① Maximum d'une série stationnaire et indice extrémal

$(X_n)_{n\geq 1}$ série strictement stationnaire.

Comportement du maximum $M_n = \max_{1\leq i\leq n} X_i$ et convergence sous normalisation affine $\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\text{loi}}$?

<u>cas iid</u> (thm de Fisher-Tippett-Gnedenko 1928) $(X_n)_{n\geq 1}$ iid

Si la suite $\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\text{loi}} G$ avec G non dégénérée, alors nécessairement G suit une loi GEV

<u>cas dépendant</u> (Leadbetter 1974)

On suppose $\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\text{loi}} G$ et que la condition de dépendance suivante est vérifiée pour tout $u_n = a_n x + b_n$ tq $G(x) > 0$

$D(u_n)$: il existe $r_n = o(n)$ tq

$$\underset{\longrightarrow 0}{\alpha(n, r_n)} := \sup \left| \mathbb{P}\left(\max_{i\in I} X_i \leq u_n, \max_{j\in J} X_j \leq u_n\right) - \mathbb{P}\left(\max_{i\in I} X_i \leq u_n\right)\mathbb{P}\left(\max_{j\in J} X_j \leq u_n\right)\right|$$

où le sup est pris sur $I, J \subseteq [1,n]$ tq $\forall i,j \in I\times J$ $\quad j - i \geq r_n$

Alors G suit une loi GEV.

<u>indice extrémal</u> (Leadbetter 1983)

On suppose que $(\tilde{X}_n)_{n\geq 1}$ est iid de même loi marginale que $(X_n)_{n\geq 1}$ et que $\frac{\tilde{M}_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\text{loi}} \tilde{G}$

On suppose que $D(u_n)$ est vérifiée pour tout $u_n = a_n x + b_n$, $\tilde{G}(x) > 0$ et qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tq $\mathbb{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x_0\right)$ converge.

Alors $\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\text{loi}} G$ et il existe $\theta \in [0,1]$ <u>appelé indice extrémal</u> tq $G(x) = \tilde{G}^{\theta}(x)$ $x \in \mathbb{R}$

interprétation de l'indice extrémal : sous la condition d'anti-clustering

$$\theta = \lim_{n \to \infty} E\left[\sum_{i=1}^{r_n} 1_{\{X_i > u_n\}} \,\middle|\, M_{r_n} > u_n \right]$$ "mean cluster size" Leadbetter 83

$$= \lim_{n \to \infty} P\left[X_j \leq u_n,\ j=2,\dots,r_n \,\middle|\, X_1 > u_n \right]$$ "run below threshold" O'Brien 87

2) Séries temporelles multivariées à variations régulières. (Basrak Segers 200…

def X vecteur aléatoire d-dim est dit à variations régulières d'indice $\alpha>0$ si il existe une mesure de probabilité σ sur la sphère S^{d-1} tq

$$\forall x>0 \quad \frac{P(\|X\|>ux,\ X/\|X\| \in \cdot)}{P(\|X\|>u)} \xrightarrow[u\to\infty]{w} x^{-\alpha}\sigma(\cdot)$$

Remarque
En coordonnées polaires $X \leftrightarrow (R,\Theta)$ $\quad$ pour A tq $\sigma(\partial A)=0$ $\quad P(R>x,\ \Theta\in A)\sim x^{-\alpha}\ell(x)\sigma(A)$

def $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ séries temporelles multivariées est à variations régulières d'indice $\alpha>0$ si pour tout $t_1<\dots<t_q$, $(X_{t_1},\dots,X_{t_q})$ est RV d'indice α dans $(\mathbb{R}^d)^q$

Thm Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ stationnaire et $\alpha>0$. On a l'équivalence

i) $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ RV indice α

ii) il existe $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ tq
- $P(\|Y_0\|>y)=y^{-\alpha},\ y>1$
- $\mathcal{L}((X_t/x)_{t\in\mathbb{Z}} \mid \|X_0\|>x) \xrightarrow{fidi} (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$

iii) X_0 RV indice α et il existe $(\Theta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ tq $\mathcal{L}((X_t/\|X_0\|)_{t\in\mathbb{Z}} \mid \|X_0\|>x) \to (\Theta_t)$

On appelle Y tail process, il vérifie

$$\|Y_0\|\sim \mathrm{Pareto}(\alpha), \quad Y/\|Y_0\| \overset{loi}{=} \Theta \quad \text{indépendants}$$

On appelle Θ spectral tail process.

Thm (time change formula)
pour $f:(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}}\to\mathbb{R}$ continue bornée et nulle sur $\{y\in(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}} : y_0=0\}$

$$E[f(B^i\Theta)] = E[\|\Theta_i\|^\alpha f(\Theta/\|\Theta_i\|)] \qquad \text{(TCF)}$$

B backward shift

Thm (Janssen, D. Hashorva Soulier '17)
si Θ vérifie $\|\Theta_0\|=1$ + TCF, alors il existe X stationnaire RV d'indice α de spectral tail process Θ.

anti-clustering: il existe (r_n) ; $r_n \to \infty$ $r_n/n \to 0$ tq

(AC) $\lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \Pr\left(\max_{m\le |t| \le r_n} \|X_t\| > a_n u \,\middle|\, \|X_0\| > a_n u \right) = 0$

Thm Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ stationnaire à variations régulières d'indice $\alpha > 0$.

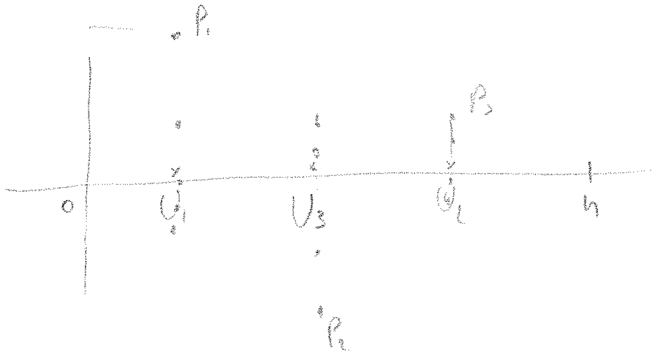
vérifiant (AC) et une propriété de mélange fort.

On a la convergence en loi du processus ponctuel

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_{(i/n,\, X_n/a_n)} \xrightarrow{\mathcal{M}_p\left([0,1]\times([-\infty,\infty]^d\setminus\{0\})\right)} \sum_{i\ge 1} \sum_{t\in\mathbb{Z}} \delta_{(U_i,\, P_i Q^i_t)}$$

avec $\sum \delta_{(T_i, P_i)} \sim PPP(\theta 1_{[0,1]}\, dt\; \alpha y^{-\alpha-1} 1_{y>0}\, dy)$ θ extremal index

and Q^i are iid process with distribution $\mathcal{L}(Q) = \mathcal{L}(\Theta \mid \sup_t \|\Theta_t\| \le 1) \sup \|\Theta_t\|$



③ Variations régulières des processus GARCH (Basrak, Davis, Mikosch 02)

Equation de récurrence stochastique

$$X_t = A_t X_{t-1} + B_{t-1} \qquad t \in \mathbb{Z} \qquad \text{(SRE)}$$

avec une suite iid (A_t, B_t) matrice $d \times d$ vecteur dans $\mathbb{R}^{d \times d} \times \mathbb{R}^d$

def exposant de Lyapunov

$$\gamma = \inf_{n \geq 1} \frac{1}{n} \mathbb{E} \log \|A_1 \cdots A_n\|$$

Thm Si $\mathbb{E} \ln^+ \|A_1\| < \infty$, $\mathbb{E} \log^+ \|B_1\| < \infty$ et $\gamma < 0$ alors

$$X_t = B_t + \sum_{k=1}^{\infty} A_t \cdots A_{t-k+1} B_{t-k} \quad , t \in \mathbb{Z}$$

est p.s convergente et l'unique solution stationnaire causale de (SRE)

Thm On suppose
- $\mathbb{P}(B_1 \neq 0) = 1$
- $\mathbb{P}(A_1$ n'a pas de ligne nulle$) = 1$
- $\mathbb{E}(\|A_1\|^{\kappa_0} \log^+ \|A_1\|) < \infty$ pour $\kappa_0 > 0$
- \+ conditions techniques ...

Alors
- il existe un unique $\kappa_1 \in (0, \kappa_0]$ tq $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E} \|A_1 \cdots A_n\|^{\kappa_1} = 0$
- (SRE) a une unique solution stationnaire causale
- si $\mathbb{E} \|B_1\|^{\kappa_1} < \infty$, alors $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ $\lim_{u \to \infty} u^{\kappa_1} \mathbb{P}(\langle x, X_1 \rangle > u) = \omega(x)$ existe et $\omega(x) > 0$ si $x \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{0\}$.

Cor Si κ_1 n'est pas entier $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est à variations régulières d'indice $\kappa_1 > 0$ & le spectral tail process vérifie

$$(\Theta_t)_{t \geq 0} \overset{loi}{=} (A_t \cdots A_1 \Theta_0)_{t \geq 0}$$

Le processus GARCH se plonge dans un modèle (SRE)

GARCH(1,1) $\begin{cases} X_t = \sigma_t Z_t \\ \sigma_t^2 = a + b\sigma_{t-1}^2 + c X_{t-1}^2 \end{cases}$

(X_t^2, σ_t^2) vérifie SRE

$$\begin{pmatrix} X_t^2 \\ \sigma_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a + b\sigma_{t-1}^2 + c X_{t-1}^2) Z_t^2 \\ a + b\sigma_{t-1}^2 + c X_{t-1}^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c Z_t^2 & b Z_t^2 \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t-1}^2 \\ \sigma_{t-1}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a Z_t^2 \\ a \end{pmatrix}$$