve.
Montrons la propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : si $n = 0$, $f(x) = a_0 + o_{x_0}(1) = b_0 + o_{x_0}(1)$. On a alors, $\lim_{x\to x_0} f(x) = a_0 = b_0$.
Prouvons l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons la propriété vraie au rang n et montrons-la au rang $n+1$. Soit $(a_0,\dots,a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$, $(b_0,\dots,b_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$, ε_1 et ε_2 deux fonctions de limite nulle en x_0 tels que

$$f(x) = a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}+(x-x_0)^{n+1}\varepsilon_1(x) = b_0+b_1(x-x_0)+\cdots+b_{n+1}(x-x_0)^{n+1}+(x-x_0)^{n+1}\varepsilon_2(x)$$

Puisque $a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}+(x-x_0)^{n+1}\varepsilon_1(x) = o_{x_0}((x-x_0)^n)$ et $b_{n+1}(x-x_0)^{n+1}+(x-x_0)^{n+1}\varepsilon_2(x) = o_{x_0}((x-x_0)^n)$, l'hypothèse de récurrence garantit que pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$, $a_k = b_k$. Il reste donc à prouver $a_{n+1} = b_{n+1}$.
On a

$$\frac{f(x) - a_0 - a_1(x-x_0) - \cdots - a_n(x-x_0)^n}{(x-x_0)^{n+1}} = a_{n+1} + \varepsilon_1(x) = b_{n+1} + \varepsilon_2(x)$$

Prenant la limite lorsque x tend vers x_0 dans l'expression précédente, on obtient $a_{n+1} = b_{n+1}$.
Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 4

Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction qui admet un $d\ell_n(0)$. On note P_n sa partie régulière.

- Si f est une fonction paire alors P_n est un polynôme pair, i.e. P_n est une combinaison linéaire de monômes de degrés pairs.
- Si f est une fonction impaire alors P_n est un polynôme impair, i.e. P_n est une combinaison linéaire de monômes de degrés impairs.

Preuve.
On prouve seulement le premier point. Comme f admet un $d\ell_n(0)$, il existe $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o_0(x^n)$. Par parité de f, on a $f(x) = f(-x) = a_0 - a_1 x + \cdots + (-1)^n a_n x^n + o_0(x^n)$. Par unicité du $d\ell_n(0)$, on a pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $a_k = (-1)^k a_k$. Il s'ensuit que si $k \in \{0, \ldots, n\}$ et k est impair, alors $a_k = -a_k$ et donc $a_k = 0$.

Définition 5

Soit P un ploynôme et $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathrm{Tronc}_n(P)$, appelée troncature de P à l'ordre n, le polynôme obtenu à partir de P en éliminant les monômes de degré strictement plus grand que n.

Remarque. $\mathrm{Tronc}_n(P)$ est donc un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Le polynôme $P - \mathrm{Tronc}_n(P)$ est une combinaison linéaire de monômes de degré supérieur ou égal à $n+1$, on peut donc l'écrire sous la forme $x^{n+1} R$ où R est un polynôme.
Exemple. Si $P(x) = 1 - 2x + 5x^2 + 3x^8 - x^9$, $\mathrm{Tronc}_5(P)(x) = 1 - 2x + 5x^2$.

Proposition 6

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit f une fonction qui admet un $d\ell_n(x_0)$ de partie régulière $P_n(x - x_0)$.
Soit $p \leqslant n$.
Alors, f admet un $d\ell_p(x_0)$ de partie régulière $\mathrm{Tronc}_p(P_n)(x - x_0)$.

Preuve.
Par définition, il existe $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et une fonction ε de limite nulle en x_0 telle que

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x) \\
&= a_0 + \cdots + a_p(x - x_0)^p + a_{p+1}(x - x_0)^{p+1} + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x) \\
&= a_0 + \cdots + a_p(x - x_0)^p + (x - x_0)^p [a_{p+1}(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^{n-p} + (x - x_0)^{n-p} \varepsilon(x)] \\
&= a_0 + \cdots + a_p(x - x_0)^p + (x - x_0)^p \varepsilon_1(x)
\end{aligned}$$

où $\varepsilon_1(x) = a_{p+1}(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^{n-p} + (x - x_0)^{n-p} \varepsilon(x)$ est une fonction de limite nulle en x_0. f admet donc un $d\ell_p(x_0)$ dont la partie régulière est $a_0 + \cdots + a_p(x - x_0)^p = \mathrm{Tronc}_p(P_n)(x - x_0)$.

Proposition 7

Soit $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction qui admet un $d\ell_n(x_0)$ de partie régulière $P_n(x - x_0)$. On suppose que P_n n'est pas le polynôme nul et on note $a_p x^p$ son monôme de plus bas degré ($0 \leqslant p \leqslant n$ et $a_p \neq 0$).
Alors, $f(x) \sim_{x_0} a_p(x - x_0)^p$ et il existe un voisinage de x_0 sur lequel $f(x)$ a le même signe que $a_p(x - x_0)^p$.

Remarque. Cette proposition a un analogue pour les développements asymptotiques en l'infini.

Preuve.
Puisque $p \leqslant n$, f admet un $d\ell_p(x_0)$: il existe V un voisinage de x_0 et $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ de limite nulle en x_0 tel que :

$$\forall x \in V \cap I,\ f(x) = a_p(x - x_0)^p + (x - x_0)^p \varepsilon(x)$$

En divisant par $a_p(x - x_0)^P$ et en prenant la limite lorsque x tend vers x_0, on en déduit que $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{a_p(x-x_0)^p} = 1$.
Par définition de la limite, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap I \setminus \{x_0\}$ on a $\frac{f(x)}{a_p(x-x_0)^p} \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$. En particulier, $f(x)$ et $a_p(x - x_0)^p$ ont le même signe pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap I \setminus \{x_0\}$.

3. Développements limités et régularité

Proposition 8

Soit f une fonction définie au voisinage du réel x_0 (x_0 inclus).

- f admet un $d\ell_0(x_0)$ ssi f est continue en x_0. Si c'est le cas, le $d\ell_0(x_0)$ de f est : $f(x) = f(x_0) + o_{x_0}(1)$.
- f admet un $d\ell_1(x_0)$ ssi f est dérivable en x_0. Si c'est le cas, le $d\ell_1(x_0)$ de f est : $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o_{x_0}((x - x_0))$.

Preuve.
f est continue en x_0 ssi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ssi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$ ssi $f(x) - f(x_0) = o_{x_0}(1)$.
Le deuxième point a été démontré dans le chapitre sur la dérivation des fonctions.

Remarques.

- Attention, dès que $n \geqslant 2$ et si f admet un $d\ell_n(x_0)$ alors f n'est pas nécessairement n−fois dérivable en x_0. Considérons par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

  Puisque $f(x)/x^2 = x \sin(1/x)$ et que $\sin(1/x)$ est bornée par 1, le théorème d'encadrement garantit que $f(x)/x^2$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Ceci signifie que $f(x) = o_0(x^2)$ et f admet donc un $d\ell_2(0)$ (dont la partie régulière est nulle). Elle admet en particulier un $d\ell_1(0)$ et donc est dérivable en 0 et sa dérivée $f'(0) = 0$. Par composition et produit de fonctions dérivables, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée : $f'(x) = 3x^2 \sin(1/x) - x \cos(1/x)$. Pour tout $x \neq 0$:

$$T_0^{f'}(x) = \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Par encadrement, la fonction $x \mapsto 3x^2 \sin(1/x)$ a une limite nulle en 0. Par contre, la fonction $x \mapsto \cos(1/x)$ n'a pas de limite en 0 (cf. TD). Il s'ensuit que la fonction $T_0^{f'}$ ne peut pas avoir de limite en 0 ; f n'est donc pas 2−fois dérivable en 0.

- Par contre, la régularité de f au voisinage de x_0 suffit à garantir que f y admet un développement limité. Il s'agit du théorème de Taylor-Young dont nous rappelons l'énoncé.

Théorème 9 (Formule de Taylor-Young)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit x_0 un réel et f une fonction de classe D^{n-1} sur un voisinage de x_0 et n−fois dérivable en x_0. Alors f admet un $d\ell_n(x_0)$ donné par la formule suivante :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n)$$

Remarque. Si f est de classe C^∞ sur un voisinage de x_0 alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, f admet un $d\ell_n(x_0)$ donné par la formule précédente.

Exemples.

- Les fonctions exponentielle, sinus et cosinus sont des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ dont les dérivées successives sont faciles à calculer. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\exp^{(n)}(x) = \exp(x), \qquad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \qquad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

En 0, on a donc les développements limités suivants :

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o_0(x^n) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_0(x^{2n+2}) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_0(x^{2n+1})
\end{aligned}$$

- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est de classe C^∞ sur l'intervalle $I =]-1, +\infty[$. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = \alpha.(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}$. Étendons la notation des coefficients binômiaux en posant $\binom{\alpha}{0} = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha.(\alpha-1)\ldots(\alpha-(k-1))}{k!} \quad \text{on a donc} \quad \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{\alpha}{k}.$$

La formule de Taylor-Young appliquée à f en 0 à l'ordre n s'écrit :

$$(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o_0(x^n)$$

En pratique, pour calculer les $\binom{\alpha}{k}$ de proche en proche on peut utiliser la relation $\displaystyle\binom{\alpha}{k+1} = \frac{\alpha-k}{k+1}\binom{\alpha}{k}$.

4. Opérations et développements limités

Puisqu'on peut toujours se ramener, quitte à faire une translation, à la détermination d'un développement limité en 0, nous nous limiterons à cette situation dans les énoncés de cette section.

a. Opérations algébriques

Proposition 10

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions admettant chacune un $d\ell_n(0)$ de parties régulières respectives P_n et Q_n. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- λf admet un $d\ell_n(0)$ de partie régulière λP_n.
- $f + g$ admet un $d\ell_n(0)$ de partie régulière $P_n + Q_n$.
- $f \times g$ admet un $d\ell_n(0)$ de partie régulière $\mathrm{Tronc}_n(P_n \times Q_n)$.

Preuve.
Les deux premiers points sont relativement élémentaires et résultent du quatrième et du second point de la proposition 28 du chapitre concernant la dérivation.
Nous détaillons le dernier point. Par hypothèse il existe deux voisinages V_1 et V_2 de 0 et des fonctions $\varepsilon_1 : V_1 \to \mathbb{R}$ et $\varepsilon_2 : V_2 \to \mathbb{R}$ de limite nulle en 0 tel que

$$\forall x \in I \cap V_1,\ f(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in I \cap V_2,\ g(x) = Q_n(x) + x^n \varepsilon_2(x)$$

Le polynôme $P_n Q_n - \mathrm{Tronc}_n(P_n Q_n)$ est une combinaison linéaire de monômes dont les degrés sont strictement supérieurs à n. Il existe donc un polynôme R tel que $P_n Q_n - \mathrm{Tronc}_n(P_n Q_n) = x^{n+1} R$. Donc, pour tout $x \in I \cap V_1 \cap V_2$:

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) &= (P_n(x) + x^n \varepsilon_1(x))(Q_n(x) + x^n \varepsilon_2(x)) \\
&= P_n(x)Q_n(x) + x^n(\varepsilon_1(x)Q_n(x) + \varepsilon_2(x)P_n(x) + \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)) \\
&= \mathrm{Tronc}_n(P_n Q_n)(x) + x^{n+1}R(x) + x^n(\varepsilon_1(x)Q_n(x) + \varepsilon_2(x)P_n(x) + \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)) \\
&= \mathrm{Tronc}_n(P_n Q_n)(x) + x^n(xR(x) + \varepsilon_1(x)Q_n(x) + \varepsilon_2(x)P_n(x) + \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x))
\end{aligned}$$

Notons $\varepsilon_3 : V_1 \cap V_2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varepsilon_3(x) = xR(x) + \varepsilon_1(x)Q_n(x) + \varepsilon_2(x)P_n(x) + \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)$. ε_3 a une limite nulle en 0 et pour tout $x \in I \cap V_1 \cap V_2$: $f(x)g(x) = \mathrm{Tronc}_n(P_n Q_n)(x) + x^n \varepsilon_3(x)$. La fonction fg admet donc un $d\ell_n(0)$ de partie régulière $\mathrm{Tronc}_n(P_n Q_n)$.

Exemple. On rappelle que les fonctions sinus et cosinus hyperboliques, notées respectivement sh et ch, sont les fonctions définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Étant donné $n \in \mathbb{N}$, le $d\ell_n(0)$ de la fonction exponentielle est : $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o_0(x^n)$. On a donc aussi : $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o_0(x^n)$. Par somme et différence, on obtient les développements limités en 0 des fonctions sinus et cosinus hyperboliques :

$$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_0(x^{2n+2}) \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_0(x^{2n+1})$$

Avant de passer au développement limité d'un quotient on rappelle le théorème de division selon les puissances croissantes.

Proposition 11 (Division selon les puissances croissantes)

Soit A et B deux polynômes tel que $B(0) \neq 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe un unique couple de polynômes (Q_n, R_n) qui vérifie

$$\begin{cases} A = BQ_n + x^{n+1}R_n \\ \deg(Q_n) \leqslant n \end{cases}$$

où $\deg(Q_n)$ désigne le dégré du polynôme Q_n. Q_n est appelé le quotient et R_n le reste de la division selon les puissances croissantes à l'ordre n de A par B.

Proposition 12

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions admettant chacune un $d\ell_n(0)$ de parties régulières respectives A_n et B_n. On suppose également que $\lim_{x\to 0} g(x) \neq 0$.
Alors f/g admet un $d\ell_n(0)$ dont la partie régulière est égale au quotient de la division selon les puissances croissantes à l'ordre n de A_n par B_n.

Preuve.
Par hypothèse il existe deux voisinages V_1 et V_2 de 0 et des fonctions $\varepsilon_1 : V_1 \to \mathbb{R}$ et $\varepsilon_2 : V_2 \to \mathbb{R}$ de limite nulle en 0 tel que

$$\forall x \in I \cap V_1,\ f(x) = A_n(x) + x^n \varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in I \cap V_2,\ g(x) = B_n(x) + x^n \varepsilon_2(x)$$

Comme $\lim_{x\to 0} g(x) = B_n(0) \neq 0$, quitte à réduire V_2, on peut supposer que ni g ni B_n ne s'annulent sur V_2.
Étape 1 : Montrons que $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_n(x)}{B_n(x)} + o_0(x^n)$.
Pour tout $x \in I \cap V_1 \cap V_2$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{A_n(x)}{B_n(x)} + \left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A_n(x)}{B_n(x)}\right) = \frac{A_n(x)}{B_n(x)} + \frac{f(x)B_n(x) - A_n(x)g(x)}{g(x)B_n(x)} \\ &= \frac{A_n(x)}{B_n(x)} + \frac{(A_n(x) + x^n\varepsilon_1(x))B_n(x) - A_n(x)(B_n(x) + x^n\varepsilon_2(x))}{g(x)B_n(x)} \\ &= \frac{A_n(x)}{B_n(x)} + x^n \frac{\varepsilon_1(x)B_n(x) - \varepsilon_2(x)A_n(x)}{g(x)B_n(x)} = \frac{A_n(x)}{B_n(x)} + x^n\varepsilon_3(x) \end{aligned}$$

où $\varepsilon_3 : V_1 \cap V_2 \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $\varepsilon_3(x) = \frac{\varepsilon_1(x)B_n(x) - \varepsilon_2(x)A_n(x)}{g(x)B_n(x)}$. ε_3 est une fonction de limite nulle en 0.
Étape 2 : Par division selon les puissances croissantes de A_n par B_n à l'ordre n, il existe (Q_n, R_n) avec $\deg(Q_n) \leqslant n$ tel que $A_n = B_nQ_n + x^{n+1}R_n(x)$. Pour tout $x \in I \cap V_1 \cap V_2$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q_n(x) + x^{n+1}\frac{R_n(x)}{B_n(x)} + x^n\varepsilon_3(x) = Q_n(x) + x^n\left(x\frac{R_n(x)}{B_n(x)} + \varepsilon_3(x)\right) = Q_n(x) + x^n\varepsilon_4(x)$$

où $\varepsilon_4 : V_1 \cap V_2 \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $\varepsilon_4(x) = x\frac{R_n(x)}{B_n(x)} + \varepsilon_3(x)$. ε_4 ayant une limite nulle en 0, f/g admet un $d\ell_n(0)$ de partie régulière Q_n.

Exemple. Déterminons le $d\ell_3(0)$ de la fonction tangente. Les $d\ell_3(0)$ de sinus et cosinus sont :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3) \qquad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o_0(x^3)$$

La partie régulière du $d\ell_3(0)$ de la fonction tangente est égale au quotient de la division selon les puissances croissantes à l'ordre 3 de $x-\frac{x^3}{6}$ par $1-\frac{x^2}{2}$.

$$
\begin{array}{rrr|l}
x & -\frac{x^3}{6} & & 1 \; -\frac{x^2}{2} \\
\cline{4-4}
-x & +\frac{x^3}{2} & & x \; +\frac{x^3}{3} \\
\cline{1-2}
 & \frac{x^3}{3} & & \\
 & -\frac{x^3}{3} & +\frac{x^5}{6} & \\
\cline{2-3}
 & & \frac{x^5}{6} &
\end{array}
$$

On a donc $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o_0(x^3)$.

Proposition 13

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions admettant chacune un $d\ell_n(0)$ de parties régulières respectives P_n et Q_n. On suppose $f(I) \subset J$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
Alors, $g \circ f$ admet un $d\ell_n(0)$ de partie régulière égale à $\mathrm{Tronc}_n(Q_n \circ P_n)$.

Preuve.
Si $n = 0$, alors il s'agit simplement du théorème de composition des limites. Dans la suite on suppose $n \in \mathbb{N}^*$.
Par hypothèse il existe deux voisinages V_1 et V_2 de 0 et des fonctions $\varepsilon_1 : V_1 \to \mathbb{R}$ et $\varepsilon_2 : V_2 \to \mathbb{R}$ de limite nulle en 0 tel que

$$\forall x \in I \cap V_1,\ f(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad \forall y \in J \cap V_2,\ g(y) = Q_n(y) + y^n \varepsilon_2(y)$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, on peut supposer, quitte à réduire V_1, que pour tout $x \in V_1$ on a $f(x) \in V_2$.
Pour tout $x \in I \cap V_1$ on a :

$$g(f(x)) = Q_n(f(x)) + (f(x))^n \varepsilon_2(f(x)) \tag{2}$$

Étape 1 : Montrons que $(f(x))^n \varepsilon_2(f(x)) = o_0(x^n)$.
Puisque $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, on a $P_n(0) = 0$ et donc il existe un polynôme T_n tel que $P_n(x) = xT_n(x)$. Donc $(f(x))^n \varepsilon_2(f(x)) = x^n[T_n(x) + x^{n-1}\varepsilon_1(x)]^n \varepsilon_2(f(x))$. Par composition des limites, $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(f(x)) = 0$ et donc $(f(x))^n \varepsilon_2(f(x)) = x^n \varepsilon_3(x)$ où ε_3 est la fonction de limite nulle en 0 définie par $\varepsilon_3(x) = [T_n(x) + x^{n-1}\varepsilon_1(x)]^n \varepsilon_2(f(x))$.
Étape 2 : Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(f(x))^k = (P_n(x))^k + o_0(x^n)$.
C'est vrai pour $k = 1$, car f admet un $d\ell_n(0)$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $(f(x))^k = (P_n(x))^k + o_0(x^n)$. Alors il existe une fonction $\tilde{\varepsilon}_k$ de limite nulle en 0 telle que $(f(x))^k = (P_n(x))^k + x^n \tilde{\varepsilon}_k(x)$

$$
\begin{aligned}
(f(x))^{k+1} &= (f(x))^k (P_n(x) + x^n \varepsilon_1(x)) = ((P_n(x))^k + x^n \tilde{\varepsilon}_k(x))(P_n(x) + x^n \varepsilon_1(x)) \\
&= (P_n(x))^{k+1} + x^n[(P_n(x))^k \varepsilon_1(x) + P_n(x)\tilde{\varepsilon}_k(x) + x^n \varepsilon_1(x)\tilde{\varepsilon}_k(x)] \\
&= (P_n(x))^{k+1} + x^n \tilde{\varepsilon}_{k+1}(x)
\end{aligned}
$$

où $\tilde{\varepsilon}_{k+1}$ est la fonction de limite nulle en 0 définie par $\tilde{\varepsilon}_{k+1}(x) = (P_n(x))^k \varepsilon_1(x) + P_n(x)\tilde{\varepsilon}_k(x) + x^n \varepsilon_1(x)\tilde{\varepsilon}_k(x)$.
La propriété est donc vraie au rang $k+1$.
Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
Étape 3 : Montrons que pour tout polynôme P, $P(f(x)) = P(P_n(x)) + o_0(x^n)$.
Soit P un polynôme. Il existe $m \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ tel que $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$. On a donc $P(f(x)) = a_0 + a_1 f(x) + \cdots + a_m (f(x))^m$. D'après la première étape, pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$, $(f(x))^k =$

$(P_n(x))^k + o_0(x^n)$. Puisqu'une combinaison linéaire de fonctions négligeables devant x^n est encore négligeable devant x^n (cf. proposition 28 du chapitre précédent), on a

$$\begin{aligned}P(f(x)) &= a_0 + a_1 f(x) + \cdots + a_m (f(x))^m = a_0 + a_1(P_n(x) + o_0(x^n)) + \cdots + a_m((P_n(x))^m + o_0(x^n)) \\ &= a_0 + a_1 P_n(x) + \cdots + a_m (P_n(x))^m + o_0(x^n) = P(P_n(x)) + o_0(x^n)\end{aligned}$$

Étape 4 : Grâce à (2) et l'étape 1, pour tout $x \in V_1 \cap I$: $g(f(x)) = Q_n(f(x)) + o_0(x^n)$. Puis, grâce à l'étape 3 appliquée au polynôme Q_n, $g(f(x)) = Q_n(P_n(x)) + o_0(x^n)$. Il existe un polynôme R tel que $Q_n(P_n(x)) - \mathrm{Tronc}_n(Q_n \circ P_n)(x) = x^{n+1}R(x) = o_0(x^n)$. On a finalement :

$$g(f(x)) = \mathrm{Tronc}_n(Q_n \circ P_n)(x) + o_0(x^n)$$

Remarque. Ne jamais appliquer cette proposition sans avoir vérifié que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Par exemple, on ne peut pas calculer le développement limité en 0 de $x \mapsto e^{\cos(x)}$ en composant les développements limités en 0 de exp et de cos. Par contre $e^{\cos(x)} = e^{1+(\cos(x)-1)} = e.e^{\cos(x)-1} = e.g(f(x))$ où $g(x) = \exp(x)$ et $f(x) = \cos(x) - 1$ vérifie à présent $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Exemple. Déterminons le $d\ell_5(0)$ de la fonction tangente hyperbolique. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$. On pourrait bien sûr procéder comme pour la fonction tangente en calculant le développement limité d'un quotient mais nous proposons ici une méthode alternative. Les $d\ell_5(0)$ des fonctions sh et ch sont :

$$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o_0(x^5) \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^5)$$

On a $\frac{1}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{1}{1+(\mathrm{ch}(x)-1)} = g(f(x))$ où $g(x) = \frac{1}{1+x}$ admet un $d\ell_5(0)$ donné par $g(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + o_0(x^5)$ et $f(x) = \mathrm{ch}(x) - 1 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^5)$ est une fonction de limite nulle en 0. D'après la proposition précédente :

$$\frac{1}{\mathrm{ch}(x)} = \mathrm{Tronc}_5\left[1 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^3 + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^4 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^5\right] + o_0(x^5)$$

Dans cette situation on ne développe pas tout explicitement, car ceci nous ferait calculer inutilement beaucoup de termes qui disparaissent lorsque l'on prend ensuite la troncature. Au lieu de celà, pour chaque entier k de 0 à 5, on analyse la contribution de chaque facteur en monômes de degré égal à k :

$$\frac{1}{\mathrm{ch}(x)} = 1 + 0.x - \frac{1}{2}x^2 + 0.x^3 + \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{4}\right)x^4 + 0.x^5 + o_0(x^5) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o_0(x^5)$$

Il ne reste plus qu'à effectuer le produit des développements limités de sh et $1/\mathrm{ch}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{th}(x) &= \mathrm{Tronc}_5\left[\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4\right)\right] + o_0(x^5) \\ &= x + 0.x^2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)x^3 + 0.x^4 + \left(\frac{5}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120}\right)x^5 + o_0(x^5) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o_0(x^5)\end{aligned}$$

5. Intégration

Proposition 14

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit I un intervalle contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction qui admet des primitives sur I. Soit F une primitive de f sur I.
Si f admet un $d\ell_n(0)$ de partie régulière P_n alors F admet un $d\ell_{n+1}(0)$ et on a :

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x P_n(t)dt + o_0(x^{n+1}) \quad \text{d'où} \quad F(x) = F(0) + \int_0^x P_n(t)dt + o_0(x^{n+1})$$

Remarque. Attention à ne pas oublier « le terme constant » $F(0)$ lorsqu'on applique cette proposition.

Preuve.
Il existe $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, V un voisinage de 0 (qu'on peut supposer de la forme $]-\eta, \eta[$ où $\eta > 0$) et une fonction $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ de limite nulle en 0 tel que pour tout $x \in V \cap I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x)$$

Pour $x \in I$, posons $\varphi(x) = F(x) - F(0) - \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$, pour démontrer la proposition il suffit de prouver que $\varphi(x) = o_0(x^{n+1})$. φ est dérivable sur I et pour tout $x \in V \cap I$ on a :

$$\varphi'(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = x^n \varepsilon(x)$$

Pour $x \in V \cap I$, appliquons le TAF entre 0 et x à la fonction φ : il existe $c(x)$ compris strictement entre 0 et x tel que $\varphi(x) - \varphi(0) = \varphi'(c(x))(x-0)$. Or $\varphi(0) = 0$, donc :

$$\varphi(x) = \varphi'(c(x))x = (c(x))^n \varepsilon(c(x))x = x^{n+1}\left(\frac{c(x)}{x}\right)^n \varepsilon(c(x))$$

Pour tout $x \in V \cap I$, posons $\tilde{\varepsilon}(x) = \left(\frac{c(x)}{x}\right)^n \varepsilon(c(x))$. Puisque $c(x)$ est compris entre 0 et x, $\lim_{x\to 0} c(x) = 0$ et donc par composition des limites $\lim_{x\to 0} \varepsilon(c(x)) = 0$. Comme $|c(x)| \leqslant |x|$ on a l'estimation :

$$0 \leqslant |\tilde{\varepsilon}(x)| = \left|\frac{c(x)}{x}\right|^n |\varepsilon(c(x))| \leqslant |\varepsilon(c(x))|$$

Et donc par encadrement, $\lim_{x\to 0} \tilde{\varepsilon}(x) = 0$. Finalement, on a montré que $\varphi(x) = x^{n+1}\tilde{\varepsilon}(x)$ où $\tilde{\varepsilon}$ est une fonction de limite nulle en 0, donc $\varphi(x) = o_0(x^{n+1})$.

Exemples.

- Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, f admet un $d\ell_n(0)$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o_0(x^n)$$

  $F :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \ln(1+x)$ est une primitive de f sur $]-1, +\infty[$. D'après la proposition précédente, F admet un $d\ell_{n+1}(0)$ qui vaut ($F(0)$ étant égal à 0) :

$$F(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o_0(x^{n+1})$$

- Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, par composition, g admet un $d\ell_{2n+1}(0)$:
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + o_0(x^{2n+1})$$
arctan est une primitive de g sur $\mathbb{R}$. arctan admet donc un $d\ell_{2n+2}(0)$ qui vaut (arctan(0) étant égal à 0) :
$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o_0(x^{2n+2})$$

6. Dérivation

Proposition 15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit I un intervalle contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I qui admet un $d\ell_n(0)$ de partie régulière le polynôme P_n.
Si f' admet un $d\ell_{n-1}(0)$ alors sa partie régulière est égale au polynôme P_n'.

Remarques.

- De manière plus détaillée, si $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I, admet un $d\ell_n(0)$ donné par
$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o_0(x^n) \quad \text{où} \quad (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$
et si f' admet un $d\ell_{n-1}(0)$, alors celui-ci est nécessairement égal à :
$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + o_0(x^{n-1})$$
- Attention, bien noter que l'existence d'un développement limité pour la dérivée est une hypothèse de la proposition et pas une des conclusions. Il n'y a en effet rien qui garantit que si f admet un $d\ell_n(0)$ alors f' admet $d\ell_{n-1}(0)$. Nous en avons en fait déjà vu un contre-exemple : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
Nous avons prouvé que f admet un $d\ell_2(0)$ et qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais que f n'est pas 2−fois dérivable en 0 et donc que f' n'est pas dérivable en 0 ce qui revient à dire que f' n'admet pas de $d\ell_1(0)$.

Preuve.
f admet un $d\ell_n(0)$, donc il existe $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que au voisinage de 0 :
$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o_0(x^n)$$
f' admet un $d\ell_{n-1}(0)$, donc il existe $(b_0, \ldots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que au voisinage de 0 :
$$f'(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} + o_0(x^{n-1})$$
On en déduit par intégration (proposition 14) que f admet un $d\ell_n(0)$ donné par
$$f(x) = f(0) + b_0 x + \frac{b_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{b_{n-1}}{n} x^n + o_0(x^n)$$
Par unicité du $d\ell_n(0)$ de f, on obtient que $a_0 = f(0)$ et que pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $a_{k+1} = \frac{b_k}{k+1}$ i.e. $b_k = (k+1)a_{k+1}$. Le $d\ell_{n-1}(0)$ de f' se réécrit donc :
$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + o_0(x^{n-1})$$

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. g étant une fraction rationnelle, elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et admet donc un développement limité à tout ordre en 0. On pourrait calculer le $d\ell_n(0)$ de g grâce au développement limité de $(1+x)^\alpha$ (en prenant $\alpha = -2$). On peut également observer que $g = f'$ où $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{1-x}$, dont le $d\ell_{n+1}(0)$ est :

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n+1} + o_0(x^{n+1})$$

On en déduit, par dérivation (proposition précédente), que g a pour $d\ell_n(0)$:

$$g(x) = f'(x) = 1 + 2x + \cdots + (n+1)x^n + o_0(x^n)$$

II. Développements limités des fonctions usuelles

On donne la liste des développements limités en 0 des fonctions usuelles. La plupart de ces développements limités ont été démontrés au fil du cours.
À connaître par coeur :

- $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o_0(x^n)$
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + o_0(x^n)$
- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o_0(x^n)$
- $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o_0(x^{2n+1})$
- $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_0(x^{2n+2})$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o_0(x^n)$
- $\mathrm{ch}(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o_0(x^{2n+1})$
- $\mathrm{sh}(x) = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_0(x^{2n+2})$

À savoir retrouver rapidement (au moins à l'ordre 3) :

- $\arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o_0(x^{2n+2})$
- $\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o_0(x^6)$
- $\mathrm{th}(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o_0(x^6)$
- $\arcsin(x) = x + \dfrac{1 \cdot x^3}{2.3} + \dfrac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) \cdot (2n+1)} + o_0(x^{2n+2})$

- $\arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} - x - \dfrac{1\cdot x^3}{2.3} - \dfrac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} - \cdots - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+1)} + o_0(x^{2n+2})$

III. Applications : étude locale et asymptotique des fonctions

1. Étude locale des fonctions

Proposition 16

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.
S'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geqslant 2$ et a, b et c trois réels avec $c \neq 0$, tels que au voisinage de x_0 :

$$f(x) = a + b(x-x_0) + c(x-x_0)^p + o_{x_0}((x-x_0)^p)$$

Alors $y = a + b(x-x_0)$ est l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0.
De plus, au voisinage de x_0, $f(x) - (a + b(x-x_0))$ est du même signe que $c(x-x_0)^p$. La position relative, au voisinage de x_0, de la courbe de f et de sa tangente au point d'abscisse x_0, s'en déduit.

Preuve.
Par troncature f admet un $d\ell_1(x_0)$ donné par $f(x) = a+b(x-x_0)+o_{x_0}((x-x_0))$. f est donc dérivable en x_0 et $f(x_0) = a$ et $f'(x_0) = b$. Donc la droite d'équation $y = a+b(x-x_0) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ est bien la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0. De plus, on a $f(x)-(a+b(x-x_0)) = c(x-x_0)^p + o_{x_0}((x-x_0)^p)$. Donc d'après la proposition 7, $f(x)-(a+b(x-x_0))$ est du signe de $c(x-x_0)^p$ au voisinage de x_0.

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin(x)}{1+x^2}$. On souhaite étudier la position de la courbe de f, notée $\mathcal{C}_f$, par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0. Afin d'utiliser la proposition précédente, on détermine le $d\ell_3(0)$ de f. On a :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o_0(x^3)$$

Par produit, on a : $f(x) = x - \frac{7}{6}x^3 + o_0(x^3)$. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 est la droite d'équation $y = x$ et $f(x) - x$ est, au voisinage de 0, du signe de $-\frac{7}{6}x^3$. Il s'ensuit que $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente en 0 : elle au-dessus de sa tangente au voisinage de 0 et à gauche de 0, et au-dessous de sa tangente au voisinage de 0 et à droite de 0.

2. Étude asymptotique des fonctions

L'ensemble des résultats énoncés dans ce paragraphe l'est en $+\infty$ mais reste également valable en $-\infty$.

Définition 17

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un voisinage de $+\infty$. On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à la courbe de f en $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$.

Proposition 18

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un voisinage de $+\infty$.
La courbe de f admet une asymptote en $+\infty$ si et seulement si $\frac{f(x)}{x}$ admet un développement asymptotique à l'ordre 1 au voisinage de $+\infty$.
De plus, si $\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$, alors l'asymptote à la courbe de f a pour équation $y = ax + b$.

Preuve.
f admet une asymptote en $+\infty$ si et seulement si il existe deux réels a et b tels que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b)) = 0$. Ceci est équivalent à $f(x)-(ax+b) = o_{+\infty}(1)$, ou encore $f(x) = ax+b+o_{+\infty}(1)$, et finalement en divisant par x à : $\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$. Et donc l'existence d'une asymptote en $+\infty$ est équivalente à l'existence d'un développement asymptotique à l'ordre 1 en $+\infty$ pour $\frac{f(x)}{x}$.

Afin de déterminer la position relative d'une courbe par rapport à son asymptote en l'infini on recherche un développement asymptotique de $\frac{f(x)}{x}$ à un ordre $p \geqslant 2$ assez grand pour qu'apparaisse un terme supplémentaire non nul :

Proposition 19

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un voisinage de $+\infty$.
S'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geqslant 2$ et a, b et c trois réels avec $c \neq 0$, tels que au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^p} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^p}\right)$$

Alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et $f(x)-(ax+b)$ est, au voisinage de $+\infty$, du signe de $\dfrac{c}{x^{p-1}}$.

Remarque. On rappelle que pour déterminer un développement asymptotique d'une fonction $x \mapsto h(x)$ en $+\infty$ on pose $u = \frac{1}{x}$ et on est ramené à déterminer un développement limité de la fonction $u \mapsto h\left(\frac{1}{u}\right)$ en 0 (à droite). Dans le cas présent, pour déterminer un développement asymptotique de $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ à l'ordre p en $+\infty$, on doit donc déterminer un développement limité à l'ordre p en 0 (à droite) de la fonction $u \mapsto uf\left(\frac{1}{u}\right)$.

Preuve.
$\frac{f(x)}{x}$ admet un développement asymptotique à l'ordre $p \geqslant 2$ donc à l'ordre 1 et la proposition précédente nous garantit que la courbe de f admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = ax + b$. En multipliant par x le développement asymptotique de $\frac{f(x)}{x}$ on obtient :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x^{p-1}} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^{p-1}}\right)$$

Par différence, on a $f(x)-(ax+b) = \frac{c}{x^{p-1}} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^{p-1}}\right)$. La proposition 7 (ou plutôt son analogue pour les développements asymptotiques) permet ensuite de conclure que le signe de $f(x)-(ax+b)$ est, au voisinage de $+\infty$, le même que celui du terme $\dfrac{c}{x^{p-1}}$.

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \setminus [-1/2, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \ln\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)$.
On commence par étudier son comportement en $+\infty$. Considérons la fonction $\frac{f(x)}{x}$ dont nous cherchons

à obtenir un développement asymptotique à un ordre $p \geqslant 2$ suffisamment grand pour pouvoir appliquer la proposition précédente. On commence par se ramener en 0^+ en posant $u = \frac{1}{x}$ et en considérant la fonction $g(u) = uf\left(\frac{1}{u}\right)$. Pour tout $u \in]-2,1[$, on a

$$g(u) = \ln\left(\frac{2+u}{1-u}\right) = \ln(2) + \ln\left(1+\frac{u}{2}\right) - \ln(1-u)$$

Calculons le $d\ell_2(0)$ de g. Le $d\ell_2(0)$ de $\ln(1+u)$ est $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o_0(u^2)$, on en déduit ceux de $\ln(1+\frac{u}{2})$ et $\ln(1-u)$:

$$\ln\left(1+\frac{u}{2}\right) = \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o_0(u^2) \qquad\qquad \ln(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} o_0(u^2)$$

Par somme celui de g est :

$$g(u) = \ln(2) + \frac{3}{2}u + \frac{3}{8}u^2 + o_0(u^2)$$

En remplaçant u par $\frac{1}{x}$, on obtient le développement asymptotique de $\frac{f(x)}{x}$ à l'ordre 2 en $+\infty$:

$$\frac{f(x)}{x} = \ln(2) + \frac{3}{2x} + \frac{3}{8x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

La droite $(\mathcal{D})$ d'équation cartésienne $y = \ln(2)x + \frac{3}{2}$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et la quantité $f(x) - (\ln(2)x + \frac{3}{2})$ est du signe de $\frac{3}{8x}$ au voisinage de $+\infty$. La courbe de f est donc au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.
Pour étudier le comportement en $-\infty$, il suffit de reprendre les calculs précédents et de constater qu'ils conduisent au même développement asymptotique de $\frac{f(x)}{x}$ au voisinage de $-\infty$:

$$\frac{f(x)}{x} = \ln(2) + \frac{3}{2x} + \frac{3}{8x^2} + o_{-\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

La droite $(\mathcal{D})$ est donc aussi asymptote à la courbe de f en $-\infty$ et la quantité $f(x) - (\ln(2)x + \frac{3}{2})$ est du signe de $\frac{3}{8x}$ au voisinage de $-\infty$. La courbe de f est donc au-dessous de son asymptote au voisinage de $-\infty$.