Licence de mathématiques | Lundi 7 janvier 2019
Polynômes et algèbre linéaire | Semestre 3 2018-2019

Examen

Durée 3 heures, documents et tout appareil éléctronique interdits

---

Le sujet comporte deux pages. **La notation tiendra fortement compte de la qualité de l'exposition.** Si E est un espace vectoriel, E^* désigne l'espace des formes linéaires sur E (le dual de E).

Exercice 1

1. Calculer le déterminant de
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Que peut-on dire de la matrice A?
2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ la fraction rationnelle
$$F = \frac{X^2}{X^3+1}.$$

Exercice 2

On considère $E = \mathbb{R}_3[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré ≤ 3, muni de sa base canonique $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$. Soit $P = X^4 - 1$.

1. Calculer $\mathrm{pgcd}(X^2 - 2, X^4 - 1)$.
2. Soit $f : E \to E$ l'application qui à un polynôme A associe le reste de la division euclidienne de $(X^2 - 2)A$ par P.
   (a) Montrer que f est bien définie et est linéaire.
   (b) Montrer que f est injective.
3. (a) En utilisant l'identité de Bézout, montrer qu'il existe $U \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $f(U) = 1$.
   (b) En déduire que f est surjective et enfin bijective.
4. (a) Calculer la matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f$ de f dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Calculer $\det M$. Retrouver le résultat de la question 3b.

Exercice 3

On considère $E = \mathbb{R}_n[X]$ (l'espace des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n) et des éléments deux à deux distincts $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. On pose, pour tous $P, Q \in E$,

$$(P|Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_i)Q(a_i).$$

1. Montrer que l'application $E \times E \to \mathbb{R}$, $(P, Q) \mapsto (P|Q)$ est une forme 2-linéaire (bilinéaire). Est-elle alternée ?
2. Vérifier que $(P|P) \geq 0$. Déterminer $\{P \in \mathbb{R}_n[X],\ (P|P) = 0\}$.
3. (a) Montrer qu'il existe une unique famille $(L_0, L_1, L_2, \ldots, L_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que, pour tout (i, j), $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$ $(= 1$ si $i = j$ et 0 sinon$)$, et qu'elle en forme une base.

   (b) Calculer $(L_i|L_j)$ pour tout i, j.
4. Étant donné $Q \in E$, on considère l'application $\phi_Q : E \to \mathbb{R}$, $P \mapsto (P|Q)$. Montrer que l'application
$$\begin{array}{ccc} E & \to & E^* \\ Q & \mapsto & \phi_Q \end{array}$$
est une application bien définie, linéaire et bijective.
5. Quelle est la base duale de $(L_0, \ldots, L_n)$? Soit $n \geq 2$. Quel est l'orthogonal de $Vect(\phi_{L_1}, \phi_{L_2})$ dans E?

Exercice 4

Soient n^2 polynômes $a_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$, de $\mathbb{R}[X]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$A(X) = Mat(a_{i,j}(X))_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R}(X)).$$

1. Rappeler la définition du déterminant d'une matrice de $M_n(\mathbb{R}(X))$.
2. Montrer que $\det A(X)$ est un polynôme et exprimer sa dérivée en fonction des $a_{i,j}$ et $a_{i,j}{}'$.
3. Soit $d_n(X)$ le déterminant de taille $n \times n$ suivant :

$$d_n(X) = \begin{vmatrix} 1+X & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 1+X \end{vmatrix}.$$

   (a) Calculer d_1, d_2, d_3.

   (b) Déduire de 2. que $d_n'(X) = nd_{n-1}(X)$.

   (c) En déduire, pour tout $n \geq 2$, l'ordre de multiplicité de 0 comme racine de d_n.

   (d) Conclure que $d_n(X) = X^{n-1}(X + n)$.