À la recherche des racines

Troisième Journée de découverte de la recherche en mathématiques

C. Armana, F. Varescon, A. Galateau

Laboratoire de Mathématiques de Besançon

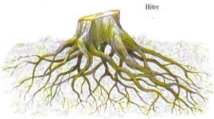
20 novembre 2013

Les racines de polynômes

Une racine d'un polynôme

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

est un nombre réel x solution de l'équation $P(x) = 0$.



Degré 1 : $ax + b$

Si $a \neq 0$, une seule racine : $-b/a$.

Degré 2 : $ax^2 + bx + c$ (où $a \neq 0$)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Si $\Delta > 0$ le polynôme $P(x)$ a deux racines :

$$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$ le polynôme $P(x)$ a une seule racine :

$$\frac{-b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$ le polynôme $P(x)$ n'a aucune racine.

Plan de l'atelier

(L'Atelier – Vermeer)

Les racines entières

$$(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$$
$$(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n) = x^n+(r_1+\ldots+r_n)x^{n-1}+\ldots+(r_1\cdots r_n)$$

Les racines entières

$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$

$(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n) = x^n + (r_1 + \ldots + r_n)x^{n-1} + \ldots + (r_1 \cdots r_n)$

Observation : le coefficient constant est le produit des racines.

Les racines entières

$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$
$(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n) = x^n + (r_1 + \ldots + r_n)x^{n-1} + \ldots + (r_1 \cdots r_n)$
Observation : le coefficient constant est le produit des racines.

Critère des racines entières
Soit $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $a_{n-1}, \ldots, a_0$ entiers relatifs. Si x est à la fois une racine de $P(x)$ et un entier relatif alors x divise a_0.

Les racines entières

$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$
$(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n) = x^n + (r_1 + \ldots + r_n)x^{n-1} + \ldots + (r_1 \cdots r_n)$
Observation : le coefficient constant est le produit des racines.

Critère des racines entières
Soit $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $a_{n-1}, \ldots, a_0$ entiers relatifs. Si x est à la fois une racine de $P(x)$ et un entier relatif alors x divise a_0.

Pour trouver les racines entières de $P(x)$:

1. On fait la liste des diviseurs du coefficient constant a_0
2. On teste chacun pour voir s'il est solution de $P(x) = 0$.

Les racines entières

Pour trouver les racines entières de $P(x)$:

1. On fait la liste des diviseurs du coefficient constant a_0
2. On teste chacun pour voir s'il est solution de $P(x) = 0$.

Les racines entières

Pour trouver les racines entières de $P(x)$:

1. On fait la liste des diviseurs du coefficient constant a_0
2. On teste chacun pour voir s'il est solution de $P(x) = 0$.

Exemple : $P(x) = x^2 - 2x - 3$

1. Les diviseurs de 3 sont : $\{+1, -1, +3, -3\}$
2. On calcule :

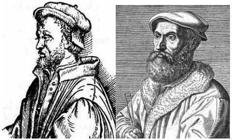
$$P(1) = 4 \neq 0, \quad P(-1) = 0$$
$$P(3) = 9 - 6 - 3 = 0, \quad P(-3) = 9 + 6 - 3 = 12 \neq 0$$

Donc $P(x)$ a deux racines entières : -1 et 3.

$\star$ **Activité n° 1** : calculs de racines entières

Formules de Cardan en degré 3

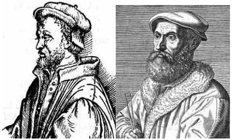
Cardano (1501–1576)
Tartaglia (1499–1557)



$$ay^3 + by^2 + cy + d = 0$$

Formules de Cardan en degré 3

Cardano (1501–1576)
Tartaglia (1499–1557)



$$ay^3 + by^2 + cy + d = 0$$

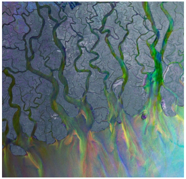
En divisant par a puis en posant $y = x - \frac{b}{3a}$ on se ramène à une équation de la forme

$$x^3 + px + q = 0.$$

Formules de Cardan en degré 3

$$P(x) = x^3 + px + q$$

$$\boxed{\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}} \qquad \begin{cases} \Delta = 0 & \dots \\ \Delta > 0 & \dots \\ \Delta < 0 & \dots \end{cases}$$



(Le delta du Gange)

Formules de Cardan pour $x^3 + px + q$

(Cas I) Si $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} = 0$ alors le polynôme a deux racines :

$$\frac{3q}{p}, \quad \frac{-3q}{2p}.$$

Formules de Cardan pour $x^3 + px + q$

(Cas I) Si $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} = 0$ alors le polynôme a deux racines :

$$\frac{3q}{p}, \quad \frac{-3q}{2p}.$$

$\star$ **Activité n° 2** : calculs de racines avec $\Delta = 0$.

Formules de Cardan pour $x^3 + px + q$

(Cas II) Si $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} > 0$ alors le polynôme a une seule racine :

$$\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}}$$

Formules de Cardan pour $x^3 + px + q$

(Cas II) Si $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} > 0$ alors le polynôme a une seule racine :

$$\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}}$$

$\star$ **Activité n° 3** : calculs de racines avec $\Delta > 0$.

Formules de Cardan pour $x^3 + px + q$

(Cas III) Si $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} < 0$

L'exemple de Bombelli (1526–1572) :

$$P(x) = x^3 - 15x - 4$$

Formules de Cardan pour $x^3 + px + q$

(Cas III) Si $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} < 0$

L'exemple de Bombelli (1526–1572) :

$$P(x) = x^3 - 15x - 4$$

⋆ **Activité n° 4**

Formules de Cardan pour $x^3 + px + q$

(Cas III) Si $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} < 0$

L'exemple de Bombelli (1526–1572) :

$$P(x) = x^3 - 15x - 4$$

$\star$ **Activité nº 4** $\Delta = -484 = -22^2 < 0$ et $\Delta = i^2 22^2$ donc « $\sqrt{\Delta} = 22i$ ». La formule pour $\Delta > 0$ donne :

$$\sqrt[3]{\frac{4+22i}{2}} + \sqrt[3]{\frac{4-22i}{2}} = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}$$
$$= (2+i) + (2-i) = 4$$

et 4 est bien racine.

Formules de Cardan pour $x^3 + px + q$

(Cas III) Si $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} < 0$

L'exemple de Bombelli (1526–1572) :

$$P(x) = x^3 - 15x - 4$$

⋆ **Activité nº 4** $\Delta = -484 = -22^2 < 0$ et $\Delta = i^2 22^2$ donc « $\sqrt{\Delta} = 22i$ ». La formule pour $\Delta > 0$ donne :

$$\sqrt[3]{\frac{4+22i}{2}} + \sqrt[3]{\frac{4-22i}{2}} = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}$$
$$= (2+i) + (2-i) = 4$$

et 4 est bien racine.

Invention des nombres complexes ! Détour par les nombres complexes pour obtenir une racine réelle !

Cas $\Delta < 0$: prendre la formule pour $\Delta > 0$ et lui donner un sens à l'aide des nombres complexes.

Formules de Cardan en degré 3

Bilan des formules de Cardan :

- compliquées à mettre en œuvre
- problèmes de simplification de radicaux
- apparition de « nombres complexes » même si les solutions sont réelles au bout du compte

Et pour un polynôme de degré 4 ? 5 ? ...

Formules de Ferrari en degré 4

Ferrari (1522–1565)

Les quatre racines de $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ sont :

$$r_1 = \frac{-a}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{2b}{3}+\frac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{3\left(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\right)^{\frac{1}{3}}}+\left(\frac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{2}-\frac{4b}{3}-\frac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{3\left(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\right)^{\frac{1}{3}}}-\left(\frac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{-a^3+4ab-8c}{4\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{2b}{3}+\frac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{3\left(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\right)^{\frac{1}{3}}}+\left(\frac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}}}}}$$

$$r_2 = \frac{-a}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{2b}{3}+\frac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{3\left(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\right)^{\frac{1}{3}}}+\left(\frac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{2}-\frac{4b}{3}-\frac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{3\left(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\right)^{\frac{1}{3}}}-\left(\frac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{-a^3+4ab-8c}{4\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{2b}{3}+\frac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{3\left(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\right)^{\frac{1}{3}}}+\left(\frac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}}}}}$$

$$r_3 = \frac{-a}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{2b}{3}+\frac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{3\left(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\right)^{\frac{1}{3}}}+\left(\frac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{2}-\frac{4b}{3}-\frac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{3\left(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\right)^{\frac{1}{3}}}-\left(\frac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{-a^3+4ab-8c}{4\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{2b}{3}+\frac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{3\left(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\right)^{\frac{1}{3}}}+\left(\frac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}}}}}$$

$$r_4 = \frac{-a}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{2b}{3}+\frac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{3\left(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\right)^{\frac{1}{3}}}+\left(\frac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{2}-\frac{4b}{3}-\frac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{3\left(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\right)^{\frac{1}{3}}}-\left(\frac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{-a^3+4ab-8c}{4\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{2b}{3}+\frac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{3\left(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\right)^{\frac{1}{3}}}+\left(\frac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}}}}}$$

Formules de Ferrari en degré 4

$$r_1 = \frac{-a}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2b}{3} + \frac{2^{\frac{1}{3}}\left(b^2 - 3ac + 12d\right)}{3\left(2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd + \sqrt{-4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2 \cdots}\right.}}$$

$$r_2 = \frac{-a}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2b}{3} + \frac{2^{\frac{1}{3}}\left(b^2 - 3ac + 12d\right)}{3\left(2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd + \sqrt{-4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2 \cdots}\right.}}$$

$$r_3 = \frac{-a}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2b}{3} + \frac{2^{\frac{1}{3}}\left(b^2 - 3ac + 12d\right)}{3\left(2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd + \sqrt{-4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2 \cdots}\right.}}$$

$$r_4 = \frac{-a}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2b}{3} + \frac{2^{\frac{1}{3}}\left(b^2 - 3ac + 12d\right)}{3\left(2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2d - 72bd + \sqrt{-4(b^2 - 3ac + 12d)^3 + (2b^3 - 9abc + 27c^2 + 27a^2 \cdots}\right.}}$$

Formules de Ferrari en degré 4

$$\frac{-a^3+4ab-8c}{\dfrac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{\left.\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\right)^{\frac{1}{3}}}+\left(\dfrac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{-a^3+4ab-8c}{\dfrac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{\left.\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\right)^{\frac{1}{3}}}+\left(\dfrac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{-a^3+4ab-8c}{\dfrac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{\left.\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\right)^{\frac{1}{3}}}+\left(\dfrac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{-a^3+4ab-8c}{\dfrac{2^{\frac{1}{3}}(b^2-3ac+12d)}{\left.\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}\right)^{\frac{1}{3}}}+\left(\dfrac{2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd+\sqrt{-4(b^2-3ac+12d)^3+(2b^3-9abc+27c^2+27a^2d-72bd)^2}}{54}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

Polynômes de degré ≥ 5 ?

Degré 2, 3, 4

Formules pour les racines en fonction des coefficients de $P(x)$ et des opérations $+, -, \times, \div$ et $\sqrt{}, \sqrt[3]{}, \ldots$ (radicaux)

Pour $n \geq 5$

Existe-t-il des formules exprimant les racines de n'importe quel polynôme

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

sous forme de radicaux ?

Polynômes de degré ≥ 5

Théorème (Ruffini 1799, Abel 1826, Galois 1830)

Il n'existe aucune formule générale permettant d'exprimer les racines de n'importe quel polynôme de degré ≥ 5 par radicaux.

Polynômes de degré ≥ 5

Théorème (Ruffini 1799, Abel 1826, Galois 1830)

Il n'existe aucune formule générale permettant d'exprimer les racines de n'importe quel polynôme de degré ≥ 5 par radicaux.

Cela n'empêche pas certains polynômes d'avoir des racines exprimables par radicaux ! Exemple : $P(x) = x^5 - 1$ a pour racine 1.

Polynômes de degré ≥ 5

Théorème (Ruffini 1799, Abel 1826, Galois 1830)

Il n'existe aucune formule générale permettant d'exprimer les racines de n'importe quel polynôme de degré ≥ 5 par radicaux.

Cela n'empêche pas certains polynômes d'avoir des racines exprimables par radicaux ! Exemple : $P(x) = x^5 - 1$ a pour racine 1. Simplement on n'a pas de formules générales comme pour $n = 2, 3, 4$.

Théorie de Galois

Évariste Galois (1811–1832)

Groupe des racines du polynôme. Résolubilité par radicaux correspond à une condition sur ce groupe

Critère pour savoir si un polynôme donné est résoluble par radicaux (ex. : $x^5 - 10x + 5$ n'a aucune racine exprimable par radicaux)

Fondation de l'algèbre moderne

La théorie de Galois est une branche de l'algèbre qui continue à faire l'objet de recherches mathématiques actuelles.