Herve Queffelec

10 01 20013

En dimension finie, toute matrice définit un opérateur linéaire. Qu'en est-il d'une matrice infinie $A = (a_{j,k})_{j,k\geq 0}$, par exemple $a_{j,k} = \frac{1}{j+k+1}$, la matrice de Hilbert? Un joli théorème de F.Piquard (1997) montre qu'on ne peut presque rien dire dans le cas général. La matrice de Hilbert définit bien un opérateur borné A avec $\|A\| \leq 2\pi$ (Hilbert) et on a plus précisément $\|A\| = \pi$ (Schur). La preuve la plus simple qu'on donne aujourd'hui consiste à remarquer que $\frac{1}{j+k+1} = \widehat{\varphi}(j+k)$ où φ est une fonction bornée et $\widehat{\varphi}$ la suite de ses coefficients de Fourier. On écrit $A = A_\varphi$, et on dit que A est la matrice (de Hankel) de symbole φ. On s'intéressera ici à un autre type d'opérateur symbolique C_φ, dit opérateur de composition, défini par

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi$$

où $f \in H$, un certain espace de Hilbert de fonctions holomorphes sur le disque unité $\mathbf{D}$ et où le symbole φ est une application holomorphe de $\mathbf{D}$ dans lui-même. Les interactions entre les propriétés de la fonction φ et de l'opérateur C_φ sont frappantes. Par exemple: si C_φ est un opérateur *compact,* φ a un point fixe *attractif* a dans $\mathbf{D}$, vers lequel convergent les itérées de φ. Si $\lambda = \varphi'(a) \neq 0$, il existe une fonction propre $\sigma \in H$ telle que

$$\sigma \circ \varphi = \lambda \sigma$$

les valeurs propres de C_φ sont les λ^n et les fonctions propres de C_φ les $k\sigma^n$. On connaît complètement le spectre de C_φ et en retour on a des informations substantielles sur son degré de compacité. On discutera cet aspect et d'autres au cours de l'exposé.