À la recherche des racines

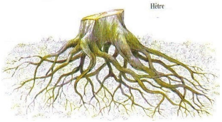
Journée de découverte de la recherche en mathématiques

B. Andreianov, C. Armana, F. Varescon

Laboratoire de Mathématiques de Besançon

14 novembre 2012

Problème



On appelle racine d'un polynôme

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

un nombre réel x solution de l'équation $P(x) = 0$.

Exemples

$P(x) = 3x + 1$ a une seule racine, $-1/3$.
$P(x) = x^2 - 1$ a deux racines -1 et 1.

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
$\vdots$
$\rightarrow$ Comment calculer leurs racines ?

Pourquoi calculer des racines ?

Un aquarium de 6 litres (=6 dm^3) est 1 dm plus haut qu'il n'est large et 1 dm plus long qu'il n'est haut. Quelles sont ses dimensions précises ?

Longueur L, largeur l, hauteur x (en dm)

$$x = l + 1, \quad L = x + 1, \quad Llx = 6$$

$$(x+1)(x-1)x = 6$$

$$\boxed{x^3 - x - 6 = 0}$$

Pourquoi calculer des racines ?

Je dispose d'un compte rémunéré à un taux d'intérêt annuel $x \geq 1$ (en plaçant n euros pendant un an je récupère nx euros).

- Je commence avec 1 €, que je place pendant un an.
- Au bout d'un an j'ajoute 3 €. Je laisse l'argent pendant un an.
- L'année suivante je retire 3 € et laisse le reste pendant un an.
- À la fin de la troisième année, j'aimerais récupérer 14 €

Est-ce possible ? À quel taux x ?

$$((x+3)x-3)x = 14$$

$$\boxed{x^3 + 3x^2 - 3x - 14 = 0}$$

Plan de l'atelier

Polynômes de degré 2 et 3

Les racines entières

Formules de Cardan en degré 3

Formules de Ferrari en degré 4

Formules en degré ≥ 5 ?

(L'Atelier – Vermeer)

$P(x) = ax^2 + bx + c$

En 1ère vous avez appris des formules pour les racines du polynôme $P(x)$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Si $\Delta > 0$ le polynôme $P(x)$ a deux racines :

$$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$ le polynôme $P(x)$ a une seule racine :

$$\frac{-b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$ le polynôme $P(x)$ n'a aucune racine.

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

- Existe-t-il des formules pour calculer les racines ?
- Mais déjà, est-on sûr que $P(x)$ a au moins une racine ?

 Aquarium : $P(x) = x^3 - x - 6$

⋆ **Activité n° 1**

▷ Combien valent

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} P(x)?$$

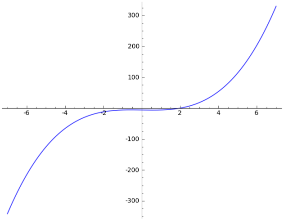
(indication : factoriser par x^3)

▷ Selon vous quelle est l'allure du graphe de $x \mapsto P(x)$? Pensez-vous que $P(x)$ possède une racine ?

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

- Existe-t-il des formules pour calculer les racines ?
- Mais déjà, est-on sûr que $P(x)$ a au moins une racine ?

 Aquarium : $P(x) = x^3 - x - 6$

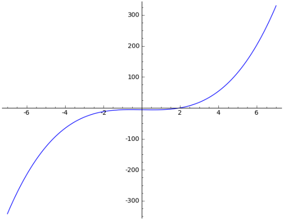


Ces limites et la continuité de la fonction $x \mapsto P(x)$ entraînent :
$P(x)$ a au moins une racine

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

- Existe-t-il des formules pour calculer les racines ?
- Mais déjà, est-on sûr que $P(x)$ a au moins une racine ?

 Aquarium : $P(x) = x^3 - x - 6$



Ces limites et la continuité de la fonction $x \mapsto P(x)$ entraînent : $P(x)$ a au moins une racine

Fait : tout polynôme de la forme $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (avec $a \neq 0$) possède au moins une racine.
Comment la calculer ?

Les racines entières

$$P_2(x) = (x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$$

$$\begin{aligned} P_n(x) &= (x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n) \\ &= x^n + (r_1 + \ldots + r_n)x^{n-1} + \ldots + (r_1 \cdots r_n) \end{aligned}$$

Les racines entières

$$P_2(x) = (x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$$

$$\begin{aligned} P_n(x) &= (x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n) \\ &= x^n + (r_1 + \ldots + r_n)x^{n-1} + \ldots + (r_1 \cdots r_n) \end{aligned}$$

Observation : le coefficient constant est le produit des racines.

Les racines entières

$$P_2(x) = (x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$$

$$\begin{aligned} P_n(x) &= (x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n) \\ &= x^n + (r_1 + \ldots + r_n)x^{n-1} + \ldots + (r_1 \cdots r_n) \end{aligned}$$

Observation : le coefficient constant est le produit des racines.

Critère des racines entières
Soit $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $a_{n-1}, \ldots, a_0$ entiers relatifs. Si $P(x)$ admet une racine qui est un entier relatif alors cette racine divise a_0.

Très pratique pour trouver les racines entières d'un polynôme !

Les racines entières

Pour trouver les racines entières de $P(x)$:

1. On fait la liste des diviseurs du coefficient constant a_0
2. On teste chacun pour voir s'il est solution de $P(x) = 0$.

Les racines entières

Pour trouver les racines entières de $P(x)$:

1. On fait la liste des diviseurs du coefficient constant a_0
2. On teste chacun pour voir s'il est solution de $P(x) = 0$.

Exemple : $P(x) = x^2 - 2x - 3$

1. Les diviseurs de 3 sont : $\{+1, -1, +3, -3\}$
2. On calcule :

$$P(1) = 4 \neq 0, \quad P(-1) = 0$$
$$P(3) = 9 - 6 - 3 = 0, \quad P(-3) = 9 + 6 - 3 = 12 \neq 0$$

Donc $P(x)$ a deux racines entières : -1 et 3.

$\star$ **Activité n° 2** : sur votre fiche

Les racines entières

Pour trouver les racines entières de $P(x)$:

1. On fait la liste des diviseurs du coefficient constant a_0
2. On teste chacun pour voir s'il est solution de $P(x) = 0$.

Exemple : $P(x) = x^2 - 2x - 3$

1. Les diviseurs de 3 sont : $\{+1, -1, +3, -3\}$
2. On calcule :

$$P(1) = 4 \neq 0, \quad P(-1) = 0$$
$$P(3) = 9 - 6 - 3 = 0, \quad P(-3) = 9 + 6 - 3 = 12 \neq 0$$

Donc $P(x)$ a deux racines entières : -1 et 3.

$\star$ **Activité n^{o} 2** : sur votre fiche

Les racines entières

Pour trouver les racines entières de $P(x)$:

1. On fait la liste des diviseurs du coefficient constant a_0
2. On teste chacun pour voir s'il est solution de $P(x) = 0$.

⋆ **Activité n° 2**

▷ Les polynômes suivants ont-ils des racines entières ? Lesquelles ?

- $x^3 - 3x^2 - x + 3$ -1,1,3
- $x^3 - 15x - 4$ (équation de Bombelli ) 4
- $x^3 + 3x^2 - 3x - 14 = 0$ (taux d'intérêt ) 2
- $x^{2012} - x + 2$ aucune !

Formules de Cardan en degré 3

Girolamo Cardano (1501–1576)
Niccolo Fontana Tartaglia (1499–1557)


$P(y) = ay^3 + by^2 + cy + d$

En divisant par a puis en posant $y = x - \frac{b}{3a}$ on peut toujours se ramener à une équation de la forme

$$x^3 + px + q = 0.$$

$\star$ **Activité n° 3** $\triangleright$  Taux d'intérêt $P(y) = y^3 + 3y^2 - 3y - 14$

Formules de Cardan en degré 3

Girolamo Cardano (1501–1576)
Niccolo Fontana Tartaglia (1499–1557)


$P(y) = ay^3 + by^2 + cy + d$

En divisant par a puis en posant $y = x - \frac{b}{3a}$ on peut toujours se ramener à une équation de la forme

$$x^3 + px + q = 0.$$

$\star$ **Activité n° 3** $\triangleright$  Taux d'intérêt $P(y) = y^3 + 3y^2 - 3y - 14$
En posant $y = x - 1$ on trouve

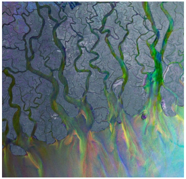
$$x^3 - 6x - 9$$

d'où $p = -6$, $q = -9$.

Formules de Cardan en degré 3

Forme réduite : $P(x) = x^3 + px + q$

$$\boxed{\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}} \qquad \begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$



(Le delta du Gange)

Formules de Cardan pour $P(x) = x^3 + px + q$

(Cas I) Si $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} = 0$ alors $P(x)$ a deux racines :

$$\frac{3q}{p}, \frac{-3q}{2p}$$

⋆ **Activité n° 4**

▷ Quelles sont les racines des polynômes suivants ?

- $x^3 - 3x + 2$
- $x^3 - 12x + 16$ (vous pouvez utiliser votre calculatrice pour calculer Δ)

▷ Pouviez-vous les devinez avec le critère des racines entières ?

Formules de Cardan pour $P(x) = x^3 + px + q$

(Cas I) Si $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} = 0$ alors $P(x)$ a deux racines :

$$\frac{3q}{p}, \frac{-3q}{2p}$$

⋆ **Activité n° 4**

▷ Quelles sont les racines des polynômes suivants ?

- $x^3 - 3x + 2$ — $\Delta = 0$, racines : -2 et 1
- $x^3 - 12x + 16$ (vous pouvez utiliser votre calculatrice pour calculer Δ) — $\Delta = 0$, racines : -4 et 2

▷ Pouviez-vous les devinez avec le critère des racines entières ?

Formules de Cardan pour $P(x) = x^3 + px + q$

(Cas II) Si $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} > 0$ alors $P(x)$ a une seule racine :

$$\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}}$$

⋆ **Activité n° 5**

▷ Quelles sont les racines de $x^3 - 6x - 9$? (forme réduite de )

⋆ **Activité n° 6** Calculez la racine de $x^3 - x - 6$ 

- pour ceux situés côté couloir : par le critère des racines entières
- pour ceux situés côté fenêtre : par la formule ci-dessus

et comparez vos résultats.

Formules de Cardan pour $P(x) = x^3 + px + q$

(Cas II) Si $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} > 0$ alors $P(x)$ a une seule racine :

$$\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}}$$

$\star$ **Activité n° 5**

$\triangleright$ Quelles sont les racines de $x^3 - 6x - 9$? (forme réduite de )
$\Delta = 7^2$, racine : 3

$\star$ **Activité n° 6** Calculez la racine de $x^3 - x - 6$ 

- pour ceux situés côté couloir : par le critère des racines entières
- pour ceux situés côté fenêtre : par la formule ci-dessus

et comparez vos résultats.

Formules de Cardan pour $P(x) = x^3 + px + q$

(Cas II) Si $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} > 0$ alors $P(x)$ a une seule racine :

$$\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}}$$

⋆ **Activité nº 5**

▷ Quelles sont les racines de $x^3 - 6x - 9$? (forme réduite de )
$\Delta = 7^2$, racine : 3

⋆ **Activité nº 6** Calculez la racine de $x^3 - x - 6$ 

- pour ceux situés côté couloir : par le critère des racines entières
- pour ceux situés côté fenêtre : par la formule ci-dessus

et comparez vos résultats.

$$\Delta = 968/27 = (22\sqrt{6}/9)^2$$

Formules de Cardan pour $P(x) = x^3 + px + q$

(Cas II) Si $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} > 0$ alors $P(x)$ a une seule racine :

$$\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}}$$

 $P(x) = x^3 - x - 6$, $\Delta = 968/27 = (22\sqrt{6}/9)^2$.

Racines obtenues. Cardan : $\frac{\sqrt[3]{81+33\sqrt{6}}}{3} + \frac{\sqrt[3]{81-33\sqrt{6}}}{3}$. Critère : 2.
Donc

Formules de Cardan pour $P(x) = x^3 + px + q$

(Cas II) Si $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} > 0$ alors $P(x)$ a une seule racine :

$$\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}}$$

 $P(x) = x^3 - x - 6$, $\Delta = 968/27 = (22\sqrt{6}/9)^2$.

Racines obtenues. Cardan : $\frac{\sqrt[3]{81+33\sqrt{6}}}{3} + \frac{\sqrt[3]{81-33\sqrt{6}}}{3}$. Critère : 2.
Donc

$$\frac{\sqrt[3]{81+33\sqrt{6}}}{3} + \frac{\sqrt[3]{81-33\sqrt{6}}}{3} = 2$$

Formules de Cardan pour $P(x) = x^3 + px + q$

(Cas II) Si $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} > 0$ alors $P(x)$ a une seule racine :

$$\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}}$$

 $P(x) = x^3 - x - 6$, $\Delta = 968/27 = (22\sqrt{6}/9)^2$.

Racines obtenues. Cardan : $\frac{\sqrt[3]{81+33\sqrt{6}}}{3} + \frac{\sqrt[3]{81-33\sqrt{6}}}{3}$. Critère : 2.
Donc

$$\frac{\sqrt[3]{81+33\sqrt{6}}}{3} + \frac{\sqrt[3]{81-33\sqrt{6}}}{3} = 2$$

? ? ? ? ? ? ?

Formules de Cardan pour $P(x) = x^3 + px + q$

(Cas II) Si $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} > 0$ alors $P(x)$ a une seule racine :

$$\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}}$$

En fait :

$$\frac{\sqrt[3]{81+33\sqrt{6}}}{3} + \frac{\sqrt[3]{81-33\sqrt{6}}}{3} = 2$$

Formules de Cardan pour $P(x) = x^3 + px + q$

(Cas II) Si $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} > 0$ alors $P(x)$ a une seule racine :

$$\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}}$$

En fait :

$$\frac{3+\sqrt{6}}{3} + \frac{3-\sqrt{6}}{3} = 2$$

Simplification des radicaux !

Formules de Cardan pour $P(x) = x^3 + px + q$

(Cas II) Si $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} > 0$ alors $P(x)$ a une seule racine :

$$\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}}$$

En fait :

$$\frac{3+\sqrt{6}}{3} + \frac{3-\sqrt{6}}{3} = 2$$

Simplification des radicaux !

⋆ **Activité n° 7** ▷ Vérifiez :

$$\sqrt[3]{81+33\sqrt{6}} = 3+\sqrt{6}, \qquad \sqrt[3]{81-33\sqrt{6}} = 3-\sqrt{6}$$

Formules de Cardan pour $P(x) = x^3 + px + q$

(Cas II) Si $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} > 0$ alors $P(x)$ a une seule racine :

$$\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}}$$

Mais ce n'est pas toujours possible :

$P(x) = x^3 + 3x - 2, \quad \Delta = 8 = (2\sqrt{2})^2$

Racine : $\sqrt[3]{1-\sqrt{2}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$.

Ici on ne sait pas simplifier l'expression.

Formules de Cardan pour $P(x) = x^3 + px + q$

(Cas III) Si $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} < 0$ alors $P(x)$ a trois racines.

Étudions l'exemple de Rafael Bombelli (1526–1572) :

$$P(x) = x^3 - 15x - 4$$

⋆ **Activité nº 8** $\quad \Delta = -484 = -22^2$

▷ Imaginez qu'il existe un nombre i vérifiant $i^2 = -1$. Réécrivez Δ à l'aide de i.

▷ Appliquez la formule pour la racine vue dans le cas $\Delta > 0$.

▷ En utilisant la règle $i^2 = -1$, vérifiez

$$2 + 11i = (2+i)^3, \quad 2 - 11i = (2-i)^3.$$

▷ Quelle racine donne alors la formule ? La connaissiez-vous déjà ?

Formules de Cardan pour $P(x) = x^3 + px + q$

(Cas III) Si $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} < 0$ alors $P(x)$ a trois racines.

Étudions l'exemple de Rafael Bombelli (1526–1572) :

$$P(x) = x^3 - 15x - 4$$

⋆ **Activité nº 8** $\Delta = -484 = -22^2 = i^2 22^2$ donc « $\sqrt{\Delta} = 22i$ »
La formule pour $\Delta > 0$ donne

$$\sqrt[3]{\frac{4 + 22i}{2}} + \sqrt[3]{\frac{4 - 22i}{2}} = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$$

Formules de Cardan pour $P(x) = x^3 + px + q$

(Cas III) Si $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} < 0$ alors $P(x)$ a trois racines.

Étudions l'exemple de Rafael Bombelli (1526–1572) :

$$P(x) = x^3 - 15x - 4$$

⋆ **Activité nº 8** $\Delta = -484 = -22^2 = i^2 22^2$ donc « $\sqrt{\Delta} = 22i$ »

La formule pour $\Delta > 0$ donne

$$\sqrt[3]{\frac{4+22i}{2}} + \sqrt[3]{\frac{4-22i}{2}} = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}$$
$$= (2+i) + (2-i) = 4$$

La racine devinée par Bombelli est 4.

Invention des nombres complexes !

Formules de Cardan pour $P(x) = x^3 + px + q$

(Cas III) Si $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} < 0$ alors $P(x)$ a trois racines.

Étudions l'exemple de Rafael Bombelli (1526–1572) :

$$P(x) = x^3 - 15x - 4$$

Comme 4 est racine on a $P(x) = (x-4)(x^2 + bx + c)$. En développant on identifie b et c :

$$P(x) = (x-4)(x^2 + 4x + 1)$$

Racines : 4, $-2+\sqrt{3}$, $-2-\sqrt{3}$

Formule de Cardan pour $\Delta < 0$: prendre celle pour $\Delta > 0$ et lui donner un sens à l'aide des nombres complexes.

Formules de Cardan pour $P(x) = x^3 + px + q$

Bilan des formules de Cardan (degré 3) :

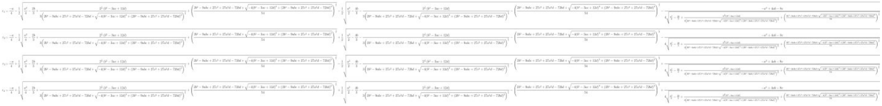
- compliquées à mettre en œuvre
- problèmes de simplification de radicaux
- apparition de « nombres complexes » même si les solutions sont réelles au bout du compte

Et pour un polynôme de degré 4 ? 5 ? ...

Formules de Ferrari pour $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$

Lodovico Ferrari (1522–1565)

Les quatre racines de $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ sont données par :



Formules de Ferrari pour $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$r_1 = \frac{-a}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2b}{3} + \frac{2^{\frac{1}{3}}\left(b^2 - 3ac + 12d\right)}{3\left(2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd + \sqrt{-4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2 \cdots}\right.}}$$

$$r_2 = \frac{-a}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2b}{3} + \frac{2^{\frac{1}{3}}\left(b^2 - 3ac + 12d\right)}{3\left(2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd + \sqrt{-4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2 \cdots}\right.}}$$

$$r_3 = \frac{-a}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2b}{3} + \frac{2^{\frac{1}{3}}\left(b^2 - 3ac + 12d\right)}{3\left(2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd + \sqrt{-4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2 \cdots}\right.}}$$

$$r_4 = \frac{-a}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2b}{3} + \frac{2^{\frac{1}{3}}\left(b^2 - 3ac + 12d\right)}{3\left(2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd + \sqrt{-4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2 \cdots}\right.}}$$

Formules de Ferrari pour $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$\frac{-a^3+4ab-8c}{\cdots\frac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{\cdots\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\Big)^{\frac{1}{3}}}+\left(\frac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{-a^3+4ab-8c}{\cdots\frac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{\cdots\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\Big)^{\frac{1}{3}}}+\left(\frac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{-a^3+4ab-8c}{\cdots\frac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{\cdots\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\Big)^{\frac{1}{3}}}+\left(\frac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{-a^3+4ab-8c}{\cdots\frac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{\cdots}+\left(\frac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}}\cdots}$$

Polynômes de degré ≥ 5

Degré 2, 3, 4

Formules pour les racines en fonction des coefficients de $P(x)$ et des opérations $+, -, \times, \div$ et $\sqrt{\ }, \sqrt[3]{\ }, \ldots$ (radicaux)

Pour $n \geq 5$

Existe-t-il des formules exprimant les racines de n'importe quel polynôme

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

sous forme de radicaux ?

Polynômes de degré ≥ 5

Théorème (Ruffini 1799, Abel 1826, Galois 1830)

Il n'existe aucune formule générale permettant d'exprimer les racines de n'importe quel polynôme de degré ≥ 5 par radicaux.

Polynômes de degré ≥ 5

Théorème (Ruffini 1799, Abel 1826, Galois 1830)

Il n'existe aucune formule générale permettant d'exprimer les racines de n'importe quel polynôme de degré ≥ 5 par radicaux.

Cela n'empêche pas certains polynômes d'avoir des racines exprimables par radicaux ! Exemple : $P(x) = x^5 - 1$ a pour racine 1.

Polynômes de degré ≥ 5

Théorème (Ruffini 1799, Abel 1826, Galois 1830)

Il n'existe aucune formule générale permettant d'exprimer les racines de n'importe quel polynôme de degré ≥ 5 par radicaux.

Cela n'empêche pas certains polynômes d'avoir des racines exprimables par radicaux ! Exemple : $P(x) = x^5 - 1$ a pour racine 1. Simplement on n'a pas de formules générales comme pour $n = 2, 3, 4$.

Théorie de Galois

Évariste Galois (1811–1832)

Symétries des racines des polynômes (groupe de permutations)

Condition de résolubilité par radicaux en terme du groupe des racines

Critère pour savoir si un polynôme donné est résoluble par radicaux
(exemple : $x^5 - 10x + 5$ n'a aucune racine exprimable par radicaux)

La théorie de Galois est une branche de l'algèbre qui fait toujours l'objet de recherches aujourd'hui